

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування

На правах рукопису

ТУРБАЛ ІЮРІЙ ВАСИЛЬОВИЧ

УДК 519.6:534.222

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ
ЛОКАЛІЗОВАНИХ СОЛІТОНОПОДІБНИХ ЗБУРЕНЬ В СУЦІЛЬНИХ
СЕРЕДОВИЩАХ**

01.05.02 Математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Науковий консультант

Бомба Андрій Ярославович

доктор технічних наук,

професор

Рівне 2016

ЗМІСТ

ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ПРОГРАМНИХ КОМПЛЕКСІВ СЕЙСМІЧНОГО І ХВИЛЬОВОГО МОНІТОРИНГУ ТА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ЛОКАЛІЗОВАНИХ ЗБУРЕНЬ В СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩАХ	20
1.1 Програмні комплекси сейсмічного моніторингу та моделі сейсмічних процесів	21
1.2 Математичні моделі, що описують процеси поширення відокремлених хвиль	29
1.2.1 Відокремлені хвилі в нелінійних дисипативних середовищах	29
1.2.2 Моделі твердих тіл в рамках структурно-феноменологічного підходу	41
1.2.3 Моделі типу мілкої води	52
1.3 Методи моделювання солітонів	56
1.3.1 Метод оберненої задачі розсіювання	56
1.3.2 Методи спеціальних розкладів	60
1.3.3 Асимптотичні методи	65
1.4 Висновки	67
РОЗДІЛ 2 МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ СОЛІТОНОПОДІБНИХ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РІВНЯННЯМИ ТИПУ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРІЗА, НА ОСНОВІ Т-ПРЕДСТАВЛЕНЬ	70
2.1 Моделювання процесів поширення відокремлених хвиль у середовищах, що описуються рівняннями типу Кортевега-де Вріза	70
2.2 Метод гауссіанів моделювання одно- та багатосолітонних процесів, що описуються рівняннями типу КдВ	80

2.3	Метод моделювання багатосолітонних взаємодій на основі T-представлень	91
2.4	Висновки	100
РОЗДІЛ 3 МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЙ СОЛІТОНОПОДІБНИХ ЗБУРЕНЬ У СЕРЕДОВИЩАХ, ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В ЯКИХ ОПИСУЮТЬСЯ РІВНЯННЯМИ ТИПУ МІЛКОЇ ВОДИ.....		
3.1	Моделювання кругових відокремлених хвиль за допомогою T-представлень	102
3.1.1	Загальний випадок	102
3.1.2	Деякі часткові випадки	113
3.1.3	Випадки спеціальних представлень функції швидкості	118
3.1.4	Випадок залежності амплітуди від просторової змінної	119
3.1.5	Комбінація типу солітон - антисолітон	122
3.2	Структура розв'язків рівнянь газової динаміки гравітуючого газового диску	124
3.3	Проблеми існування локалізованих солітоноподібних розв'язків рівнянь газової динаміки гравітуючого газового диску.	131
3.4	Аналіз траєкторій солітонів	149
3.4.1	Випадок відсутності збурення гравітаційного потенціалу.....	151
3.4.2	Випадок наявності збурення гравітаційного потенціалу.....	164
3.5	Висновки	170
РОЗДІЛ 4 МЕТОД ОПЕРАТОРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ МОДЕЛЮВАННЯ ТОЧОК ПЕРЕТИНУ ТРАЄКТОРІЙ ВІДОКРЕМЛЕНИХ ХВИЛЬ ТА ОБЛАСТЕЙ КОНТРАСТНОСТІ ГУСТИНИ		
4.1	Моделюючі оператори та їх властивості	173
4.2	Проблема апроксимації “рукавів” орбіт динамічних систем логарифмічними спіралями	187

4.3	Моделювання колективних ефектів солітонної взаємодії	194
4.3.1	Моделювання колективних ефектів солітонної взаємодії на основі енергетичних функцій	195
4.3.2	Функції щільності розподілу солітонів в динамічних системах з випромінюванням	202
4.3.3	Локальні екстремуми енергетичних функцій	208
4.3.4	Моделювання природних об'єктів спіральної структури	220
4.4	Висновки	236
РОЗДІЛ 5 ВІДОКРЕМЛЕНІ ХВИЛІ В АНІЗОТРОПНИХ ТІЛАХ		237
5.1	Аналіз анізотропії пружних властивостей матеріалів з точки зору існування відокремлених хвиль типу δ -солітонів	238
5.2	Аналіз результуючої системи для різних типів сингоній	246
5.3	Необхідні та достатні умови існування розв'язків рівнянь руху для анізотропних пружних тіл, що описують відокремлені хвилі	258
5.4	Питання існування точних розв'язків характеристичної системи, що визначає клас анізотропії	261
5.5	Випадок залежності амплітуди від густини	268
5.6	Проблеми поширення хвилі в області стрімкого зростання густини середовища	269
5.6.1	Випадок, коли початковий вектор швидкості направлений по нормалі до поверхні сталої густини	269
5.6.2	Випадок, коли початковий вектор швидкості направлений під заданим кутом до поверхні сталої густини	279
5.7	Висновки	293
РОЗДІЛ 6 МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТРАЄКТОРІЙ ВІДОКРЕМЛЕНИХ ХВИЛЬ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ		294

6.1 Алгоритм ідентифікації траєкторій відокремлених хвиль.	294
6.2 Метод перевірки сумісності характеристичної системи	298
6.3 Деякі підходи до проблематики побудови прогновної траєкторії солітоноподібної хвилі	301
6.4 Деякі аспекти конструктивного розв'язку степеневі проблеми моментів.	303
6.4.1 Знаходження точок мінімуму цільової функції допоміжної задачі нелінійного програмування в умові теореми про сумісність.	309
6.4.2 Знаходження точок максимуму цільової функції допоміжної задачі нелінійного програмування	311
6.5 Модель сейсмічного процесу , що враховує солітонну складову.....	317
6.6 Інформаційна система та приклади моделювання	325
6.7 Висновки до розділу	333
ВИСНОВКИ.....	335
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	340
ДОДАТКИ.....	380
Додаток А Довідки про впровадження, патенти	381
Додаток А1 Довідки про впровадження	381
Додаток А2 Патент на винахід	385
Додаток Б Додатки до розділів	387
Додаток Б1 Розв'язок рівнянь газової динаміки для випадку збурення гравітаційного потенціалу спеціального виду	387
Додаток Б2 Дослідження стійкості за Ляпуновим особливих точок моделюючого оператора	393
Додаток Б3 Знаходження щільностей випадкових векторів при деяких операторних перетвореннях.....	400

Додаток Б4 Розв'язок рівняння руху для анізотропного пружного тіла для випадку залежності амплітуди від густини.....	408
Додаток Б5 Існування розв'язку характеристичної системи рівнянь	446
Додаток В Загальноприйняті визначення та твердження	451
Додаток В1 Проблема моментів та її розв'язок у степеневому випадку	451
Додаток В2 Деякі властивості орбіт дискретних динамічних систем..	455
Додаток Г Основні модулі інформаційної системи аналізу солітонної компоненти	458

ВСТУП

Актуальність теми. Останніми роками все більшої актуальності набувають програмно-апаратні комплекси моніторингу явищ, що зумовлені локалізованими солітоноподібними збуреннями, зокрема, серій сейсмічних поштовхів та цунамі. Ефективність таких комплексів та можливість побудови прогнозу залежить від наявності адекватних математичних моделей, доведених до комп'ютерної реалізації. Системи моніторингу сейсмічних процесів, що включають в себе, зокрема, сейсмічні та геофізичні станції, комп'ютерні системи обробки даних та відповідне програмне забезпечення, ґрунтуються на результатах, які стосуються проблеми прогнозування землетрусів. Однак, незважаючи на наявність великої кількості передвісників сейсмічних поштовхів та теорій, що пояснюють їх виникнення, ця проблема ще далека від вирішення. Тому відповідні програмні комплекси містять, як правило, лише підсистеми статистичного аналізу і не дають можливості здійснювати короткострокові прогнози поштовхів з прийнятною точністю. Системи попередження цунамі (що часто виникають внаслідок землетрусів) містять підсистеми датчиків вимірювань рівня моря та комунікаційні підсистеми для попередження населення, однак дають можливість визначити, якими можуть бути висоти хвиль при накопчуванні на берег лише у випадку, коли проведене відповідне математичне моделювання з врахуванням конфігурації дна.

Виявлення будь-якої ознаки чи механізму, який впливає на підготовку сейсмічного поштовху чи є його генератором, вважають сьогодні вагомим кроком у вирішенні цієї важливої для людства проблеми та становить теоретичну основу для підвищення ефективності відповідних програмно-апаратних комплексів, без яких сьогодні вивчати сейсмічні процеси неможливо.

Останнім часом при дослідженні сейсмічних процесів теоретично та експериментально почали вивчатись аномальні локалізовані хвилі деформації.

Солітоноподібні хвилі часто спостерігаються у природі на межах розділу динамічних середовищ з різними фізичними характеристиками, таких як «вода– повітря», на межах стратифікованих рідин, на межі «газ – вакуум» та відіграють суттєву роль у випадках, коли має місце їх підсилення чи взаємодія. На сьогодні, наприклад, в рамках проекту «MaxWave» європейського космічного агентства ESA розроблено систему моніторингу самотніх хвиль на поверхні океану, які наносять шкоди судноплавству. При виникненні солітоноподібних хвиль в умовах надкритичних течій значно зменшується час експлуатації гідротехнічних тунелів, низьконапірних водоскидних споруд, шлюзів-регуляторів каналів, опор та інших гідротехнічних споруд, інтенсивніше руйнуються берегові споруди і тому виникає необхідність у виявленні та вивченні таких хвиль.

Однак, існуючі на сьогодні методи математичного моделювання локалізованих хвиль стосуються, як правило, лише солітонів і добре розроблені для одновимірного випадку. Потребують подальшого розвитку методи математичного та комп'ютерного моделювання процесів поширення та взаємодії локалізованих солітоноподібних збурень (як солітонів так і відокремлених хвиль, які не є солітонами) у просторовому випадку, колективних ефектів солітон-солітонної взаємодії, розробки алгоритмів та методів оцінки параметрів траєкторій відокремлених хвиль при обмеженій кількості даних та їх врахування при розробці відповідних програмно-апаратних комплексів, що дозволить створити програмні системи прогнозування низки небезпечних для людини явищ, які зумовлені солітоноподібними хвилями та покращити прогнози.

Отже, тема дисертаційної роботи має важливе наукове і практичне значення, оскільки вона спрямована на вирішення актуальної науково-прикладної проблеми, сутність якої полягає у розробці ефективних систем сейсмічного та хвильового моніторингу, що базуються на адекватних математичних та комп'ютерних моделях процесів генерації, поширення і

взаємодії локалізованих солітоноподібних збурень в суцільних середовищах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами темами.

Тематика дисертаційної роботи пов'язана з дослідженнями, проведеними в 1996-2015 рр. в Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка на кафедрі дослідження операцій, в Національному університеті водного господарства та природокористування на кафедрах прикладної математики та гідроенергетики, теплоенергетики та гідравлічних машин, в Міжнародному економіко-гуманітарному університеті ім. академіка Степана Дем'янчука на кафедрі інформаційних систем та обчислювальних методів відповідно з державними науково-технічними програмами та планами: фундаментальних НДР, виконуваних спільно організаціями Міністерства вищої і середньої спеціальної освіти (МВССО), НДР і ДКР, які фінансувалися з коштів державного бюджету Міністерства освіти і науки України, а також спільних господарських договірних робіт з науково-виробничими об'єднаннями, підприємствами та організаціями. Найважливішими з них є: «Створення комплексу алгоритмів і програм для визначення спектру ізотопів, що утворюють радіаційний фон» (затверджена згідно наказу МОН України, номер державної реєстрації 97524), автор виконував роботу як виконавець теми; «Спектральні методи та задачі гідро-газодинаміки» (номер державної реєстрації 0109U008282), автор виконував роботу як виконавець теми; «Методи ідентифікації параметрів та математичні моделі, що ґрунтуються на базі багатоканальних систем масового обслуговування» (номер державної реєстрації 0111U001162) – автор виконував роботу як керівник теми.

Мета і задачі дослідження. Мета дисертаційного дослідження – підвищення ефективності програмно-апаратних комплексів сейсмічного та хвильового моніторингу шляхом створення адекватних математичних моделей процесів поширення та взаємодії в суцільних середовищах локалізованих солітоноподібних збурень та розробки на їх основі відповідних програмних систем моделювання.

Для досягнення цієї мети як розв'язку поставленої наукової проблеми в цілому були сформульовані наступні задачі:

- проаналізувати існуючі програмно-апаратні комплекси сейсмічного та хвильового моніторингу, визначити їх недоліки та можливості підвищення ефективності шляхом створення підсистем, що базуються на адекватних моделях процесів поширення та взаємодії локалізованих солітоноподібних збурень в суцільних середовищах;

- розробити новий конструктивний спосіб представлення профілю локалізованих солітоноподібних збурень, що дозволяє враховувати динаміку їх руху та моделювати як солітони так і локалізовані хвилі, які не є солітонами та становить теоретичну основу вдосконалення відповідних підсистем прогнозування програмно-апаратних комплексів сейсмічного та хвильового моніторингу;

- розробити нові методи числового моделювання процесів взаємодії одновимірних локалізованих збурень типу солітонів, антисолітонів та їх комбінацій (бризерів), адаптовані до систем автоматизованого проектування, здійснити відповідні розрахунки та візуалізацію результатів а також зіставити результати моделювання з експериментальними даними щодо виникнення та поширення локалізованих збурень в умовах білякритичних і надкритичних течій;

- поширити конструктивні способи представлення одновимірних локалізованих збурень на двовимірні випадки, зокрема :

- а) розробити методи моделювання кругових локалізованих хвиль типу цунамі в межах наближення “мілкої води” та способи дослідження їх поведінки в залежності від поверхні дна з метою вдосконалення існуючих систем моніторингу та попередження цунамі;

- б) розробити методи моделювання локалізованих солітоноподібних хвиль типу δ -солітонів для тонкого гравітуючого газового диску, що повертається, за умов наявності областей стрімкої зміни густини як основи для

побудови систем автоматизованого прогнозування траєкторій відповідних збурень;

- розробити нові математичні моделі процесів взаємодії солітоноподібних хвиль з областями стрімкої зміни густини середовища за умов значної інтенсивності виникнення таких хвиль, алгоритми формування зон зосередження відповідних локалізованих збурень та програмну підсистему, що дозволяє досліджувати динаміку природних об'єктів (які утворюються за рахунок фізичних механізмів, пов'язаних з локалізованими солітоноподібними збуреннями) за їх морфологічною структурою;

- розробити методи числового моделювання локалізованих збурень у середовищах, що характеризуються анізотропією пружних властивостей та провести чисельний експеримент щодо визначення траєкторій солітоноподібних збурень, які рухаються у областях змінної густини за допомогою систем автоматизованого проектування; провести аналіз анізотропії пружних властивостей матеріалів з точки зору існування локалізованих солітоноподібних збурень в рамках класичної теорії анізотропного пружного твердого тіла з метою підтвердження припущення про можливість виникнення відповідних збурень в областях накопичення сейсмічної енергії, де зростає анізотропія пружних властивостей;

- на основі властивостей поширення солітоноподібних збурень у анізотропних тілах вдосконалити існуючі моделі сейсмічних процесів шляхом врахування локалізованих солітоноподібних збурень як «спускових механізмів» окремих поштовхів для уточнення сейсмічного районування;

- створити нові алгоритми ідентифікації солітоноподібних збурень в суцільних середовищах за результатами фіксації окремих точок їх траєкторій та методи оцінки параметрів траєкторій;

- розробити та впровадити комп'ютерну систему моніторингу та моделювання сейсмічних процесів, що враховує локалізовані солітоноподібні

збурення та дозволяє доповнювати карти сейсмічного районування областями зосередження локалізованих хвиль, що змінюються в режимі реального часу.

Об'єктом дослідження в дисертації є процеси прогнозування сейсмічних поштовхів та цунамі, що ними породжуються, в програмно-апаратних комплексах сейсмічного та хвильового моніторингу.

Предметом дослідження є методи і засоби математичного моделювання процесів поширення відокремлених солітоноподібних збурень в суцільних середовищах та відповідні комп'ютерні системи моніторингу і прогнозування явищ, що зумовлені локалізованими хвилями (зокрема, серій сейсмічних поштовхів та цунамі).

Методи дослідження. Теоретичною основою роботи є принципи і методи системного аналізу, математичного моделювання, математичної фізики та обчислювальної математики. При моделюванні процесів поширення відокремлених хвиль у суцільних середовищах використовувались спеціальні Т-представлення профілю відокремлених хвиль, спеціальні алгоритми ідентифікації траєкторій солітоноподібних хвиль та оцінки їх параметрів, що ґрунтуються, зокрема, на розв'язанні систем моментних співвідношень, а також властивості позитивних напівтраєкторій для певних класів операторів при моделюванні точок перетину неперервних траєкторій солітоноподібних хвиль з поверхнями Пуанкаре. При побудові методів прогнозування сейсмічних поштовхів, що ґрунтуються на врахуванні солітонних «спускових механізмів», використовуються дані сейсмічних станцій про гіпоцентри, час та магнітуду окремих поштовхів.

Наукова новизна одержаних результатів:

1. вперше розроблено математичну модель процесу поширення одновимірних локалізованих збурень в суцільних середовищах, яка відрізняється від існуючих моделей типу біжучої хвилі використанням спеціальних представлень відокремлених хвиль (Т-представлень), що включають функції амплітуд, профілю та закон руху максимуму збурення та

дозволяє прогнозувати солітони та інші локалізовані збурення ;

2. вперше розроблено чисельний метод моделювання процесів взаємодії одновимірних локалізованих збурень типу солітонів, антисолітонів та їх комбінацій (бризерів) на основі Т-представлень, що відрізняється, зокрема, розрахунком амплітудних характеристик та профілю хвильових взаємодій у заданих контрольних точках та дозволяє вивчати ефекти взаємодії та динаміки змін в часі довільних початкових локалізованих збурень і становить теоретичну основу для підсистем прогнозування в програмно-апаратних комплексах сейсмічного та хвильового моніторингу;

3. вперше запропоновано математичну модель кругових локалізованих хвиль в межах наближення мілкої води, що відрізняється конструюванням спеціальних представлень профілю хвилі та функції швидкості при фіксованій азимутальній координаті та врахуванням довільної поверхні дна, яка дозволяє точніше описувати поведінку хвиль типу цунамі, зокрема, при їх наближенні до берега на основі даних систем хвильового моніторингу;

4. отримала подальший розвиток гідродинамічна теорія гравітуючих газових дисків, зокрема:

- знайдено умови існування локалізованих солітоноподібних збурень типу δ -солітонів у гравітуючих газових дисках, що обертаються;
- розроблено метод дослідження траєкторій відокремлених хвиль у областях змінної густини, що відрізняється використанням інфінітесимальних представлень локалізованих збурень в межах заданої точності та дозволяє враховувати специфіку траєкторій окремих локалізованих збурень в підсистемах прогнозування програмно-апаратних комплексів моніторингу хвильових явищ;

5. вперше створено нову математичну модель взаємодії траєкторій відокремлених хвиль та областей стрімкої зміни густини, яка відрізняється використанням операторних модифікацій методу перетинів Пуанкаре, що дозволило пояснити один з механізмів формування спіральних хвиль

щільності за рахунок взаємодії локалізованих солітоноподібних збурень та областей зміни густини та створити підсистеми аналізу динаміки природних об'єктів, які мають спіральну структуру у відповідних програмних комплексах моніторингу;

6. вперше розроблено чисельний метод моделювання локалізованих збурень типу δ -солітонів у анізотропних пружних середовищах, що відрізняється застосуванням спеціальних тривимірних модифікацій Т-представлень у яких, зокрема, амплітудні функції залежать від густини середовища та забезпечує можливість аналізу типів анізотропії пружних властивостей матеріалів з точки зору існування локалізованих солітоноподібних хвиль в межах класичної теорії анізотропного твердого тіла і порівняння результатів моделювання з експериментальними даними стосовно анізотропії пружних властивостей гірських порід та її зміни у зонах накопичення сейсмічної енергії;

7. вперше створено нові моделі динамічних систем, які відрізняються врахуванням солітонної компоненти та застосуванням спеціальних енергетичних функцій для дослідження ефектів солітонної взаємодії, що дозволило прогнозувати виникнення областей інтенсивної взаємодії відокремлених хвиль у середовищах, де можлива генерація та поширення локалізованих збурень;

8. отримали подальший розвиток методи обробки та аналізу результатів спостережень точок взаємодії локалізованих хвиль та областей стрімкої зміни густини шляхом створення нових підходів до оцінки параметрів, в основі яких лежить конструктивне розв'язання експоненційної проблеми моментів, що дало змогу розробити ефективні алгоритми моніторингу та моделювання солітонної складової сейсмічних процесів та створити відповідну комп'ютерну систему моделювання ;

9. вперше створено нову математичну модель сейсмічного процесу, яка відрізняється врахуванням локалізованих солітоноподібних збурень, що

розглядаються як «спускові механізми» окремих поштовхів та дозволяє уточнювати області сейсмічного районування в режимі реального часу та ймовірність сейсмічного поштовху за умови ідентифікації траєкторій локалізованих хвиль.

Наукове і практичне значення отриманих результатів. Наукові положення, висновки, пропозиції та рекомендації, а також результати розрахункових досліджень, що отримані, обґрунтовані і запропоновані автором у дисертації, були використані в науково-дослідних установах, лабораторіях та виробничих центрах.

Автор роботи є власником та автором патенту «Спосіб прогнозування афтершоків», № 63026 від 26.09.2011. Вперше запропонований метод уточнення прогнозу сейсмічних поштовхів, в основі якого враховуються відокремлені солітоноподібні хвилі, що виступають в якості «спускових механізмів» окремих сейсмічних поштовхів при проходженні їх через області накопичення сейсмічної енергії, є вагомим доповненням до існуючих засобів прогнозування землетрусів. Метод впроваджений у відділі сейсмічної небезпеки Інституту геофізики НАН України ім. М.І. Субботіна як частина глобальної online-системи прогнозування землетрусів (довідка про впровадження від 15.05.2014 р.). Розроблена комп'ютерна інформаційна система моделювання є інструментом для практичної ідентифікації відокремлених солітоноподібних хвиль в сейсмоактивних областях, прогнозування їх траєкторії та знаходження областей їх інтенсивної взаємодії.

Метод прогнозування пройшов апробацію при вивченні сейсмічних процесів в низці регіонів Землі, де сформувались необхідні фізичні умови для виникнення солітонів в областях сейсмічної активності, а саме о. Суматра, о. Пасхи, Греції, Західній Туреччині, Японії, Чилі. Зокрема, метод солітонного аналізу показав, що саме самотні хвилі могли бути причиною катастрофічного поштовху в Японії у 2011 році та ряду інших потужних сейсмічних поштовхів. На підприємстві «Рівненський обласний центр з гідрометеорології МНС

України» впроваджено програмний комплекс для дослідження природних об'єктів, що мають спіральну структуру, утворену як результат взаємодії відокремлених солітоноподібних хвиль з областями сильної контрастності густини середовища, зокрема, спіральних областей хмарності у циклонах-антициклонах (акт про впровадження від 15.04.2015 р.). Відповідна моделююча програма дозволяє досліджувати та моделювати динаміку зміни в часі циклонів-антициклонів, що дає можливість уточнювати прогнози погоди.

Розроблено програмний комплекс, що дозволяє моделювати колективні ефекти взаємодії локалізованих хвиль щільності з областями зміни густини на основі операторних модифікацій методу перетину Пуанкаре, оцінювати параметри моделі та моделювати колективні ефекти виникнення спіральних хвиль щільності в гравітуючих газових дисках. Теоретичні результати роботи, які стосуються тривимірних локалізованих хвиль в анізотропних пружних середовищах, забезпечують можливість дослідження анізотропії пружних властивостей матеріалів за допомогою генерації локалізованих збурень солітонного типу та вивчати властивості відповідних хвиль.

Результати досліджень були використані в навчальному процесі Національного університету водного господарства та природокористування при викладанні спецкурсів «Моделювання екологічних, економічних та соціальних процесів», «Моделювання систем» та при дипломному проектуванні (акт № 8 від 03.03.15).

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота задумана та виконана особисто автором. Усі наукові результати здобувачем отримані самостійно. Роботи [149, 351-352, 354, 356-359, 361, 363-365, 367, 368, 370-373, 375, 376] опубліковані без співавторів. У колективних статтях у фахових виданнях, виконаних у співавторстві, авторові належать наступні результати: метод прогнозування землетрусів, що враховує солітонну складову сейсмічних процесів [150]; метод моделювання багатосолітонних взаємодій [151]; метод знаходження розв'язків рівнянь типу Кортевега-де Вріза [148,182]; метод

прогнозування траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень в анізотропних пружних тілах [181]; метод прогнозування афтершоків [180]; загальний підхід до побудови представлення тривимірної локалізованої хвилі в анізотропному пружному тілі [358] ; метод оцінки параметрів траєкторій локалізованих хвиль, що ґрунтується на використанні систем моментних співвідношень [206]; метод аналізу сумісності системи моментних співвідношень [369]; постановка проблеми та ідея представлення профілю відокремленої хвилі для гравітуючих газових дисків [374]; побудова представлення профілю хвилі як комбінації солітона та антисолітона [179]; метод групування даних для ідентифікації траєкторій локалізованих хвиль [180]; метод дослідження багатосолітонних розв'язків [182]; метод моделювання сейсмічних процесів [178]; метод моделювання кругових локалізованих хвиль [382]; метод оцінки максимальних висот кругових локалізованих хвиль [383] .

Здобувачем підготовлено 21 публікацію без співавторів.

Апробація роботи. За результатами, що увійшли до дисертації, було зроблено такі доповіді: на науковому семінарі Головної астрономічної обсерваторії НАН України у 2011 р., м. Київ; на науковому семінарі обсерваторії КНУ ім. Т.Шевченка у 2010 р., м. Київ (керівник – д. ф.-м. н., проф. Гнатик Б.Д.) ; на науковому семінарі Інституту математики НАН України «Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики», 2011 р., м. Київ (керівник – д. ф.-м. н., проф. Самойленко В.Г.); на науковому семінарі інституту гідромеханіки НАН України, 2009 р. (керівник – д. ф.-м. н., проф., академік НАН України Грінченко В.Т.); на науковому семінарі кафедри механіки суцільних середовищ КНУ ім. Т. Шевченка (керівник – д. ф.-м. н., проф. Мелешко В.В.); на науковому семінарі кафедри теоретичних основ кібернетики КНУ ім. Т. Шевченка (керівник– д. ф.-м. н., проф. Белов Ю.А.); на Міжнародних конференціях «Прийняття рішень в умовах невизначеності» (2009 р., 2010 р., 2011 р., 2012 р., 2014 р., 2015 р., голова оргкомітету – д. ф.-м.

н., проф. Наконечний О.Г.); на Україно-Японській конференції з питань науково-технічного співробітництва (м. Одеса, 2013 р.); на міжнародній конференції «Nonlinear dynamics», присвяченій 125-річчю НТУУ «Харківський політехнічний інститут» (м. Харків, 2010 р.); на міжнародній конференції «Dynamical system modelling and stability investigation» (м. Київ, 2007 р.); на міжнародній конференції «Mathematics for life sciences» (м. Рівне, 2015 р.); на всеукраїнських наукових конференціях «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (м.Рівне, 2013 р., 2014 р.); на міжнародній конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2015)» (м.Львів, 2015 р.); на міжнародній конференції «Інформаційні технології в економіці, менеджменті і бізнесі. Проблеми науки, практики і освіти» (м. Київ, 2001 р.); на науковому семінарі польського математичного товариства університету ім. Адама Міцкевича, Познань, Польща, 2010 р. (керівник – проф. Іренеуш Кубячик).

Вцілому дисертаційне дослідження доповідалось на науковому семінарі Національного університету водного господарства та природокористування (керівник – д. т. н, проф. Власюк А.П.), семінарі «Моделювання та оптимізація систем з неповними даними» Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (керівники – д. ф.-м. н., проф. Гаращенко Ф.Г., д. ф.-м. н., проф. Наконечний О.Г.), на розширеному науковому семінарі відділу дистанційних методів і перспективних приладів Інституту космічних досліджень НАН України та Державного космічного агентства України (керівники – д.т.н, проф. Яценко В.О., д. т. н, проф., чл.-корр. НАН України Губарєв В.Ф), на науковому семінарі ХНУ ім. В.Н. Каразіна (керівник – д. т. н., проф. Жолткевич В.Н.), на науковому семінарі «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (керівник– д. ф.-м. н., проф. Гандель Ю.В.).

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 48 наукових праць, серед яких 29 статей у фахових виданнях за спеціальністю, 5 робіт у

іноземних виданнях, що належать до європейських науково-метричних баз, отримано 1 авторське свідоцтво.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, шести розділів, висновку, списку використаних джерел та чотирьох додатків. Загальний обсяг роботи складає 468 сторінок, з них: 62 рисунки (1 рисунок на окремій сторінці), 409 найменувань списку використаних джерел на 40 сторінках та чотири додатки на 89 сторінках.

РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ПРОГРАМНИХ КОМПЛЕКСІВ СЕЙСМІЧНОГО І ХВИЛЬОВОГО МОНІТОРИНГУ ТА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ЛОКАЛІЗОВАНИХ ЗБУРЕНЬ В СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Проблема прогнозування сейсмічних поштовхів є однією з найважливіших проблем, що стоять зараз перед людством. Її складність зумовлена специфікою фізичних процесів, що відбуваються при підготовці землетрусу та наявністю великої кількості неконтрольованих факторів, які неможливо врахувати. На сьогодні існує багато програмно-апаратних комплексів, що дозволяють обробляти дані сейсмічного моніторингу та здійснювати їх аналіз. Однак, функції прогнозування (що мають лише окремі з них) вимагають суттєвого вдосконалення, одним з можливих шляхів якого є врахування локалізованих солітоноподібних збурень як «спускових механізмів» окремих поштовхів.

Зараз відомо багато середовищ, моделі хвильових процесів у яких допускають існування солітонів. Серед таких моделей можна виділити, зокрема, широкий клас одновимірних моделей, які описують середовища з заданими дисперсійними властивостями, моделі твердих тіл з мікроструктурою, що розглядаються в рамках структурно-феноменологічного підходу, моделі сейсмічних процесів, двохвимірні моделі типу мілкої води. Незважаючи на різноманітність фізичних явищ, що описуються відповідними модельними рівняннями, усі вони характеризуються наявністю особливих розв'язків, які описують процеси поширення відокремлених хвиль, що не змінюють в часі свою форму та характеристики.

В розділі розглядаються також основні відомі підходи до знаходження солітонних розв'язків відповідних модельних рівнянь. Виділено клас невирішених проблем в галузі дослідження відокремлених хвиль а також в загальній формі обґрунтовано мету та завдання досліджень.

1.1 Програмні комплекси сейсмічного моніторингу та моделі сейсмічних процесів

На сьогоднішній день відомо кілька сотень передвісників землетрусів, які умовно можна поділити на дві основні групи: геофізичні (включаючи геологічні, геохімічні, гідродинамічні, геодезичні, космічні) та біологічні (що враховують поведінку рослин та тварин перед землетрусом). Підготовка землетрусу відбивається на геофізичних полях: перед землетрусами і під час них спостерігаються аномальні зміни стану земної кори, пов'язані з виникненням сейсмодислокацій, відбуваються зміни сейсмічного режиму, низка електромагнітних явищ в земній корі та атмосфері (зокрема, іоносфері), зміни хімічного стану природних вод та ґрунтів, гідродинамічні зміни. Наявність величезних об'ємів інформації, яку необхідно враховувати при вирішенні проблеми прогнозування землетрусів, зумовлює необхідність використання відповідних програмно-апаратних комплексів, що об'єднують апаратні системи моніторингу та відповідні програмні комплекси для обробки та аналізу даних.

Існуючі програми обробки та аналізу сейсмологічних даних класифікують [404] в залежності від завдань, які ними розв'язуються, зокрема: моніторинг, обробка даних спостережень, аналіз даних та візуалізація, побудова прогнозів.

Прикладами програм-моніторів можуть виступати: програмний комплекс SeismicPortal (www.seismicportal.eu), що працює в режимі реального часу та містить зручну підсистему роботи з картами, можливості формувати вибірки сейсмічних подій та їх візуалізації і включає підсистеми ORFEUS (що дозволяє отримувати дані з більш як 1000 станцій), Verce Platform (забезпечує можливість роботи з великими об'ємами даних), Hazard Portal (FP7 проект «Гармонізація сейсмічної небезпеки в Європі»), OSAP Portal (проект для аналізу сейсмостійкості будівель); програмний комплекс «Екстремум», який дозволяє зберігати, систематизувати та обробляти картографічну інформацію

а також будувати сценарії реагування в регіоні, що постраждав; програмний комплекс Earth Alerts/Version 2011, що працює в режимі реального часу та дозволяє отримувати інформацію про сейсмічні події (та цунамі).

На сьогодні розроблено низку форматів сейсмічних даних та програм, що здійснюють їх конвертацію [404]. Серед найбільш поширених форматів представлення сейсмічних даних виділяють наступні: XDATA - формат запису пунктами спостережень радіотелеметричної системи NANOMETRIX; PCC-1 формат запису пунктами спостережень радіотелеметричної системи PCC; DASS- формат запису для цифрових станцій “Геотех”. Для полегшення обміну даними міжнародним товариством з прикладної геофізики був розроблений стандарт SEG-Y. В країнах СНД [404] застосовувались формати СЦС-3, СОС-ПС, СОС-Сайбер, ССЦ-2, 3, 4, SEG-B, SEG-D. Для їх перетворення в формат SEG-Y використовується, зокрема, програмний комплекс ARCOPY (інші пакети, що працюють з SEG-Y: GSEGYView, SegyMAT, SegyPY, SeiSee, SeisView).

До програмних комплексів аналізу та візуалізації, зокрема, відносять: WSG (Windows Seismic Grafer) – програма для обробки сейсмічних сигналів та отримання параметрів гіпоцентрів сейсмічних поштовхів (www.seme.gsras.ru); HYPO71-91 – консольна програма для розрахунку основних параметрів землетрусів за первинними даними обробки (www.eas.gatech.edu); SEISAN-комплекс, що складається з бази даних для аналізу даних про землетруси в цифровій та аналоговій формі та пакету програм для аналізу (<http://seis.geus.net/software/seisan>); Tesseral Technologies Inc. - пакет скінченно-різницевого моделювання хвильового поля (www.tesseral-geo.com); Madagascar - пакет для багатовимірного аналізу даних (<http://reproducibility.org>); CWP/SU - комплекс сейсмічних утиліт з відкритим кодом (www.cwp.mines.edu). Існують також безкоштовні програми з аналогічними функціями: FreeUSP (<http://freeusp.org>), CPSeis (<http://sourceforge.net>), SPARC (<http://freeusp.org>), SEPLib (<http://sep.stanford.edu>), BotoSeis (

sourceforge.net), GeBR (www.geb-rproject.com), SeaSeis (<http://seaseis.com>), GPLib++ (<http://sourceforge.net>), JavaSeis (комплекс, що має попередній стек для вводу-виводу сейсмічних даних та містить можливості їх обробки в Eclipse, <http://sourceforge.net>), Seismic Lab (www.ualberta.com), CREWES (www.crewes.org), SW3D (<http://www.stefanmertl.com/science/software/seismo>), Seismon (www.seismic-handler.org), Seismic_Handler (www.csiro.au/), STK (<http://sourceforge.net>).

В основі програмного продукту Delivery лежить байєсівський метод інверсії сейсмічних даних (<http://www.unr.edu>). Jive3D являє собою пакет моделювання та томографічної інверсії, здатний моделювати сейсмічні типи даних в широкому часовому діапазоні (<http://bullard.esc.cam.ac.uk/~hobro/Jive3D>). Програма WaveletExtractor дозволяє формувати оптимальні вибірки з набору сейсмічних та каротажних даних та містить функції оцінки: невизначеності для вейвлетів, інформації типу “час-глибина”, рівня шуму для оцінки сейсмічної інверсії (www.sciencedirect.com). Програма SLIMpy надає можливості обробки сейсмічних даних пакетів, таких як Мадагаскар, через перевантаження операторів (<http://slim.eos.ubc.ca/SLIMpy>). Можливості обробки даних проекту SEIZMO включають функції кореляційного аналізу, згортки, видалення тренда, диференціювання, інтегрування, інтерполяції, зміни частоти дискретизації, фільтрації, злиття, відповіді переносу (response transferring), обертання, укладання, спектрального аналізу, конусоутворення і віконного аналізу (windowing) (<http://epsc.wustl.edu/~ggeuler/codes/m/seizmo>). Програма GeoSeis використовується для аналізу переломленого сейсмічного сигналу (<http://www.geoseis.tr.gg>). Програмний комплекс Passeis дозволяє проводити пасивний сейсмічний аналіз (www.mines.edu). Програми відображення сейсмічних сигналів: Mines JTK (обробка і відображення сигналу) (www.mines.edu), kogeo (www.kogeo.de) – включає в себе геофізичний аналіз і візуалізацію, SIOSEIS являє собою програмний пакет для розширення можливостей та управління, відображення морської сейсмічності

і заломлення даних (<http://sioseis.ucsd.edu>). Landmarc SeisWorks 3D вирішує завдання візуалізації, аналізу та інтерпретації сейсмічних даних, програмний комплекс mech-Lander використовується для побудови (візуалізації) осередків землетрусів.

Як бачимо з наведеної вище інформації, існує значна кількість програм для візуалізації та статистичного аналізу сейсмічних даних. Однак значно менше існуючих програмних комплексів, що містять функції прогнозу. Одним з наукових напрямків, що лежить в основі розробки програм, які мають підсистеми прогнозування, є нейромережеві технології, які базуються на так званих картах Кохонена [405]. Відповідні нейронні мережі відносять до класу мереж, що самонавчаються (з навчанням без вчителя) та виконують завдання візуалізації і кластеризації з використанням певних критеріїв для отримання прогнозів, зокрема широтного розподілу сейсмічної активності та астрономічних характеристик. Для побудови середньострокових прогнозів використовують, зокрема, мережі, що навчаються методом зворотнього поширення помилки (Feedforward Back Propagation) та функції Гуттенберга - Ріхтера для визначення сейсмічної активності [Као Дінь Чонг, 406].

Система прогнозу іоносферних даних на основі нейронної мережі [407] (розроблена в Інституті космофізичних досліджень і поширення радіохвиль РАН Ю.А. Полозовим і О.В. Мандриковою) базується на спільному застосуванні вейвлет-перетворень і нейронних мереж. Для навчання мережі використовувались перетворені за допомогою вейвлет-розкладу четвертого рівня сигнали сейсмічно-спокійних років. В основу системи була покладена тришарова мережа прямої передачі сигналу з двома сигмоїдальними і одним лінійним шарами [407]. Також розроблена програма для обчислення ймовірностей сейсмічних подій, яка реалізує ймовірнісну модель інтерпретації каталогу землетрусів та дозволяє представити сейсмічний режим у вигляді інтегральних функцій розподілу або функцій

щільності розподілу ймовірностей, на основі яких будується ймовірнісна модель сейсмічності. Ю.А. Полозовим і О.В. Мандриковою запропоновано алгоритм для обчислення функції належності сейсмогенеруючих факторів до нечітких підмножин факторів впливу на сейсмічну активність, що дозволяє підвищити точність вирішення задач прогнозування; запропонована модель прогнозування, яка дозволяє будувати прогнози для локальної ділянки земної кори, розроблена на основі математичного апарату нечітких множин та нечіткої логіки [407].

В.Н. Вапніком був запропонований алгоритм «Фортран узагальнений портрет» (ФУП) [405]. Ідея алгоритму полягає у відновленні залежностей за емпіричними даними, в основі яких лежить задача розпізнавання - задача ідентифікації періодів підвищеної сейсмонебезпеки за допомогою побудови гіперплощини, що розділяє простір заданих ознак. Програмно-алгоритмічний комплекс включає в себе програми для вирішення завдань: навчання розпізнаванню образів, відновлення регресії, інтерпретації результатів непрямих експериментів .

Геоінформаційна система Prediction (робота виконана в Інституті земної кори РАН Е.А.Левіною) розроблена для прогнозу землетрусів та гірських ударів на конкретних територіях - в Байкальській рифтовій зоні і Норильському родовищі [408].

TRON - онлайн-технологія системного прогнозування землетрусів в режимі реального часу. Для математичного та статистичного аналізу використано-вується єдина база даних, де фіксується поведінка домашніх птахів, риб і звірів, що наповнюється користувачами мережі Інтернет (лідер команди - Б.Д.Яровой, Центр інформаційних технологій, м. Владивосток, <http://tron.ru/AINUR>).

У 2009 році почала функціонувати система короткострокового прогнозування землетрусів і оперативної передачі інформації країнам - учасникам Global Network for the Forecasting Earthquakes (власники станцій

АТРОПАТЕНА). В основу системи покладено ефект зміни гравітаційного поля перед сильними землетрусами [404].

Сейсмічні поштовхи часто призводять до цунамі. Системи попередження цунамі будуються здебільшого на обробці сейсмічної інформації (якщо землетрус має магнітуду понад 7 і його епіцентр розташовано під водою, подається попередження про цунамі). Прикладами таких систем є Earth Alerts, яка виконує глобальний моніторинг землетрусів та цунамі, завантажує дані про гарячих точках і показує на карті динаміку активних явищ. У світі діє Міжнародна система попередження про цунамі, частиною якої є підсистеми окремих країн чи регіонів, наприклад ФП РСЧС-ЦУНАМИ, Pacific Tsunami Warning System, мережа Wave Monitoring Sites.

Серед теорій, які пояснюють виникнення передвісників, можемо виділити дилатантно-дифузійну модель [305], модель лавинно-нестійкого утворення тріщин [409], модель “крип”, в рамках якої розглядається виникнення землетрусу через прискорення руху бортів існуючого розлому. В дилатантно-дифузійній моделі поява передвісників землетрусів пояснюється надходженням води в зону майбутнього землетрусу після того, як через різке зростання тектонічних напруг там починається масове утворення мікротріщин. Суть моделі лавинно-нестійкого утворення тріщин полягає в тому, що різні стадії утворення тріщин призводять до зміни фізичних характеристик середовища і можуть розглядатись як довгострокові передвісники.

При дослідженні сейсмічних процесів найбільш розвинутими є статистичні методи. При цьому отримано низку емпіричних законів. Так, наприклад, відома формула Оморі [114], яка описує залежність кількості поштовхів від заданої нижньої границі магнітуди та часу, має вигляд:

$$n(t) = K / (t + c)^p,$$

де K -параметр, що залежить від нижньої границі магнітуди, c , p -параметри, що не залежать від цієї границі. Якщо зобразити $n(t)$ у двічі логарифмічному

масштабі, отримаємо пряму, нахил якої p .

Відомий емпіричний закон Гутенберга-Ріхтера, який описується співвідношенням: $P\{Mag > M\} = e^{-\beta M}$. Т.Утсу [152] досліджував зв'язок магнітуди основного поштовху і інтенсивності афтершокової активності та отримав співвідношення: $\log_{10} A = \alpha M + const$, де A - кількість афтершоків.

Т. Утсу і А.Секі [152] отримали закон зв'язку площі сейсмічного регіону і магнітуди основного поштовху у вигляді: $\log_{10} S = 1.2M - 4.0$.

З врахуванням останніх законів можна отримати співвідношення: $n(t) = 10^{0.85(M_0 - M_r) - 1.83} / (t + 0.3)^{1.3}$, де M_0 - магнітуда головного поштовху, $n(t)$ - кількість поштовхів магнітуди M і більше.

Ряд дослідників, зокрема С. Ломніз та Ф. Нава [92], розглядали послідовність афтершоків як нестационарний пуассонівський процес. Д. Веа-Джонс [154] дослідив можливість застосування аналізу Джефріса. Використання відповідних статистик показало незалежність моментів поштовхів. Аналогічні результати отримані С. Ломнізом та А. Хаком за допомогою автокореляцій. Однак при аналізі багатьох землетрусів такий зв'язок був виявлений. Міграція окремих землетрусів досліджувалась у роботах К. Могі, Я. Огати і К. Катсури, Т.Утсу [152].

Д. Веа-Джонс і Р.Девіес [154] запропонували тригерну модель. В цій моделі розглядається декілька основних поштовхів, розподілених рівномірно, кожен з яких генерує серію афтершоків. Умовна ймовірність афтершоку на інтервалі $(t, t + dt)$, згенерована основним поштовхом в момент часу t_0 визначається як $\sigma_{t_0}(t)dt$. При цьому було запропоноване співвідношення:

$$\sigma_{t_0}(t) = \begin{cases} \xi f(t - t_0), & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

де ξ - середня кількість подій, зумовлених основним поштовхом.

Веа-Джонс і Девіес [153] розглядали функцію виду $f(t) = (p - 1)c^{p-1} / (c + t)^p$. Ломніз і Нава [92] розглядали ξ пропорційною до

$M - M_r$, де M -магнітуда основного поштовху, M_r -залишкова магнітуда.

Д. Кендал [77] розглядав сейсмічні процеси як процеси народження та смерті, такі що для кожного процесу x який існує в момент t для наступного інтервалу $(t, t + dt)$ існує ймовірність народження $g(t)dt$ і смерті $h(t)dt$. А. Ховкс розглядав процеси народження з рівнем міграції μ в кожен момент часу які мають інтенсивність:

$$\lambda(t) = E[dN(t) | \text{history of } N(s) \text{ at time } t] / dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} \Pr[\text{ivent}(t, t + dt) | \text{history of } N(s) \text{ at time } t] = \mu + \sum_{t_i < t} g(t - t_i).$$

Цей процес також можна розглядати як процес кластеризації, в якому процес $N_c(t)$ моментів народження центрів кластерів є пуассонівським з параметром μ . З кожною подією $N_c(t)$ асоціюється кластер допоміжних подій, утворений нащадками, причому

$$\lambda_j(t) = E[dN_j(t) | \text{history of } N_m(s) \text{ for all } m \text{ at time } t] / dt = \mu_j + \sum_m \sum_{t_i^m < t} g_{im}(t - t_i^m) = \mu_j + \sum_m \int_0^t g_{im}(t - s) dN_m(s).$$

У найпростішому випадку $g_{im}(t) = c(m)g(t)$. С. Ломніз [92] розглядав випадок $\lambda(t) = \mu + \sum_{t_i < t} c(m_i)g(t - t_i)$, $g(t) = ae^{-\alpha t}$, Я. Огата - $g(t) = K / (t + c)^p$, Я.

Огата і Х. Акаїке - $g(t) = \sum_{k=1}^k a_k t^{k-1} e^{\alpha t}$. Я. Огата порівняв епідемічні та тригерні моделі, запропонував метод зміни часового масштабу і прийшов до висновку, що епідемічні моделі дають кращі результати на розглядуваних даних.

Автором ротаційної моделі сейсмічного процесу є А.В. Вікулін [194]. В основі цієї моделі лежить ідея про сейсмофокальний блок – частину земної кори, яка може обертається і створювати поля пружних напруг. Таким чином готується очаг землетрусу [155, 226, 193]. Для формалізації моделі припускають, що блоки мають приблизно однакові розміри та геометричну

форму. Кожен блок характеризується моментом інерції I та об'ємом V . Тоді рівняння для блоку, який повернувся на кут β , можна записати у вигляді:

$$I\beta'' = K_1 + K_2,$$

де K_1 -момент сили, що відповідає полю пружних напруг, яке виникає в результаті повертання Землі [155, 193], $K_1 = -6\pi w \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{4/3} \left(\frac{\rho G}{15}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$, $w = 7,29 \cdot 10^{-5}$ рад/с-швидкість повертання Землі навколо своєї осі, G -модуль зсуву, ρ -щільність верхніх слоїв Землі, K_2 -момент сили, що відповідає за взаємодію блоку з іншими сейсмо-фокальними блоками, $K_2 = \chi WV \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}$, z -координата вздовж ланцюжка, χ -безрозмірний коефіцієнт.

$$\text{З використанням заміни } \theta = \beta/2, K_0^2 = \frac{3\pi^2 w}{WV} (3V/4\pi)^{4/3} (\rho G/15)^{1/2},$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{WV} \text{ рівняння для блоку перепишеться у вигляді: } \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = K_0^2 \sin \theta.$$

А це відоме рівняння SIN-Гордона, яке має розв'язки виду:

$$\theta(z, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp(\pm K_0 \gamma (z - vt - z_0)), \gamma = [1 - v^2 / c^2]^{-1/2}, v, z_0 \text{-сталі.}$$

Обидва розв'язки описують локалізовану зміну кута від двох напрямків: $\theta = 0, \theta = 2\pi$. Відповідні розв'язки прийнято називати солітоном та антисолітоном. Окрім того, рівняння SIN-Гордона має розв'язки як комбінації солітона та антисолітона, які називаються бризерами а також N-солітонні розв'язки.

1.2 Математичні моделі, що описують процеси поширення відокремлених хвиль

1.2.1 Відокремлені хвилі в нелінійних дисипативних середовищах

Останнім часом при вивченні сейсмічних процесів теоретично та експериментально почали вивчатись аномальні локалізовані хвилі деформації [305, 85, 13]. Особливості їх виникнення можна пояснити в рамках

формалізму теорії пружності з мікроструктурою [215, 217, 218] а також в рамках класичної теорії анізотропного пружного тіла. Однак, роль відокремлених хвиль деформації як можливих “спускових механізмів” окремих поштовхів ще недостатньо вивчена.

Відомою є теорія D-хвиль, автором якої є Ш.А. Губерман. Згідно з цією теорією, землетруси виникають як результат проходження через області накопичення сейсмічної енергії особливих хвиль, що рухаються вздовж меридіанів Землі.

Математичні моделі, які описують поширення відокремлених хвиль, прийнято розділяти на два класи: інтегровані та неінтегровані за допомогою методу оберненої задачі розсіювання [161]. У багатьох роботах показано, що в інтегрованих моделях локалізовані хвилі ведуть себе подібно до частинок [161,205], при зіткненнях вони зберігають свої характеристики і має місце лише зсув фаз. Відповідний факт підтверджений у численних експериментах, в яких досліджувались хвилі в плазмі, рідина з бульбашками газу, стратифікована рідина а також електромагнітні хвилі. В той же час для систем, які не інтегруються за допомогою методу оберненої задачі розсіювання, має місце ряд інших ефектів, зокрема випромінювання цугів нелінійних хвиль, розщеплення окремих хвиль та утворення нових солітоноподібних хвиль, злиття кількох хвиль та утворення нової серії пружних відбивань. При зіткненнях солітоноподібні хвилі випромінюють частину своєї енергії, тобто має місце непружне зіткнення.

Відомо, що в основі досліджень хвильових процесів різноманітної природи лежить аналіз дисперсійних співвідношень [321]. За виглядом дисперсійного співвідношення легко можна побудувати диференціальне рівняння, що описує відповідний хвильовий процес. Нехай $u(x,t) = ae^{i(\omega t - kx)}$ - збурення, що описує хвилю, $P(\omega, k) = 0$ - відповідне дисперсійне співвідношення. Застосовуючи зворотне перетворення Фур'є [1], можна поставити у відповідність змінним ω, k диференціальні оператори виду:

$\omega \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial t}, k \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x}$. Тоді з дисперсійного співвідношення отримують диференціальне рівняння виду:

$$P\left(-i \frac{\partial}{\partial t}, i \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0.$$

Поширення лінійних хвиль у дисипативному середовищі [259, 260, 349] описується за допомогою дисперсійного співвідношення виду:

$w = w_r(k) + iw_i(k)$, де $w_r(k), w_i(k)$ - дійсні функції. До дисипації виду $w_i(k) = vk^2, v = const$ призводять такі фізичні процеси як в'язкість, дифузія, теплопровідність [321, 391, 255, 269]. При відсутності дисперсії дисперсійне співвідношення матиме вигляд: $w = ck + vk^2$. Звідси при переході у рухому систему відліку, що рухається з швидкістю c , одержується рівняння теплопровідності:

$$u_t = vu_{xx}, \quad (1.1)$$

або з врахуванням нелінійного доданку uu_x – рівняння Бюргерса:

$$u_t + uu_x = vu_{xx}. \quad (1.2)$$

У випадку, коли нелінійний та дисипативний доданки мають величину одного порядку, тобто $\frac{u^2}{2} \approx vu_x$, виникають стаціонарні хвилі, що зберігають свою форму та швидкість в процесі поширення [321].

Консервативне середовище з дисперсією в області високих частот розглядалось в роботах [186, 285]. У випадку граничної довжини хвилі (при малому k) відповідне дисперсійне співвідношення допускає розклад в ряд Тейлора: $w = ck - \beta k^3 + \dots$. Рівняння, що відповідає дисперсійному співвідношенню, яке враховує перші два члени розкладу, має вигляд:

$$u_t + cu_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (1.3)$$

Звідси можна отримати рівняння Кортевега де-Вріза (КдВ), розглядаючи рухому систему координат, що рухається зі швидкістю c :

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (1.4)$$

Це рівняння має розв'язок [84] виду :

$$u(x, y) = \frac{2\chi^2}{ch^2 \chi(x - 4\chi^2 t - \varphi)},$$

де χ -константа, що визначає параметри локалізації солітона та його швидкість, φ -параметр, що визначає точку відліку. Графік відповідної функції зображений на рис.1.1. За допомогою рівняння КдВ описується низка процесів в середовищах з слабкою дисперсією.

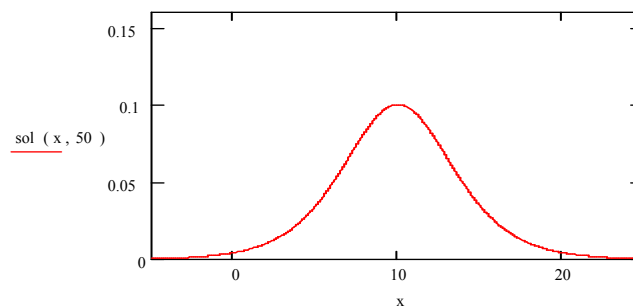


Рис.1.1.Солітонний розв'язок рівняння КдВ в момент часу $t=0$

Зокрема, це хвилі на мілкій воді, іонно-звукові хвилі, хвильові процеси при передачі сигналів у трансмембранному нервовому волокні, хвильові процеси у твердих тілах, зокрема хвилі у багатокомпонентних сумішах тіл, що деформуються, дислокаційні механізми пластичної течії в кристалах.

У випадку кубічної нелінійності, коли фазова швидкість хвилі залежить від u , в [305] розглядається дисперсійне співвідношення виду:

$$w = v_{ph} k = (c_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2) k.$$

Відповідне рівняння має вигляд :

$$u_t + c_0 u_x + \alpha_1 u u_x + \alpha_2 u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0.$$

Звідси за допомогою заміни $u' = \sqrt{\alpha_2} (u + \alpha_1 / 2\alpha_2)$ та переходу до системи координат, що рухається зі швидкістю $c_0 - \frac{\alpha_1}{4\alpha_2}$, отримують рівняння [321]:

$$u_t + (c_0 - \frac{\alpha_1}{4\alpha_2}) u_x + (u)^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0,$$

$$u_t + u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (1.5)$$

Рівняння (1.5) є модифікованим рівнянням КдВ. Специфіка рівняння КдВ полягає в тому, що воно допускає розв'язки, які моделюють процеси поширення хвиль лише в одному напрямі. Зауважимо, що Д.Й. Кортевег та Г. де Вріс [84, 323] отримали своє знамените рівняння у вигляді: $\frac{\partial h}{\partial t} - K_1 h \frac{\partial h}{\partial x} - K_2 \frac{\partial^3 h}{\partial^3 x} = 0$, де h - глибина довільної точки вільної поверхні, K_1, K_2 - деякі коефіцієнти, x - поздовжня координата цієї точки. Одним із стаціонарних розв'язків цього рівняння є самотня хвиля, причому форма її профілю отримана в роботі [84].

Узагальненням рівняння КдВ на системи, що допускають поширення у прямому та зворотньому напрямках, є рівняння Буссінеска [15] (його можна отримати піднісши до квадрату співвідношення (1.4) з врахуванням нелінійної складової $(uu_x)_x$):

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxxx} = 0. \quad (1.6)$$

При умові $k^2 > c/2\beta$ частота ω стає уявною, тобто виникає нестійкість. Ж. Буссінеск [15] і Релей [124] незалежно один від одного описали самотню хвилю та вивели формулу профілю її вільної поверхні з використанням квадрата гіперболічного секанса:

$$\eta = \frac{h}{h_1} = 1 + (Fr_1 - 1) \operatorname{sch}^2 \left(\sqrt{3(Fr_1 - 1)} \frac{x}{2h_1} \right), \quad (1.7)$$

де $Fr_1 = \frac{h_B}{h_1}$ - число Фруда, h_1 - перша спряжена глибина (початкова), h_B - глибина під вершиною самотньої хвилі.

Поряд з профілем (1.10) існує кілька десятків співвідношень, що описують профіль вільної поверхні самотньої хвилі [262, 344, 394, 337, 188, 263, 69, 389, 157, 376, 15, 124]. В процесі досліджень самотньої хвилі на воді отримано самотню хвилю з "хвостом", самотню хвилю з "відірваним хвостом" [402, 201, 220, 293, 81, 286, 87].

Питання про існування в природі таких хвиль довгий час залишалось відкритим (ці хвилі вперше описали Г.Д. Кортвег та Г. де Вріс). Точне доведення існування таких хвиль було дано М.О. Лаврент'євим в роботі [261]. Пізніше теорему про існування кноїдальних хвиль різними способами довели У.Літмен [282] і Н.Н.Моїсєєв та А.М. Тер-Криков [282]. В роботі [323] вказано, що співвідношення для вільної поверхні кноїдальної хвилі можна отримати не лише з рівняння Кортвега де-Вріза, але й з рівняння Серра кривої вільної поверхні білякритичних течій [137, 284, 276, 69].

Буссинеск [15] модифікував закон дисперсії і запропонував наступний:

$$w^2 = \frac{c^2 k^2}{1 + 2\beta k^2 / c}.$$

Звідси випливає лінійне хвильове рівняння $u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2\beta}{c} u_{xxxx} = 0$ та модифіковане рівняння Буссинеска:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \frac{2\beta}{c} u_{xxxx} = 0. \quad (1.8)$$

Середовище з низькочастотною дисперсією описано, зокрема, в [321] за допомогою дисперсійного співвідношення виду: $w^2 = w_0^2 + c^2 k^2$. Відповідне рівняння (Клейна –Гордона –Фока) : $u_{tt} - c^2 u_{xx} + w_0^2 u = 0$. Воно описує процеси поширення хвиль в середовищі, що моделюється ланцюжком осциляторів з власною частотою w_0 [349,312]. У випадку нелінійних осциляторів $w_0 = w_0(u)$ розглядають [321] нелінійне рівняння Клейна Гордона:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + F(u) = 0, \quad (1.9)$$

де $F(u)$ - деяка нелінійна функція. У випадку, коли $F(u) = w_0^2 \sin u$ (1.9) є відомим рівнянням Sin Гордона, яке відіграє важливу роль у багатьох галузях фізики, оскільки описує процеси дислокації в кристалах, рух доменних стінок у ферромагнетиках, хвилі в розподілених контактах Джозефсона, поширення ультракоротких лазерних імпульсів [204] та ін.

Для опису хвильових процесів в середовищі з дисипацією та дисперсією використовують [479, 321] рівняння Кортевега де-Вріза Бюргерса (КдВБ):

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx} \quad (1.10)$$

У випадку, коли дисперсійні та дисипативні доданки одного порядку, рівняння (1.10) має розв'язки у вигляді стаціонарних ударних хвиль з осцилюючим переднім фронтом, що нагадує послідовність солітонів.

У випадку поширення хвильових пакетів з вузьким спектром, зосередженим поблизу певної несучої частоти w_0 , в роботах [166,173,202] автори розглядають квазігармонічну хвилю з амплітудою, яка повільно змінюється та нелінійне дисперсійне співвідношення, у яке входить амплітуда хвилі:

$$u(x,t) = a(x,t) \exp(i(k_0 x - w_0 t)) + \gamma,$$

де γ - комплексно-спряжене, $w = w(k, |a|^2)$. При досить вузькому спектрі хвильового пакета ($|k - k_0| \ll k_0$) для дослідження представляє інтерес розклад функції $w = w(k, |a|^2)$ в ряд Тейлора в околі точки ($k = k_0; |a|^2 = 0$):

$$w = w_0 + \frac{\partial w}{\partial k} (k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial k^2} (k - k_0)^2 + \frac{\partial w}{\partial |a|^2} |a|^2 + \dots$$

З останнього співвідношення (якщо ввести частоту та хвильове число обвідної $\Omega = w - w_0, K = k - k_0$) випливає наступне дисперсійне співвідношення:

$$\Omega = v_g K + \frac{1}{2} w_0'' K^2 - \beta |a|^2. \quad (1.11)$$

де

$$v_g = \frac{\partial w}{\partial k}, \frac{\partial^2 w}{\partial k^2} = w_0'', \beta = -\frac{\partial w}{\partial |a|^2}, \quad (1.12)$$

а звідси – нелінійне рівняння Шредингера :

$$i(a_t + v_g a_x) + \frac{w_0''}{2} a_{xx} + \beta |a|^2 a = 0. \quad (1.13)$$

Рівняння Шредингера описує гравітаційні хвилі на поверхні глибокої води, ленгмюрівські хвилі у плазмі, електромагнітні хвилі в нелінійному діелектрику та багато інших процесів [204]. Аналогічно як і КдВ, рівняння Шредингера має розв'язки у вигляді солітонів, які називають солітонами обвідної. Накладаючи умову компенсації нелінійного та дисперсійного доданків $\frac{w_0'' a_{xx}}{2} \approx -\beta |a|^2 a$ та ввівши параметри солітона – амплітуду a_0 та характерну ширину Δ можна зробити висновок, що рівняння Шредингера має солітонні розв'язки можливі лише у випадку, коли знаки β, w_0'' співпадають ($\frac{w_0'' a_{xx}}{2\Delta^2} \approx \beta a_0^3$, тоді $\frac{2\beta a_0^2 \Delta^2}{w_0''} = const.$) Крім того, для солітонів рівняння Шредингера зростання амплітуди призводить до зменшення характерної ширини.

Дисперсійне співвідношення виду: $w = w_r(k, |a|^2) + iw_i(k, \nu)$, де ν - управляючий параметр, при якому у випадку $\nu < \nu_c$ $w_i(k, \nu) < 0$, розглядають [349] у випадку, коли середовища мають внутрішні джерела енергії. Відповідний ряд Тейлора в околі в околі точки $(k = k_c; \nu = \nu_c; |a|^2 = 0)$ має вигляд:

$$w = w_c + \frac{\partial w_r}{\partial k} (k - k_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_r}{\partial k^2} (k - k_c)^2 + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial k^2} (k - k_c)^2 + \frac{\partial w_r}{\partial |a|^2} |a|^2 + i \frac{\partial w_i}{\partial |a|^2} |a|^2 + \\ + i \frac{\partial w_i}{\partial \nu} (\nu - \nu_c) + \dots,$$

$$\text{де } w_c = w_r(k_c, 0), w_i(k_c, \nu) = \frac{\partial w_i}{\partial k} = 0.$$

Звідси було одержане рівняння Гінзбурга-Ландау, що є узагальнення НРШ на випадок активного середовища :

$$i(a_t + \nu_g a_x) + \beta a_{xx} + \gamma |a|^2 a = i\alpha a, \quad (1.14)$$

$$\text{де } v_g = \frac{\partial w_r}{\partial k}, \alpha = (v - v_c) \frac{\partial w_i}{\partial v}, \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_r^2}{\partial k^2} + i \frac{\partial w_i^2}{\partial k^2} \right), \gamma = - \left(\frac{\partial w_r}{\partial |a|^2} + i \frac{\partial w_i}{\partial |a|^2} \right),$$

$\Omega = w - w_0, K = k - k_0$ – частота та хвильове число обвідної .

Це рівняння вперше виникло в теорії надпровідності [255]. Також воно виникає при описі теплової конвекції Релея-Бенара [109], плоскої течії Пуазейля між двома паралельними площинами [143], течії Тейлора-Куетта між двома коаксіальними циліндрами, що повертаються [144], коливальних хімічних реакцій при наявності дифузії [88] та ін.

При взаємодії хвиль з додатньою та від'ємною енергіями з законами дисперсії $w = w_1(k), w = w_2(k)$ має місце співвідношення: $w_0 = w_1(k_0) = w_2(k_0)$. Відповідне лінійне хвильове рівняння для обвідної в [349, 312] одержане у

вигляді: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) a = \alpha^2 a$. Там же запропоновано його нелінійне

узагальнення: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) a = F(a)$, де нелінійна функція $F(a)$

описує ефекти насичення нестійкості. Звідси, у випадку слабкої нелінійності, коли $F(a) = \alpha^2 a - \beta |a|^2 a$ одержане рівняння Клейна-Гордона, яке, як відомо [257], описує гідродинамічну нестійкість Кельвіна-Гельмгольца, лазерні підсилювачі [273], електронний потік у схрещених електричному та магнітному статичних полях, що взаємодіють з статичною хвилею [259].

В роботі [321] розглянуто ще один характерний варіант закону дисперсії , а саме:

$$w = c_0 k - \beta k^3, \quad (1.15)$$

де $k^2 = k_1^2 + k_2^2, k_1, k_2$ - поздовжні та поперечні хвильові числа (зокрема, якщо вектори c_0, β мають лише поздовжні складові, направлені вздовж осі x , то рівняння (1.18) має вигляд : $w = c_0 k_1 - \beta k_1^3$,). Звідси, в результаті заміни

$\omega \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial t}, k_1 \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x}, k_2^2 = -\Delta_2$, де Δ_2 - оператор Лапласа, одержно

диференціальне рівняння, що відповідає закону дисперсії (1.15):

$$u_t + c_0 u_x + \beta u_{xxx} = -\beta(\Delta_2 u)_x.$$

Узагальнення його на нелінійний випадок дозволяє отримати неодномірний аналог рівняння Захарова-Кузнецова:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = -\beta(\Delta_2 u)_x. \quad (1.16)$$

Воно описує, наприклад, неодномірні іонно-звукові хвилі в намагніченій плазмі. У випадку $k_1 \ll k_2$ $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = k_1 \sqrt{1 + (k_2/k_1)^2} \approx k_1 + \frac{k_2^2}{2k_1}$. Тоді закон дисперсії має вигляд:

$$w \approx c_0(k_1 + k_2^2/2k_1) - \beta k_1^3 + \dots$$

Звідси випливає відповідне диференціальне рівняння:

$$(u_t + c_0 u_x + \beta u_{xxx})_x = \frac{c_0}{2} \Delta_2 u \quad \text{та його нелінійне узагальнення - рівняння}$$

Кадомцева-Петвіашвілі [232,302].:

$$(u_t + uu_x + \beta u_{xxx})_x = \frac{c_0}{2} \Delta_2 u. \quad (1.17)$$

Рівняння Кадомцева-Петвіашвілі зустрічається в ряді задач гідродинаміки та фізики плазми. Очевидно, що воно має розв'язки у вигляді плоских одномірних солітонів, які співпадають з розв'язками рівняння КдВ. Виявляється, що при аномальній дисперсії ($\beta < 0$) плоский солітон нестійкий і розпадається на двовимірні солітони, локалізовані як в x так і в y напрямках.

Для середовищ без дисперсії має місце узагальнення рівняння простої

$$\text{хвилі } (u_t + uu_x)_x = -\frac{c_0}{2} \Delta_2 u \quad \text{- рівняння Хохлова-Заблотської [219] та}$$

$$\text{неодномірне рівняння Бюргерса: } (u_t + uu_x - vuu_x)_x = -\frac{c_0}{2} \Delta_2 u, \quad \text{яке називають}$$

ще рівнянням Заблоцької-Хохлова-Кузнецова [256]. Ці рівняння

використовуються для опису нелінійної дифракції акустичних пучків.

У випадку, коли дисперсійне співвідношення є поліноміальним, можна отримати рівняння, яке описує як одиночні хвилі так і звичайні.

Нехай дисперсійне співвідношення має вигляд:

$$w = c(k)k, \quad (1.18)$$

$$\text{де } c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) e^{ik\xi} d\xi, \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk.$$

Тоді з використанням (1.18) та зворотнього перетворення Фур'є отримують інтегро-диференціальне рівняння виду:

$$u_t + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0. \quad (1.19)$$

Доповнюючи (1.19) нелінійними членами, отримують рівняння Уізема [388]:

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0. \quad (1.20)$$

У випадку, коли $c(k) = c_0 + c_2 k^2 + \dots + c_{2n} k^{2n}$:

$$K(x) = c_0 \delta(x) - c_2 \delta''(x) + \dots + (-1)^n c_{2n} \delta^{2n}(x),$$

де $\delta(x)$ - дельта-функція Дірака. Тоді (1.20) має вигляд:

$$u_t + c_0 u_x - c_2 u_{xxx} + \dots + (-1)^n c_{2n} \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} = 0.$$

В загальному випадку знайти ядро $K(x)$ в явному вигляді не вдається. Уізем запропонував таку апроксимацію ядра [388]:

$$K(x) = \frac{\pi}{4} \exp\left(-\frac{\pi |x|}{2}\right). \quad (1.21)$$

Рівняння (1.20) з ядром (1.21) більш адекватно описує властивості хвиль на поверхні води, ніж рівняння простої хвилі та КдВ окремо. Можна показати, що при виконанні умови

$$\min u_x(x, 0) + \max u_x(x, 0) \leq -\frac{\pi}{3} \quad (1.22)$$

початкове збурення у вигляді одиночного горба перевертається. Якщо (1.22) не виконується, то утворюються відокремлені хвилі.

Аналогічні співвідношення можна отримати і для дисипативних середовищ. Так в роботі [202] було запропоноване наступне узагальнення рівняння КдВБ:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = - \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u(\xi, t) d\xi. \quad (1.23)$$

Тут ядро $K(x)$ є Фур'є-образом уявної частини дисперсійного співвідношення:

$$w = w_r(k) + iw_i(k), \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_i(k) e^{ikx} dk.$$

У випадку $w_i(k) = \nu k^2$ рівняння (1.23) переходить у рівняння КдВБ.

Для опису профілю вільної поверхні рідини в умовах білякритичних течій окрім рівняння КдВ використовуються також рівняння Серра [137]:

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{6g}{q^2} \left(-\frac{h^3}{2} + Eh^2 + C_1 h + \frac{q^2}{2g} \right),$$

де M -функція імпульсу, E -питома енергія потоку та рівняння Сміслова [323]:

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{3g}{q^2} \left(-\frac{2h^3}{3} + Fh^2 - \frac{q^2}{g} \ln h + C_3 \right),$$

де q -питома витрата, g -прискорення вільного падіння, C_1, C_2, C_3 -константи.

Останніми роками розглядалась низка узагальнень рівняння КдВ,

зокрема: $u_t + (\alpha + \beta u^p) u^p u_x + \gamma u_{xxx} = 0$ ([86]);

$$u_t + \beta u u_x + u_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \text{ (п'ятого порядку [2]);}$$

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u u_{xxx} + \delta u_{xxxx} = 0 \text{ ([2]);}$$

$$u_t = u_{xxxx} + 10u u_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x \text{ ([12]);}$$

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = -\alpha u_{xx} - \beta u_{xxxx} \text{ (Курамото – Сивашинського - КдВ, [95]);}$$

$$u_t + u u_x + u_{xxx} - u_{xxxx} = 0 \text{ (Кавахари, [35]);}$$

$$u_t + \nu u u_x + \mu u_{xxx} + \alpha u_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \text{ ([2]);}$$

$$u_t + u u_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \text{ (КдВ-Бюргерса-Курамото, [79])}$$

та ряд інших.

Більшість експериментальних досліджень виконано безпосередньо з самотньою хвилею [127, 402, 293, 33,130]. У роботах [376,123] проводиться аналіз першої з групи хвиль переміщення. Нерухому хвилю, утворювану на водозливі з широким порогом, досліджували А.І. Шварц, Г.Й. Сухомел, В.В. Смыслов [336].

Фундаментальні дослідження самотніх хвиль в умовах біякритичних течій проведені О. А. Рябенком [322]. В експериментах, описаних в [322], така хвиля виникала саме при витіканні води з-під затвора. Зокрема, в ряді робіт [322] опубліковано як експериментальні результати, пов'язані з характером вільної поверхні біякритичної течії, так і теоретичні дослідження, зокрема побудовано математичну модель профілю вільної поверхні хвилеподібних біякритичних течій. Відповідне диференціальне рівняння має вигляд:

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3}{Fr_1} \left(\frac{h}{h_1} - 1\right)^2 \left(Fr_1 - \frac{h}{h_1}\right). \quad (1.24)$$

Детальне виведення цього рівняння здійснено з врахуванням рівнянь для питомої енергії потоку та функції імпульсу. Розв'язок цього рівняння, отриманий Рябенком О.А. [306], має вигляд:

$$h = h_1 + h_1(Fr_1 - 1)sch^2 \left(\sqrt{\frac{3(Fr_1 - 1)}{Fr_1}} \frac{x}{2h_1} \right). \quad (1.25)$$

Зауважимо, що саме в такій формі отримували формули для профілю самотньої хвилі Л. Ламб, Н.Н. Моєсєєв, А.М. Тер-Кіркоров, В.Г. Вереземський та В.Смыслов [262, 337, 188, 190].

В лабораторних умовах [302] було виявлено солітони Петвіашвілі та солітони-антициклони.

1.2.2 Моделі твердих тіл в рамках структурно-феноменологічного підходу.

Розглянемо моделі, які відносяться до так званого структурно-феноменологічного підходу опису середовища. Структурно-

феноменологічний підхід передбачає, що кожен фізично-малий об'єм, по якому проводиться усереднення властивостей середовища, містить в собі певні структурні елементи, деякі дискретні матеріальні мікрооб'єми, що мають додаткові властивості. Просторове положення j -того структурного елемента $\bar{X}^{(j)}$ визначається радіус-вектором центра мас $\bar{X}^{(j)}$ макрооб'єму та радіус-вектором, який характеризує положення структурного елемента відносно центра мас $\bar{\Theta}^{(j)}$: $\bar{X}^{(j)} = \bar{X} + \bar{\Theta}^{(j)}$. Для достатньо-малого макрооб'єму його рухи складаються з паралельного перенесення, повертання відносно центра мас та афінної деформації. При деформації переміщення j -того структурного елемента дорівнює $\bar{u}^{(j)} = \bar{u} + \hat{\Psi} \bar{\Theta}^{(j)}$, де \bar{u} - зміщення центра мас, $\hat{\Psi}$ -несиметричний тензор мікрозміщень. В 1909 році з'явилась теорія Е. та Ф. Коссера [30], у якій кожна матеріальна точка наділялась властивостями твердого тіля шляхом врахування ротаційних степенів свободи. В 1911 р. вийшла робота Леру [89], у якій матеріальна точка наділялась властивостями мікродеформації. На сьогодні відомо багато робіт, присвячених теорії некласичних континуумів, зокрема [169, 168, 230, 240, 251, 278, 110, 298, 324, 350, 30, 49, 59, 61, 89, 104, 105, 112, 113, 126, 147].

До структурно-феноменологічних можна віднести моделі багатокомпонентних сумішей твердих тіл [314, 320, 318, 317, 316, 319, 390, 8, 11, 9, 60, 64, 65, 72, 89, 139, 141, 140, 142, 145].

Динамічні процеси у твердих тілах з мікроструктурою вивчались за допомогою математичних моделей, у яких мікроструктура моделювалась дискретними елементами – інерційними, пружними, в'язкими (модельний підхід) а також за допомогою континуальних моделей, що враховували розсіювання пружних хвиль на неоднорідностях матеріалу [227, 229, 264, 267, 269, 270].

В.І.Єрофєєв виділяє три підходи до побудови математичних моделей, які враховують внутрішню структуру середовищ: структурно-феноменологічний, модельний та статистичний. Виділимо деякі з них, що

отримані в рамках структурно-феноменологічного підходу і передбачають існування одиночних хвиль, зокрема, континуум Леру, пошкоджене середовище з мікроструктурою (де розглядають магнітопружні хвилі), моделі двохкомпонентних сумішей, середовища з дислокаціями.

В континуумі Леру [215] враховується залежність енергії деформації від вищих градієнтів вектора переміщень. Рівняння динаміки такого середовища в термінах переміщень мають вигляд:

$$\rho \bar{u}'' - (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} - \mu \Delta \bar{u} + 4\mu M^2 \text{sign} M \Delta (\Delta \bar{u} + \tilde{v} \text{grad div } \bar{u}) = \bar{f} + \bar{q}, \quad (1.26)$$

де \bar{f}, \bar{q} - вектори, що містять похідні компонент зміщень квадратичного та кубічного характеру відповідно, вирази для яких можна знайти, наприклад, у роботі [215]. З застосуванням методу "біжучої хвилі" з (1.26) отримано рівняння:

$$U_{\xi\xi} + m_1 U + m_2 U^2 = d, \quad (1.27)$$

де $U = \frac{du}{d\xi}$ - поздовжня деформація, $m_1 = \frac{V^2 - 1}{\beta}$, $m_2 = -\frac{\alpha}{2\beta}$, d - стала інтегрування.

Розв'язок рівняння (1.27), як відомо [403], записується через еліптичний синус Якобі :

$$U(\xi) = -\frac{m_1}{2m_2} + a \frac{1+s^2}{3s^2} - A \text{sn}^2(k\xi, s), \quad (1.28)$$

де a - амплітуда стаціонарної хвилі, s - модуль еліптичної функції, що характеризує ступінь нелінійності викривлень, $0 \leq s^2 \leq 1$. Співвідношення (1.28) описує два типи хвиль [215]: дозвуковий ($V < 1$) солітон деформації

$$U(\xi) = a_c / ch^2(\xi / \Delta), \quad \text{де } a_c = -\frac{3(1-V^2)}{\alpha} \text{ - амплітуда солітона, } \Delta = \frac{1}{k} = \frac{-12\beta}{\alpha a_c} \text{ -}$$

ширина солітона та надзвукову періодичну хвилю. Поклавши у ньому $\bar{u} = (0, v(t, x), 0)$ (поперечна хвиля) та перейшовши до безрозмірних змінних шляхом заміни $v = u_2 / \varepsilon_0 \Lambda d$, $x = x_1 / \Lambda d$, $t' = c_\tau t / \Lambda d$, де $c_\tau = \sqrt{\mu / \rho}$ - характерна

швидкість розповсюдження зсувних хвиль в матеріалі, d - середній діаметр зерна чи середня товщина армуючого елемента де $\varepsilon_0 \approx 10^{-4} - 10^{-5}$ - характерна величина пружних деформацій, Λ - безрозмірний масштаб хвилі, d - довжина хвилі в роботі [208] отримують рівняння :

$$v_{tt} - v_{xx} + \beta u_{xxxx} = \alpha (u_x)^2 u_{xx}, \quad (1.29)$$

де $\beta = 4M^2 \text{sign} M / \Lambda^2 d^2$, $\alpha = 9\varepsilon_0^2 (\lambda/2 + \mu + A/2 + B + J) / \mu$ - малі параметри, що характеризують дисперсію та нелінійність середовища відповідно. Рівняння (1.29) з застосуванням методу “біжучої” хвилі та заміни $\xi = x - Vt$ записується як рівняння Дуффінга [215]:

$$W_{\xi\xi} + m_1 W + m_2 W^3 = 0. \quad (1.30)$$

Рівняння (1.30) має розв’язки у вигляді стаціонарної одиночної хвилі:

$c = 0, W = a \operatorname{sech}(\xi / \Delta), a = \sqrt{-2m_1 / m_2}, \Delta = \sqrt{-1 / m_1}$. Також відомий розв’язок [215], що має характер кінка: $c = 0, W = a \operatorname{th}(\xi / \Delta), a = \sqrt{-2m_1 / m_2}, \Delta = \sqrt{2 / m_1}$.

Для матеріалів з від’ємною дисперсією ($\beta < 0$) нелінійні стаціонарні хвилі можуть бути лише дозвукові ($V < 1$). Можливе існування як періодичних так і одиночних хвиль [52]. Якщо зобразити фазовий портрет рівняння, то солітонний розв’язок відповідає сепаратрисі, що проходить через початок координат ($c = 0$) та відділяє одну область періодичних розв’язків ($c < 0$) від іншої ($c > 0$).

Для матеріалів з додатньою дисперсією ($\beta > 0$) нелінійні стаціонарні хвилі можуть існувати як дозвукові ($V < 1$) так і надзвукові стаціонарні хвилі. Можливе існування як періодичних так і одиночних хвиль [52]. При $|V| < 1$ рівняння Дуффінга має розв’язок у вигляді стаціонарної хвилі-солітона [52].

Модель *пошкодженого середовища* з мікроструктурою розглядалась, зокрема, в [52]. Ця модель особливо цікава в світлі можливості прогнозування сейсмічних процесів [305]. Специфікою такого середовища є те, що воно містить включення, відстань між якими набагато більша за самі включення.

Область Ω , яку займає середовище, розбивають на неперетинні комірки, кожна з яких містить одне включення. Поле зміщень представляється у вигляді $u_i = v_i + \varphi_i$, де φ_i -повільно змінне поле зміщень, v_i -зміщення однієї комірки. Зміщення v_i однієї комірки зв'язано з зовнішнім полем деформації,

що має сталі інваріанти $I_1^0 = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, $I_2^0 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right)^2$.

Відповідне середовище характеризується функціоналом дії виду:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left(\frac{\rho_0}{2} u_i'^2 - \frac{\lambda}{2} I_1^2 - \mu I_2 + \theta I_1 \sqrt{I_2} - 2\mu M^2 (\chi_{klm}^2 + \tilde{v} \chi_{klm}) \right) d^3x, \quad (1.31)$$

де $\chi_{klm} = -\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m}$ - градієнт мікродисторсії, λ, μ -константи Ламе, ρ_0 -густина

середовища, виведення якого можна знайти в роботах [271, 275].

Розглядаючи поздовжню хвилю, яка рухається вздовж осі $x = x_1$, $u_1 = u \neq 0, u_2 = u_3 = 0$ за умов одноосного деформованого стану, коли компоненти тензора деформацій нульові за виключенням $\varepsilon_{22} = \varepsilon \neq 0$ з умови екстремуму функціоналу (1.32) отримують рівняння динаміки пошкодженого середовища:

$$u_{tt} - c_l^2 u_{xx} + \frac{v}{\rho_0} \left(\frac{3u_x u_{xx} + \varepsilon u_{xx}}{\sqrt{\varepsilon^2 + u_x^2}} - \frac{(3 + u_x) u_x^2 u_{xx}}{(\varepsilon^2 + u_x^2)^{3/2}} \right) \beta u_{xxxx} + 4c_\tau^2 M^2 \text{sign} M (1 + \tilde{v}) u_{xxxx} = 0. \quad (1.32)$$

За допомогою розкладу знаменників в ряди Тейлора при умові $u_x / \varepsilon < 1$ (початкова деформація більша за поздовжню, що виникає при поширенні хвилі) з (1.33) можна отримати рівняння:

$$u_{tt} - \left(c_l^2 - \frac{v}{\rho_0} \right) u_{xx} + \frac{3v}{\rho_0 \varepsilon} u_x u_{xx} + 4c_\tau^2 M^2 \text{sign} M (1 + \tilde{v}) u_{xxxx} = 0. \quad (1.33)$$

Рівняння (1.33) є аналогом (1.29), що має солітонні розв'язки.

Солітонні розв'язки має система рівнянь динаміки магніто-пружних хвиль в середовищі з мікроструктурою [52], яка має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{lk} - \frac{\partial}{\partial x_m} \mu_{kim}) u_{xx} + \frac{1}{4\pi\rho} [\text{rot}\bar{H}, \bar{H}]_i, \\ \frac{\partial H_i}{\partial t} &= \text{rot}_i \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \bar{H} \right], \\ \text{div}\bar{H} &= 0,\end{aligned}\tag{1.34}$$

де ρ -густина матеріалу, τ_{ik} -тензор напруг, μ_{kim} -тензор мікронапруг. Такі хвилі виникають при взаємодії деформаційних та електромагнітних полів. Дослідження відповідних динамічних процесів пов'язане з численними практичними додатками, серед яких штамповка та зварювання металічних конструкцій магнітоімпульсним способом, магнітоакустичний розігрів матеріалів [162,237], проблеми дефектоскопії [399]. Зокрема, у випадку поздовжніх магнітопружних хвиль ($\bar{u} = (u_1(\xi), 0, 0)$, $\bar{h} = (0, 0, h_3(\xi))$, $\xi = x_1 - Vt, V = \text{const}$) і коли збурене магнітне поле та пружня деформація

$U = du_1 / d\xi$ зв'язані співвідношенням: $h_3 = -\frac{H_0 U}{1+U}$, система (1.34) запишеться

у вигляді:

$$(V^2 - c_i^2)U - \frac{g_2}{2\rho} U^2 + 4c_\tau^2 M^2 \text{sign}M (1 + \tilde{\nu}) \frac{d^2 U}{d\xi^2} + \frac{1}{4\pi\rho} \left[\frac{1}{2} \frac{H_0^2 U^2}{(1+U)^2} - \frac{H_0^2 U}{1+U} \right] = d,$$

де $c_i = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$, $c_\tau = \sqrt{\mu / \rho}$ -швидкість поздовжньої та поперечної хвилі при відсутності мікроструктури ($M = 0$), $g_2 = 3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)$ -коефіцієнт квадратичної пружної нелінійності, d -стала інтегрування. Звідси за умови малості пружних деформацій $U \ll 1$ (розкладаючи в ряд Тейлора два останніх доданка рівняння (1.34)) отримують:

$$U_{\xi\xi} + aU + bU^2 = 0,\tag{1.35}$$

де $a = \frac{(V^2 - c_i^2 - c_A^2)}{4c_\tau^2 M^2 (1 + \tilde{\nu}) \text{sign}M}$, $b = \frac{(3c_A^2 - g_2 / \rho)}{8c_\tau^2 M^2 (1 + \tilde{\nu}) \text{sign}M}$, $c_A = \sqrt{\frac{H_0^2}{4\pi\rho}}$ - швидкість

хвилі Альфвена [215,249]. Розв'язок рівняння (1.35) записується через еліптичний синус Якобі [403]:

$$U(\xi) = -\frac{a}{2b} + \tilde{a} \frac{1+s^2}{3s^2} - A \operatorname{sn}^2(k\xi, s), \quad (1.36)$$

де \tilde{a} - амплітуда стаціонарної хвилі, s - модуль еліптичної функції, що характеризує степінь нелінійності викривлень, $0 \leq s^2 \leq 1$.

Для матеріалів з додатньою дисперсією ($M^2 \operatorname{sign} M > 0$) існують дозвукові солітони деформації [9,12,17,18]: $U(\xi) = \frac{U_0}{ch^2(\xi/\Delta)}$, де

$$U_0 = \frac{3(V^2 - c_i^2 - c_A^2)}{2(3c_A^2 - g_2/\rho)}, \Delta = \sqrt{\frac{64c_\tau^2 M^2 (1 + \tilde{v})}{-(V^2 - c_i^2 - c_A^2)}}. \text{ Бачимо, що амплітуда солітона } U_0$$

монотонно зростає, а ширина Δ прямує до 0 при зростанні напруженості зовнішнього постійного магнітного поля H_0 . Надзвукові хвилі $|V| < \sqrt{c_i^2 + c_A^2}$ для матеріалів з від'ємною дисперсією є солітонами, їх швидкість V ,

амплітуда U_0 ширина Δ пов'язані співвідношеннями: $U_0 = \frac{3(V^2 - c_i^2 - c_A^2)}{2(3c_A^2 - g_2/\rho)}$,

$\Delta = \sqrt{\frac{64c_\tau^2 M^2 (1 + \tilde{v})}{-(V^2 - c_i^2 - c_A^2)}}$. З останнього співвідношення випливає, що надзвукові

нелінійні хвилі демонструють аномальну поведінку-зменшення амплітуди та зростання довжини хвилі при зростанні напруженості магнітного поля.

Еволюція плоскої *магнітопружної хвилі* [216] описується рівнянням:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (c_\tau^2 - c_A^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 4c_\tau^2 M^2 \operatorname{sign} M \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} = \frac{g_3}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 \right], \quad (1.37)$$

де $v(x_1, t)$ - поперечна компонента вектора переміщень,

$g_3 = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu + A + B + 2J)$ - коефіцієнт кубічної пружної нелінійності.

Звідси отримують рівняння Дуффінга:

$$W_{\xi\xi} + aW + bW^3 = 0. \quad (1.38)$$

Одиночна хвиля описується функцією виду:

$$W = W_0 \operatorname{th}(\xi/\Delta), W_0 = \sqrt{-a/b}, \Delta = \sqrt{2/a}.$$

Динаміка континууму Коссера з обмеженим обертанням (псевдоконтинуум) описується векторним рівнянням [51]:

$$\rho \bar{u}'' - (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} - \mu \Delta \bar{u} - \frac{I}{4} (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \Delta \bar{u} + \frac{I}{4} (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \bar{u}'' = \bar{F}_2 + \bar{F}_3. \quad (1.39)$$

Плоскі поздовжні хвилі, як і у класичному середовищі, не мають дисперсії.

Плоскі зсувні хвилі, що поширюються в напрямку x_1 описуються рівнянням:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_\tau^2 \left(1 + \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - r^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) = 0, \quad (1.40)$$

де $\alpha = \frac{3}{2} \left(\frac{c_1}{c_\tau} \right)^2$, $r^2 = I/4\rho$, -параметри, що характеризують нелінійність та

дисперсію середовища, $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\gamma + \varepsilon/I}$ -швидкості зсувних хвиль та повертання відповідно. Це рівняння отримується з (1.39) при $\bar{u} = (0, v(x_1, t), 0)$.

З рівняння (1.40) випливає рівняння Дуффінга:

$$U_{\xi\xi} + aU + bU^2 = C_1, \quad (1.41)$$

де $a = \frac{(V^2 - 1)}{c^2 - V^2}$, $b = \frac{1}{3(V^2 - c^2)}$, C_1 -константа інтегрування. Відповідні хвилі

при $0 < V < c$ описуються за допомогою співвідношення:

$$U(x - Vt) = A \text{sn}(k(x - Vt), s), \quad (1.42)$$

в якому $A(V, s) = \sqrt{\frac{6s^2}{1+s^2}(1-V^2)}$, $V(k, s) = \sqrt{\frac{1+(1+s^2)c^2k^2}{1+(1+s^2)k^2}}$. При цьому

відокремлені хвилі виникають при $s = 1$ та описуються виразом:

$$U(x - Vt) = A \text{th}((x - Vt)/\Delta),$$

в якому $A(V) = \sqrt{3(V^2 - 1)}$, $\Delta = \sqrt{2 \frac{c^2 - V^2}{V^2 - 1}}$. Останні співвідношення підтверд-

жують, що швидкість солітона зростає при зростанні амплітуди до значення $V = c$. Характер відокремленої хвилі в цьому випадку не відрізняється від поведінки класичних солітонів, що описуються, наприклад, мКдВ.

При умові $V > c$ виникають сильно-нелінійні хвилі. Відокремлена хвиля в цьому випадку є граничним випадком двох нелінійних хвиль і описується співвідношенням: $U(x - Vt) = A/ch((x - Vt)/\Delta)$, де

$$A(V) = \sqrt{6(V^2 - 1)}, \Delta = \sqrt{\frac{V^2 - c^2}{V^2 - 1}} = \sqrt{1 - 6\frac{c^2 - 1}{A}}.$$

Швидкість в такій хвилі зростає з ростом амплітуди, а ширина хвилі практично не змінюється, наближаючись до 1. Співвідношення для енергії можна знайти в роботі [52]. В роботі [233] показано, що цікавою особливістю взаємодії таких хвиль є їх нестабільність. При умові $\Delta > 0.96$ при взаємодії такі хвилі розщеплюються, породжуючи другорядні відокремлені хвилі та квазілінійний хвильовий пакет. При $\Delta < 0.96$ різнополярні хвилі взаємодіють між собою непружно, частина їх енергії звільняється та випромінюється у вигляді пакетів квазігармонічних хвиль.

Хвилі у *двохкомпонентній суміші тїл*, що деформуються, розглядалися в роботах [60, 145, 317, 390]. Основні гіпотези теорії двохкомпонентних сумішей були сформульовані А.Грінном та Т.Стїлом [60]. Кожна точка області, заповнена сумішшю, одночасно занята обома компонентами, між якими проходить взаємний рух. Деформований стан кожного континууму визначається парціальними тензорами деформації $\varepsilon_{ij}^{1,2}$ та обертань $R_{ij}^{1,2}$. При русї суміші відбувається не лише деформування окремих континуумів, але і їх взаємне зміщення. Таке зміщення визначається компонентами вектора відносних переміщень $u_k^{(1)} - u_k^{(2)}$ (зсувна модель суміші), відносних швидкостей $\frac{\partial}{\partial t} u_k^{(1)} - \frac{\partial}{\partial t} u_k^{(2)}$ (дифузійна модель суміші) чи компонентами вектора відносних прискорень $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_k^{(1)} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_k^{(2)}$ (інерційна модель суміші).

Динаміка двохкомпонентної зсувної суміші описується рівнянням:

$$\begin{aligned} & \rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_i^{(\alpha)}}{\partial t^2} - \mu_{\alpha} \frac{\partial^2 u_i^{(\alpha)}}{\partial x_k^2} - (\lambda_{\alpha} + \mu_{\alpha}) \frac{\partial^2 u_i^{(\alpha)}}{\partial x_l \partial x_i} - \mu_{\delta} \frac{\partial^2 u_i^{(\delta)}}{\partial x_k^2} - \\ & - (\lambda_{\delta} + \mu_{\delta}) \frac{\partial^2 u_i^{(\delta)}}{\partial x_l \partial x_i} - \beta(u_i^{\alpha} - u_i^{\delta}) = F_i^{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

де $F_i^{(\alpha)}$ - деякі нелінійні складові, вигляд яких можна знайти, наприклад, в [52].

Якщо розглянути плоску хвилю, що поширюється вздовж осі $x_1 = x$, то рівняння (1.43) перепишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - c_1 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\beta}{\rho_1} u^{(1)} - c_{31}^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\beta}{\rho_1} u^{(2)} = \frac{N_1^{(1)}}{\rho_1} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}, \\ & \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - c_1 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\beta}{\rho_2} u^{(2)} - c_{32}^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\beta}{\rho_2} u^{(1)} = \frac{N_1^{(1)}}{\rho_1} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1.44)$$

де $N_1^{(1)}$ - коефіцієнт нелінійності, $c_i = \sqrt{(\lambda_i + 2\mu_i)/\rho_i}$, $c_{3i} = \sqrt{(\lambda_3 + 2\mu_3)/\rho_i}$.

Зауважимо, що для подальшого дослідження в ряді робіт робиться перехід до еволюційних рівнянь, який можна зробити методом зв'язаних нормальних хвиль [291]. Система (1.44) зводиться до такої системи:

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial W_1}{\partial t} + a_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + a_2 W_1 = b_1 (W_1 + W_2 + W_3 + W_4)^2, \\ & W_2 = \bar{W}_1, \\ & \frac{\partial W_{3,4}}{\partial t} \pm c_2 \frac{\partial W_{3,4}}{\partial x} \pm g \frac{\partial^3 W_{3,4}}{\partial x^3} = \mp b_2 \frac{\partial}{\partial x} (W_1 + W_2 + W_3 + W_4)^2, \end{aligned} \quad (1.45)$$

де

$$a_1 = -\frac{c_1^2}{2} \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{-\beta(\rho_1 + \rho_2)}}, a_2 = -\sqrt{\frac{-\beta(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2}}, g = \frac{-\rho_1 \rho_2 \left(\frac{c_1^2 - c_2^2}{4} + c_{31}^2 c_{32}^2 \right)}{2\beta(\rho_1 + \rho_2)c_2},$$

$$u^{(1)} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4, u^{(2)} = f_1(W_j), \quad \frac{\partial}{\partial t} u^{(1)} = f_2(W_j) \quad \frac{\partial}{\partial t} u^{(2)} = f_3(W_j),$$

функції f_j а також коефіцієнти при нелінійних доданках можна знайти в роботі [291].

З (1.45) випливає, що одна з дисперсійних віток для поздовжніх хвиль описується рівнянням КдВ, а інша - Шредингера. Нехай хвиля біжить у додатньому напрямку вздовж осі x , $W = W_3, W_1 = W_2 = W_4 = 0$. Тоді з (1.45) випливає рівняння КдВ:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + c_2 \frac{\partial W}{\partial x} + g \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + b_2 \frac{\partial}{\partial x} (W)^2, \quad (1.46)$$

яке має розв'язки у вигляді біжучих стаціонарних хвиль.

Рівняння динаміки середовища з дислокаціями описується системою з 16 лінійних диференціальних рівнянь, яку можна знайти в роботі [52]. Для поздовжніх хвиль отримують рівняння, що описує пружню дисторсію:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + lD + n_1 D^2 - n_2 \frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} = 0, \quad (1.47)$$

де $l = \frac{\Delta^2 \rho}{B}$ - параметр, що характеризує дисперсію, а $n_1 = \frac{\beta_0 \Delta^2 \rho}{B}, n_2 = \beta_0$ -

параметри, що характеризують нелінійності. Можна підібрати такі значення параметрів, що коефіцієнтом n_2 можна знехтувати. Тоді отримують рівняння:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + lD + n_1 D^2 = 0, \quad (1.48)$$

яке має розв'язок у вигляді солітона пружньої дисторсії при $V < 1$.

В роботі [166] представлена нелінійна теорія пружніх та непружніх деформацій для кристалів, що мають складну кристалічну решітку. Зокрема, розглянуто кілька підрешіток, які зливаються в одну зсувом на постійний структурний вектор \bar{u}_0 . Нехай \bar{U} - зміщення центра інерції елементарної комірки, що являє собою пару атомів та \bar{u} - відносне зміщення атомів всередині комірки. Для одномірного однокомпонентного випадку закон руху такий: $U_i \rightarrow U(x, t), u_i \rightarrow u(x, t)$. Математична модель являє собою систему двох рівнянь відносно акустичних мікрозміщень $U(x, t)$ та оптичних мікрозміщень $u(x, t)$:

$$\rho \ddot{U} = \lambda U_{xx} - [s(1 - \cos u)]_x, \quad (1.49)$$

$$\mu \ddot{u} = k u_{xx} - (\rho - s U_x) \sin u,$$

де ρ - середня густина мас атомів, μ - густина приведених мас атомів, λ, k - мікроскопічні модулі, s - коефіцієнт нелінійної стрикції-перебудови мікроструктури під дією макроскопічних деформацій, $2p$ - міжатомний потенціальний бар'єр в недеформованій решітці (енергія активації атомних зв'язків в елементарній комірці).

Ці рівняння отримані вперше в роботі [179]. З використанням заміни $q = x - Vt$ (1.49) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \lambda(1 - V^2/V_s^2)U_{qq} &= [s(1 - \cos u)]_q, \\ k(1 - V^2/V_k^2)u_{qq} &= (\rho - sU_q)\sin u, \end{aligned} \quad (1.50)$$

де $V_s^2 = \lambda/\mu, V_k^2 = k/\mu$.

Звідси отримується рівняння для оптичної моди:

$$l_0^2 p(1 - V^2/V_k^2)u_{qq} = p_1 \sin u + p_2 \sin u \cos u, \quad (1.51)$$

де $p_1 = \rho - s \frac{s + \sigma}{\lambda(1 - V^2/V_s^2)}, p_2 = \frac{s^2}{\lambda(1 - V^2/V_s^2)}, l_0^2 = k/p$. Рівняння (1.51) є

узагальненням рівняння SIN-Гордона. Рівняння (1.50)-(1.51) мають розв'язки у вигляді нелінійних періодичних хвиль, кінків та солітонів. Умови виникнення відокремлених хвиль розглянуті в роботі [52]. Розв'язки рівняння (1.51) мають вигляд:

$$u = \pm 2 \arctg(ach\zeta), \quad (1.52)$$

$\zeta = (q - q_0)/L, V < V_s, a = p_1/(p_2 - p_1), \tilde{l}_0^2/L^2 = p_2 - p_1, \tilde{l}_0^2 = (k/p)(1 - V^2/V_k^2)$.

1.2.3 Моделі типу мілкої води

Рівняння типу мілкої води мають важливе практичне значення, оскільки описують великомасштабні атмосферні та океанічні течії, зокрема, в середніх широтах. В декартових координатах вони мають вигляд [397]:

$$\begin{aligned}
u_t + uu_x + vu_y + gh_x &= fv, \\
v_t + uv_x + vv_y + gh_y &= -fu, \\
h_t + (uh)_x + (vh)_y &= 0,
\end{aligned}
\tag{1.53}$$

де u, v компоненти вектора швидкості, h – глибина шару рідини над рівним дном; f – параметр Коріоліса (частота повертання), g – прискорення вільного падіння. Наближена модель (1.53) отримується з рівнянь Ейлера [300] ідеальної рідини при таких припущеннях: відношення характерного вертикального масштабу течії до характерних горизонтальних масштабів набагато менше за 1; густина рідини стала; тиск в рідині гідростатичний по глибині; вісь обертання співпадає з вертикальною віссю z . Узагальнення відповідної системи з врахуванням в'язкості в дивергентній формі наведене в роботі [214]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hU) &= 0, \\
\frac{\partial hU}{\partial t} + U\operatorname{div}(hU) + (hU\nabla)U + \nabla\left(\frac{gh^2}{2}\right) &= \operatorname{div}\Pi_{NS} + hF - gh\nabla b,
\end{aligned}
\tag{1.54}$$

де $h(x, y, t)$ – висота рідини, $U = (u, v)$ – вектор швидкості, Π_{NS} – тензор в'язких напруг Нав'є-Стокса, F – вектор компонент зовнішньої сили, $b(x, y)$ – профіль дна, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)^T$. Відповідну систему можна записати в полярній системі

координат. Вона матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rhu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi)}{\partial \varphi} &= 0, \\
\frac{\partial hu_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rhu_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} &= \\
= h \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, &
\end{aligned}
\tag{1.55}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h u_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 h u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(h u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{g h^2}{2} \right) = \\ & = h \left(f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi}, \end{aligned}$$

де $h(r, \varphi, t)$ - висота рідини, $U = (u_r(r, \varphi, t), u_\varphi(r, \varphi, t))$ - вектор швидкості, Π_{NS} - тензор в'язких напруг Нав'є-Стокса, f_r, f_φ - компоненти зовнішньої сили, $b(r, \varphi)$ - профіль дна, μ - фізична в'язкість,

$$\Pi_{rr} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \Pi_{\varphi\varphi} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \quad \Pi_{r\varphi} = \Pi_{\varphi r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \quad (1.56)$$

Відзначимо, що рівняння мілкої води, як правило, розв'язуються чисельними методами через значні труднощі у отриманні аналітичних розв'язків.

Для чисельних розв'язків рівнянь мілкої води використовують різноманітні підходи, зокрема квазігазодинамічний (КГД) підхід [214] або регуляризований їх запис. Для розв'язку таких систем можна використовувати явну по часу різницеву схему з центральними різницями. Суть КГД підходу полягає в тому, що гідродинамічні змінні усереднюються на відрізок $(t, t + \Delta t)$, при цьому середні значення розкладаються в ряд Тейлора та ігноруються члени другого порядку малості. При цьому, наприклад, h замінюється на $h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}$, u_r на $u_r + \tau \frac{\partial u_r}{\partial t}$ і т.д. Тоді можна отримати КГД рівняння мілкої води. При $\tau = 0$ регуляризована система перетворюється у вихідну. Відповідну різницеву схему можна знайти в роботі [214].

Чисельні методи розв'язку рівнянь типу мілкої води показують, що існують розв'язки, що моделюють відокремлені хвилі, зокрема, кругові хвилі типу цунамі.

Система рівнянь мілкої води легко може бути узагальнена на випадок течії політропного газу, який розглядається в баротропному наближенні,

якщо зробити формальну заміну змінних h та $\frac{gh^2}{2}$ на ρ та $\rho^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$ відповідно, де γ – показник адіабати. Рух в'язкого газу, що стискається, зручно досліджувати саме в полярній системі координат. До таких задач можна віднести низку прикладних інженерних задач та задач геофізики, зокрема вивчення атмосферних явищ в планетарному масштабі, дослідження астрофізичних об'єктів, що пов'язані з рухом матерії навколо притягуючого центру [195], зокрема газових дисків галактик.

В роботі [393] , зокрема, розглядалось лінеаризоване рівняння для збурень в гравітуючому газовому диску у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\chi^2}{2\Omega_0} u &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (c_{g0}^2 \eta), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - 2\Omega_0 v &= -\frac{\partial}{\partial r} (c_{g0}^2 \eta), \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} + (1 + r \ln' \sigma_0) \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0,$$

де $c_{g0}^2 = \frac{dp_0}{d\sigma_0} - \frac{2\pi G \sigma_0}{|k| R_g}$, $\eta = \frac{\sigma}{\sigma_0}$, $\chi^2 = 4\Omega_0^2 (1 + \frac{r \Omega_0'}{2\Omega_0})$, $R_g \approx (1 + \frac{|k|h}{2})$, штрих

означає диференціювання по r , σ -поверхнева щільність, k - хвильовий вектор, h - півтовщина газового диску. Якщо в системі замінити c_{g0}^2 на gH_0 та

η на $\frac{H}{H_0}$, де $H = h - H_0$ можна отримати систему лінеаризованих рівнянь

мілкої води, що повертається .

Зауважимо, що для аналізу рівнянь типу мілкої води останніми роками застосовувались методи теорії груп [297,14,397] . Зокрема, за допомогою методів групового аналізу побудовано алгебру Лі у випадку відсутності повертання, в роботі [14] побудована система підалгебр, що містить 179 представників. На основі відповідної алгебри побудовані періодичні по часу точні розв'язки, які можна інтерпретувати як пульсації рідини під дією сили

тяжіння чи Коріоліса. Однак на сьогодні відсутні аналітичні методи для знаходження розв'язків, які моделюють процеси поширення відокремлених хвиль.

1.3 Методи моделювання солітонів

1.3.1 Метод оберненої задачі розсіювання

Як відомо [216, 223,224], метод оберненої задачі розсіювання, полягає у представленні вихідного диференціальне рівняння $\hat{F}u(x,t) = 0$, де \hat{F} - диференціальний оператор у вигляді системи (яка містить рівняння Шредингера та рівняння з деяким диференціальним оператором, який “зберігає” власні функції оператора Шредингера):

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi, \quad (1.58)$$

$$\psi_t = \hat{A}\psi, \quad (1.59)$$

$$\hat{L} = -(\hat{D}^2 + u(x,t)), \quad (1.60)$$

де $\hat{D} = \frac{\partial}{\partial x}$, \hat{A} -деякий лінійний диференціальний оператор (для рівняння КдВ , наприклад, оператор \hat{A} має вигляд: $\hat{A} = -4\hat{D}^3 - 3u_x - 6u\hat{D} + C$). Зокрема, якщо λ_n - дискретне власне значення оператора Шредингера, ψ_n -відповідна йому власна функція, то з рівняння (1.59) отримують:

$$(\psi_n)_t + (\psi_n)_{xxx} - 3(\lambda_n - u)(\psi_n)_x = A_n\psi_n, \quad (1.61)$$

де A_n -стала інтегрування. Якщо $\psi_n(t) = c_n(t)e^{-k_n x}$ при $x \rightarrow \infty$, де $k_n^2 = -\lambda_n$, то, після підстановки у (1.61), одержимо : $A_n = 4k_n^3$, $(c_n)_t = 8k_n^3 c_n$.

Звідси

$$c_n(t) = c_n(0)e^{8k_n^3 t}. \quad (1.62)$$

Як відомо [217] , у випадку неперервного спектра ($\lambda = k^2$) розв'язок рівняння Шредингера при $|x| \rightarrow \infty$ є лінійною комбінацією експонент $\exp(\pm ikx)$. Якщо ж $\psi(x,t) = e^{-ikx} + R(k,t)e^{ikx}$, $x \rightarrow \infty$, $\psi(x,t) = T(k,t)e^{-ikx}$, $x \rightarrow -\infty$,

то (згідно з (1.61)): $A = 4ik^2$, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial t} = 8ik^3 R$, а звідси:

$$R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3 t}. \quad (1.63)$$

Дискретний спектр відповідає солітонним розв'язкам, неперервний - несолітонним, які є збуреннями – “осцилюючими хвостами”.

Отже, при реалізації методу оберненої задачі розсіювання напочатку вихідне рівняння записується у вигляді системи (1.58)-(1.59). Далі для рівняння (1.58) розв'язується задача на власні значення з потенціалом $u_0(x)$ та визначається сукупність величин: $S = \{\lambda_n, c_n, n = 1, \dots, N; R(k), k^2 > 0\}$. Тоді за формулами (1.62)-(1.63) знаходяться $c_n(t)$, $R(k, t)$ в довільний момент часу. За даними розсіювання можна відновити потенціал Шредингера з використанням інтегрального рівняння Гельфанда-Левітана-Марченко [223, 224, 161]:

$$K(x, y, t) + B(x + y; t) + \int_x^\infty B(y + z)K(x, z; t)dz = 0, \quad (1.64)$$

$$\text{де } B(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n(t)e^{-k_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t)e^{ikt} dk. \quad (1.65)$$

При цьому з рівняння (1.64) знаходиться функція $K(x, y, t)$, з якої відновлюється потенціал за формулою: $u(x, t) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x, t)$. Зауважимо, що рівняння (1.64) часто вдається розв'язати у багатьох практично-важливих випадках, зокрема, для рівняння КдВ, односолітонного та багатосолітонного випадку [52]. Для відповідного рівняння розв'язок (1.64) можна знаходити у вигляді: $K(x, y, t) = \sum_n K_n(x, t) \exp(-k_n y)$. Зокрема, для багатосолітонних

розв'язків має місце співвідня: $K(x, x, t) = \frac{1}{|D|} \frac{dD}{dx}$,

$$D_{nm} = \delta_{nm} + c_n(t) \frac{\exp(-(k_n + k_m)x)}{k_n + k_m}, \delta_{nm} \text{-символ Кронекера. А для двох}$$

солітонів $D = 1 + e^{-2\theta_1} + e^{-2\theta_2} + e^{-2(\theta_1 + \theta_2 + \delta_{12})}$, де

$\theta_i = k_i x - 4k_i^3 t - \delta_i, e^{2\delta_i} = c_i(0)/2k_i, i=1,2, e^{-2\delta_{21}} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$. При $t \rightarrow +\infty$ в

області $\theta_1 = 0$, $D \approx 1 + e^{-2\theta_1}$, $u(x,t) \approx \frac{2k_1^2}{ch^2\theta_1}$, а при $t \rightarrow -\infty$: $D \approx e^{-2\theta_2} + e^{-2(\theta_1+\theta_2+\delta_{12})}$,

$u(x,t) \approx \frac{2k_1^2}{ch^2(\theta_1 + \delta_{12})}$ (тобто у відповідних граничних випадках маємо два

одиначних солітони, один з яких отримав зсув вздовж осі x).

Для визначення класу рівнянь, які вдається розв'язати за допомогою цього методу, можна провести наступні міркування. Продиференціювавши рівняння (1.59) по t та вважаючи, що власні значення оператора Шредингера не залежать від часу, матимемо: $\hat{L}_t \psi + \hat{L} \psi_t = \lambda \psi_t$.

З врахуванням рівняння (1.59) отримується рівняння Лакса:

$$\hat{L}_t \psi = [\hat{A}, \hat{L}], \quad (1.66)$$

де $[\hat{A}, \hat{L}] = \hat{A}\hat{L} - \hat{L}\hat{A}$, оператори \hat{A}, \hat{L} утворюють операторну пару Лакса. Тоді розглядають сімейство операторів виду:

$$\hat{A}_n = -c_n \left(\hat{D}^{2n+1} + \sum_{j=1}^n (b_j \hat{D}^{2j-1} + \hat{D}^{2j-1} b_j) \right) + C, \quad (1.67)$$

де b_j -функціонали від функції $u(x,t)$ та її похідних по x , які вибираються так, щоб рівняння Лакса (1.66) не містило оператора \hat{D} , C -стала інтегрування, яка вибирається з умови нормування власних функцій. Вибираючи різні значення n , легко отримати цілу ієрархію модельних рівнянь, зокрема, при $n=0$ та $C=0$ з (1.67) $\hat{A} = -\hat{D}$, рівняння (1.60) дає лінійне рівняння переносу $u_t + u_x = 0$; при $n=1, b_1 = 3u/4, c_1 = 4$ отримують рівняння КдВ:

$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$; при $n=2$ —рівняння виду:

$$u_t + \frac{1}{32}(u_{xxxx} + 5u_x^2 + 10uu_{xx} + 10u^3)_x = 0.$$

У роботі [224], не обмежуючись оператором Шредингера \hat{L} виду (1.67), задачу (1.57)-(1.58) представлено в матричній формі:

$$\hat{L}V = ikV, \quad (1.68)$$

де $V = (v_1, v_2)$, $\lambda = k^2$, $\hat{L} = \begin{pmatrix} -\hat{D} & u(x,t) \\ -1 & \hat{D} \end{pmatrix}$. При цьому показано, що існує оператор

[224] \hat{A} , такий, що рівнянням Лакса буде нелінійне рівняння Шредингера:

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} \pm |u|^2 u = 0. \quad (1.69)$$

Найбільш загальний варіант оператора \hat{L} був розглянутий в роботі [161]:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\hat{D} & q(x,t) \\ -r(x,t) & \hat{D} \end{pmatrix}, \quad (1.70)$$

де $r(x,t), q(x,t)$ – деякі функції. Якщо (1.66) представляється у формі:

$$V_x = PV, \quad (1.71)$$

де $P = \begin{pmatrix} -ik & q(x,t) \\ r(x,t) & ik \end{pmatrix}$ а вектор V задовольняє рівняння:

$$V_t = QV, \quad (1.72)$$

$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, a, b, c -функціонали від q, r та їх похідних по x , то з умови

сумісності рівнянь (1.71) та (1.72) можна отримати:

$$P_t - Q_x + [P, Q] = 0. \quad (1.73)$$

Звідси

$$\begin{aligned} a_x - qc + rb &= 0, \\ q_t - 2aq - b_x - 2ikb &= 0, \\ r_t + 2ar - c_x + 2ikc &= 0. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Розв'язок цієї системи знаходиться у вигляді ряду:

$$a = \sum_{i=0}^n k^i a_i, b = \sum_{i=0}^n k^i b_i, c = \sum_{i=0}^n k^i c_i. \quad (1.75)$$

Вибираючи матрицю Q , отримують нескінченну послідовність рівнянь, що інтегруються методом оберненої задачі. Інший вигляд матриці P дасть можливість збудувати іншу ієрархію.

В низці робіт, зокрема [321], дається визначення повністю інтегрованого рівняння як такого, яке можна представити у вигляді системи рівнянь (1.71)-(1.72). Також дається визначення солітона, як розв'язку повністю інтегрованого рівняння, якому відповідає спектр, що складається з єдиного дискретного власного значення [321]. Зауважимо, що при такій класифікації основна увага приділяється саме солітонам, які є окремим підкласом відокремлених хвиль. При цьому питання моделювання відокремлених хвиль, що розвиваються з довільного початкового збурення, вивчення їх властивостей, динаміки зміни їх амплітуд потребують розробки нових методів та підходів.

1.3.2 Методи спеціальних розкладів

Р.Хірота [66] запропонував перетворення виду:

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(x, t). \quad (1.76)$$

З використанням такого перетворення, наприклад, рівняння КдВ запишеться у вигляді:

$$ff_{xt} - f_x f_t + 3f_{xx}^2 - 4f_x f_{xxx} + ff_{xxxx} = 0. \quad (1.77)$$

Тоді (1.77) матиме вигляд:

$$\hat{P}f \cdot f = (\hat{D}_x \hat{D}_t + \hat{D}_x^4) f \cdot f = 0. \quad (1.78)$$

де $\hat{D}_x: \hat{D}_x f \cdot g = f_x g - f g_x$. Аналогічно вводиться \hat{D}_t . Розв'язок (1.78) шукають у вигляді ряду:

$$f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots, \quad (1.79)$$

за степенями спеціальним чином введеного малого параметра де ε , де в результаті стандартної підстановки та (1.79) в (1.78) та прирівнювання до нуля членів при однакових степенях ε , для знаходження f_1 отримуються співвідношення:

$$\hat{L}f_1 = 0, \quad (1.80)$$

$$\hat{L}f_2 = -\frac{1}{2} \hat{P}f_1 \cdot f_1, \quad (1.81)$$

$$\hat{L}f_3 = -\hat{P}f_1 \cdot f_2, \quad (1.82)$$

де $\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}$. Звідси знаходиться односолітонний розв'язок рівняння КдВ

$f = 1 + \exp(kx - k^3t + \varphi)$, де $\varphi = \ln \varepsilon$. Метод Хіроти дозволяє знаходити точні N -солітонні розв'язки якщо $f_1 = \sum_{i=1}^N \exp(k_i x - k_i^3 t)$. В роботі [321] за допомогою цього методу знаходяться солітонні розв'язки інших модельних рівнянь

Важливу роль при знаходженні солітонних розв'язків відіграють перетворення Беклунда, що характеризуються деякими співвідношеннями виду: $R_j((u), (\bar{u}), (k)) = 0, j = 1, 2, \dots, n$, де $(u), (\bar{u})$ - набори не обов'язково однакової довжини, що складаються відповідно з функцій u, \bar{u} , що є розв'язками деяких диференціальних рівнянь в частинних похідних, та їх часткових похідних, (k) - набір характерних параметрів (див., напр., [68]).

Так, у роботах [222, 273] розглядається перетворення Міури:

$$u = v^2 - iv_x, \quad (1.83)$$

яке переводить рівняння МКдВ у рівняння КдВ (зворотнє твердження не вірне). Звідси з врахуванням рівняння

$$v_t = -iu_{xx} - 2(uv)_x, \quad (1.84)$$

отримують перетворення Беклунда.

Для рівняння SIN-Гордона: $u_{xt} = \sin u$ перетворення Беклунда, що мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{(u + \bar{u})_x}{2} &= k \sin\left(\frac{u - \bar{u}}{2}\right), \\ \frac{(u - \bar{u})_t}{2} &= \frac{1}{k} \sin\left(\frac{u + \bar{u}}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.85)$$

дозволяють будувати нові розв'язки з вже відомих. Наприклад якщо $\bar{u} = 0$ то

$$\frac{(u)_x}{2} = k \sin(u/2), \quad (1.86)$$

$$\frac{(u)_t}{2} = \frac{1}{k} \sin(u/2).$$

Звідси, зокрема, отримується односолітонний розв'язок:

$$u = 4 \operatorname{arctg}(e^\theta), \theta = kx + \frac{1}{k}t, \quad (1.87)$$

де додатні значення k відповідають кінкам, від'ємні-антикінкам. Для отримання багатосолітонних розв'язків використовують властивість комутативності перетворень Беклунда.

Існує низка підходів, які полягають у знаходженні розв'язку у вигляді розкладів в ряди з використанням функцій спеціального виду. До таких методів можна віднести метод трансформацій Дарбу, \tanh -метод та його модифікації, метод узагальнених гіперболічних функцій, метод відокремлених змінних, метод експонент та низка інших, які описані, зокрема, в роботах [71,37,73,86,93,91]. Запропоновані також рекурентні процедури знаходження солітонних розв'язків.

Наприклад, у методі декомпозиції Адоміана для модельного рівняння, записаного у формі:

$$L_t(u) + aK_u + bM_u + cN_u + dL_x u = 0, \quad (1.88)$$

$$\text{де } L_t = \frac{\partial}{\partial t}, L_x = \frac{\partial}{\partial x}, K_u = uu_x, M_u = u_x u_{xx}, N_u = uu_{xxx}, L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt,$$

розв'язок представляється у вигляді: $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$, $u_0(x,t) = u(x,0)$. Якщо

$$K_u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, M_u = \sum_{n=0}^{\infty} B_n, N_u = \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \text{ де } A_n, B_n, C_n \text{ -поліноми Адоміана виду:}$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[K_u \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k(x,t) \right) \right], B_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[M_u \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k(x,t) \right) \right],$$

$$C_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N_u \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k(x,t) \right) \right],$$

то в результаті підстановки відповідних поліномів в (1.88), матимемо рекурентну процедуру пошуку розв'язку:

$$u_{n+1} = -aL_t^{-1} A_n - bL_t^{-1} B_n - cL_t^{-1} C_n - dL_t^{-1} (L_x u_n). \quad (1.89)$$

Збіжність методу досліджувалась в роботі [37]. За допомогою такого підходу можна знайти розв'язки низки рівнянь, таких як рівняння Іто [68], Каупа-Купершміта, Савади-Котера та інших.

Згідно \tanh -методу, розв'язок модельного еволюційного рівняння знаходиться у вигляді:

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^m a_k \Phi^k + \sum_{k=0}^m b_k \Phi^{-k}, \quad (1.90)$$

де a_k, b_k - деякі коефіцієнти, $\xi = x + y - ct$, $\Phi(\xi)$ - функція, що задовольняє рівняння Ріккати виду:

$$\Phi' = r + p\Phi + q\Phi^2, \quad (1.91)$$

де r, p, q - деякі коефіцієнти.

При цьому розглядають спеціальні розв'язки рівняння (1.91) виду:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{-p}{2q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2q} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2q} \xi + C\right), \quad \Phi(\xi) = \frac{-p}{2q} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2q} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2q} \xi + C\right), \\ \Phi(\xi) &= \frac{-p}{2q} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2q} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2q} \xi + C\right), \quad \Phi(\xi) = \frac{-p}{2q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2q} \coth\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2q} \xi + C\right). \end{aligned} \quad (1.92)$$

та низку інших [53,54,118].

У роботі [73] пропонується представлення виду:

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k f^k(\xi) + \sum_{k=1}^n b_k f^{-k}(\xi) + \sum_{k=2}^n c_k f^{k-2}(\xi) f'(\xi) + \sum_{k=-1}^n d_k f^k(\xi) f'(\xi), \quad (1.93)$$

де $(f'(\xi))^2 = pf^4(\xi) + qf^2(\xi) + r$.

У роботі [119] розв'язок знаходиться у вигляді:

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k f^k(\xi) + \sum_{k=1}^n b_k f^{-k}(\xi) g^j(\xi), \quad (1.94)$$

де функції $f(\xi), g(\xi)$ задовольняють рівняння:

$$f'(\xi) = -qf(\xi)g(\xi),$$

$$g'(\xi) = q(1 - g^2(\xi) - rf(\xi)), \quad g^2(\xi) = 1 - 2rf(\xi) + (r^2 + \varepsilon)f^2(\xi).$$

В роботах [86]-[93] пропонується знаходити розв'язки у вигляді:

$$u(\xi) = [A + B \cosh(m\xi)]^{-1/p}, \quad (1.95)$$

$$u(\xi) = A[1 - \tanh(m\xi)]^{1/p}.$$

Метод ехр-функцій [71],[3] передбачає використання представлень виду:

$$u(\xi) = \frac{\sum_{k=-d}^c a_k e^{k\xi}}{\sum_{k=-q}^p b_k e^{k\xi}}. \quad (1.96)$$

Метод представлень Пейнлеве (Painleve) [71] ґрунтується на використанні співвідношень виду:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^r \frac{u_k(x,t)}{f^{r-k}(x,t)}, \quad (1.97)$$

$$\text{де } f(x,t) = \frac{\sum_{k=-d}^c a_k e^{k\xi}}{\sum_{k=-q}^p b_k e^{k\xi}}.$$

Відомим є метод гомотопій [138]. Він вперше був запропонований Ляо (Liao) в 1992 році в роботі [91]. Для диференціального рівняння :

$$N[u(\tau)] = 0, \quad (1.98)$$

де $u(\tau)$ - шукана функція, розглядаються деформаційні рівняння нульового порядку виду:

$$(1-p)L[\varphi(\tau, p) - u_0(\tau)] = phH(\tau)N[\varphi(\tau, p)], \quad (1.99)$$

де $p \in [0,1]$, $h \neq 0$, $H(\tau) \neq 0$, L - деякий лінійний оператор, $\varphi(\tau, p)$ - невідома функція, яка знаходиться у вигляді:

$$\varphi(\tau, p) = u_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(\tau) p^m, \quad (1.100)$$

$$\text{де } u_m(\tau) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(\tau, 0)}{\partial p^m}.$$

Диференціюючи вихідне рівняння m разів, отримують деформаційне рівняння m -того порядку:

$$L[u_m(\tau) - \chi_m u_{m-1}(\tau)] = hH(\tau)N[\varphi(\tau, p)]R_m(\bar{u}_{m-1}), \quad (1.101)$$

$$\bar{u}_m = (u_0(\tau), u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)),$$

$$R_m(\bar{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\varphi(\tau, p)]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0}, \quad \chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}.$$

При цьому для різних лінійних операторів та значень констант можна отримати аналогічні результати. Наприклад, при $L[\varphi(x, t, p)] = \frac{\partial \varphi(x, t, p)}{\partial t}$

можна отримати розв'язки рівнянь КдВ, Кавахари, Гарднера.

1.3.3 Асимптотичні методи

Важливе місце серед методів знаходження солітонних розв'язків еволюційних рівнянь займають теоретичні результати Ю.А. Митропольського, Н.Н. Боголюбова, А.К. Прикарпатського, В.Г. Самойленка, М.М. Притули, І.В. Микитюка [196,280,310,122], зокрема градієнтно-голономний алгоритм, який дозволяє розв'язувати задачу існування зображення Лакса.

Згаданий вище метод \tanh – функцій знайшов своє вдосконалення у роботах М.М. Притули [343] та ін. При цьому солітонні розв'язки знаходились

в рухомій системі координат $\xi = \sum_{j=1}^N k_j x_j + \varphi_0, T = \tanh \xi$. Розв'язок вихідної

системи знаходиться у вигляді: $U_i(T) = \sum_{j=0}^{M_i} a_{ij} T^j$ ($U_i(T)$ відповідає $u_i(x)$).

В роботі [310] розглядалась динамічна система типу Кортевега де-Вріза виду:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xxx} + uu_x - vv_x, \\ v_t &= -2v_{xxx} - uv_x \end{aligned} \right\} = K[w],$$

де $w = (u, v)$, $K[w]$ -гладке за Фреше функціонально-поліноміальне векторне поле.

На основі градієнтно-голономного алгоритму показано, що відповідна динамічна система є узгодженим бігамільтоновим потоком [310] на M – нескінченно-вимірному гладкому періодичному многовиді і має стандартне зображення типу Лакса, $L = \frac{d}{dx} - A[u, v; \lambda]$, $\text{tr}A[u, v; \lambda] = 0$, що дозволяє проінтегрувати систему методом оберненого спектрального перетворення. Для системи знайдено нескінченну ієрархію законів збереження. При цьому

має місце рівняння: $\frac{d\varphi}{dt} + K^* \varphi = 0$, $K^* = \begin{pmatrix} -\partial^3 - u\partial & -v_x \\ v\partial & 2\partial^3 + \partial u \end{pmatrix}$, де

$\varphi = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \varphi_0$ - рухома система відліку, k_1, k_2 - компоненти хвильового

вектора. Тоді $\varphi(x, t; \lambda) = (1, b(x, t; \lambda))^T \exp \left[\lambda x + \lambda^3 t + \int_{x_0}^x dx \sigma(x, t; \lambda) \right]$,

$\lambda \in \mathbb{C}, x_0 \in \mathbb{R}, b(x, t; \lambda) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} b_j |w| \lambda^{-j}, \sigma(x, t; \lambda) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j |w| \lambda^{-j}$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

На основі градієнтно-голономного алгоритму Боголюбова - Прикарпатського для дослідження інтегровності нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах у праці [310] встановлено точну лінеаризацію нелінійної динамічної системи типу Бюргерса-Кортевега-де Вріза.

Рівняння Кортевега - де Вріза зі змінними коефіцієнтами розглядались в роботах В.Г. Самойленка, Ю.В. Самойленко, зокрема [329]:

$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x, t, \varepsilon) u_t + b(x, t, \varepsilon) u u_x$, де

$$a(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, t) \varepsilon^k, b(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x, t) \varepsilon^k.$$

При цьому солітоноподібний розв'язок знаходиться як представлення виду: $u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)] + O(\varepsilon^{N+1}), \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}$.

Одним з відомих методів дослідження відокремлених хвиль є метод пошуку розв'язку, який є нескінченно-тонким δ -солітоном [213, 34]. Під δ -

солітоном розуміють функцію виду: $w((x - v(t)) / \varepsilon) = C\varepsilon\delta(x - v(t)) + O(\varepsilon^n)$, що є слабким асимптотичним розв'язком відповідного модельного рівняння. Використання δ -солітонів в асимптотичному випадку дозволяє не враховувати форму профілю хвилі. Однак, узагальні функції як моделі реальних фізичних явищ мають низку недоліків.

1.4 Висновки

Аналіз представленої вище інформації показує, що відомі програмно-апаратні комплекси для дослідження сейсмічних процесів мають добре розроблені функції моніторингу, візуалізації та статистичного аналізу, однак не мають ефективних функцій прогнозування, оскільки існуючі підходи до моделювання сейсмічних процесів не враховують низку фізичних механізмів, що можуть впливати на відповідні процеси, зокрема наявність локалізованих солітоноподібних хвиль у зонах сейсмічної активності.

Самотні хвилі існують у середовищах з різноманітними дисперсійними властивостями. Відповідні моделі зводяться до диференціальних рівнянь, які мають розв'язки у формі відокремлених хвиль, зокрема рівнянь Бюргерса, Кортевега -де Вріза, Буссинеска, Клейна-Гордона-Фока, Кортевега-де Вріза- Бюргерса, Шредингера, Кадомцева-Петвіашвілі, Хохлова-Заблотської, Заблоцької-Хохлова-Кузнецова, Серра, Дуффінга, SIN-Гордона. Очевидно, наведені вище рівняння не вичерпують моделі, які допускають розв'язки, що описують відокремлені хвилі.

На сьогодні відомо низку підходів до знаходження солітонних розв'язків відповідних диференціальних рівнянь. Фундаментальне значення відіграє метод оберненої задачі розсіювання. Існує нескінченна кількість диференціальних рівнянь, які можуть бути продиференційовані за допомогою цього методу. Однак, метод не вичерпує всі рівняння, що можуть мати солітонні розв'язки. Поряд з цим, існують інші методи, які дозволяють знаходити як точні так і наближені солітонні розв'язки диференціальних

рівнянь. Однак відповідні методи часто мають спеціальний характер і є ефективними лише для певного класу рівнянь. Більшість з них стосуються одновимірного випадку.

Проблема моделювання процесів виникнення та поширення відокремлених хвиль має декілька аспектів, зокрема, це аналітичний опис профілю хвилі та наявність низки специфічних властивостей солітона, які гарантуються деякими методами вже на етапі їх застосування і не потребують додаткового дослідження. Наявність таких методів зумовлює їх складність. В той же час, профіль хвилі може змінюватись в часі, тоді така хвиля вже не буде солітоном в класичному розумінні, однак може мати солітонні властивості, які потребують додаткового дослідження.

Солітонні розв'язки рівнянь, що розглядаються в рамках структурно-феноменологічного підходу, наприклад, є окремими частковими випадками розв'язків і не дають можливості вирішити питання утворення відокремленої хвилі з довільного початкового збурення.

Використання δ -солітонів в асимптотичному випадку дозволяє не враховувати форму профілю хвилі. Однак, узагальні функції як моделі реальних фізичних явищ мають низку недоліків, зокрема необмеженість, специфічний математичний зміст похідних та ін. Тому виникла необхідність у розробці методів, які б мали переваги класичних δ -солітонів в частині їх незалежності від форми профілю і водночас дозволяли отримувати обмежений гладкий розв'язок, що моделює відокремлену хвилю.

Особливо проблематичним зараз є аналітичний опис відокремлених хвиль у багатовимірних випадках. Навіть для добре вивченої системи рівнянь типу «мілкої води» лише нещодавно були знайдені періодичні аналітичні розв'язки і автору не відомі методи аналітичного дослідження відокремлених хвиль.

Таким чином, виникає необхідність у розробці методики, яка б мала в певному розумінні універсальний характер і дозволяла знаходити розв'язки

модельних рівнянь, що моделюють двовимірні та тривимірні відокремлені хвилі.

У багатовимірному випадку виникають нові задачі, пов'язані з дослідженням траєкторій відокремлених хвиль та їх прогнозування а також процесів взаємодії таких хвиль. Такі задачі вимагають розробки нових підходів та методів.

РОЗДІЛ 2 МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ СОЛІТОНОПОДІБНИХ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РІВНЯННЯМИ ТИПУ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРІЗА, НА ОСНОВІ Т-ПРЕДСТАВЛЕНЬ

В даному розділі пропонується загальний метод моделювання процесів поширення локалізованих збурень довільного профілю у суцільних середовищах з заданими дисперсійними властивостями. Метод дозволяє досліджувати виникнення відокремлених хвиль з довільного збурення а також моделювати процеси їх взаємодії. Відповідний підхід продемонстровано на прикладі середовищ, хвильові процеси у яких описуються рівняннями типу Кортевега – де Вріза. Такі рівняння описують низку явищ, пов'язаних з поширенням відокремлених хвиль, зокрема, хвиль на мілкій воді, нескінченно довгих хвиль в стратифікованій воді океану, акустичних хвиль в кристалічній решітці та інших.

2.1 Моделювання процесів поширення відокремлених хвиль у середовищах, що описуються рівняннями типу Кортевега-де Вріза

Нехай маємо деяке середовище, у якому можуть існувати локалізовані солітоноподібні збурення. Для моделювання відповідних n - вимірних збурень будемо використовувати представлення виду (Т-представлення):

$$(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})^T = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))^T W(x, t), \quad (2.1)$$

де $W(x, t) = \exp(-\mu(x, \tilde{x}(t)) / \varepsilon)$ – функція, що описує форму хвилі, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$ – координата точки максимуму відповідного збурення, $\mu(a, b)$ – деяка функція, $a, b \in R^n$ (в найпростішому випадку це функція міри, визначена на множині інтервалів $\{[a, b], a, b \in R^n\}$, коли збурення матиме в певному розумінні симетрію; часто в основі конструювання даної функції є відстань $|x - \tilde{x}(t)|$ в евклідовому просторі), $(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))^T$ – амплітудні функції (в подальшому розглядатимуться більш складніші залежності амплітудних характеристик від просторових

змінних та часу, $\gamma_i = \gamma_i(t, x), i = \overline{1, n}$), ε - параметр локалізації збурення, $(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})$ – відповідні збурення.

В подальшому для одновимірного випадку відповідне представлення розглядатимемо у вигляді:

$$u(x, t) = \gamma(t) \exp(-g(x - \tilde{x}(t)) / \varepsilon), \quad (2.2)$$

де $g(\cdot)$ - функція, що задовольняє умови:

$$g(x) \geq 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) \geq 0. \quad (2.3)$$

Додаткові умови, які накладаються на функцію $g(\cdot)$, визначаються класом збурень, що нас цікавлять та зумовлюються специфікою самого середовища, у якому поширюються відповідні збурення. Очевидно, що функція $\gamma \exp(-g(x - \tilde{x}(t)) / \varepsilon)$, де $g(\cdot)$ задовольняє умови (2.3), може описати додатне збурення будь-якої форми, де γ є амплітудним параметром, ε - параметр, що визначає локалізацію збурення. Зауважимо, що параметр ε зручно використовувати у інфінітимальних випадках ($\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow \infty$).

Подальша деталізація представлення (2.2) визначатиметься характеристиками середовища, у якому розповсюджуються хвилі, зокрема, рівняннями, що описують хвильові процеси. Розглянемо відповідний підхід на прикладі середовищ, у яких хвильові процеси описуються рівнянням Кортвега – де Вріза :

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.4)$$

Для уточнення функцій $g(\cdot)$, $\tilde{x}(t)$ та $\gamma(t)$ знаходимо похідні

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u = \eta u, \quad \text{де } \eta = -\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon}, \\ u_{xx} &= \eta_x u + \eta u_x = \eta_x u + \eta^2 u = (\eta_x + \eta^2) u, \\ u_{xxx} &= (\eta_{xx} + 2\eta\eta_x) u + (\eta_x + \eta^2) \eta u = (\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3) u, \\ u_t &= (\gamma'(t) / \gamma(t) + \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \tilde{x}'(t)) u = (\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta \tilde{x}'(t)) u \end{aligned} \quad (2.5)$$

і, підставляючи (2.5) в (2.4), отримуємо:

$$\begin{aligned}
& (\gamma'(t)/\gamma(t) - \eta\tilde{x}'(t))u + 6\eta\eta u + (\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3)u = 0, \\
& (\gamma'(t)/\gamma(t) + \frac{g'(x - \tilde{x}(x,t))}{\varepsilon} \tilde{x}'_t(t))u - 6\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u^2 - \\
& - \frac{g'''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u + 3\frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u - \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon}\right)^3 u = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Зокрема, у випадку, коли $x - \tilde{x}(t) = 0$ з рівняння (2.6) отримуємо умову (рівняння) для знаходження амплітуди: $\gamma'(t) - \frac{g'''(0)}{\varepsilon} \gamma(t) = 0$.

Звідси $\gamma'(t)/\gamma(t) = C = const$. Тоді розглянемо два випадки:

А) $\gamma'(t) = 0, \gamma(t) = \gamma = const, g'''(0) = 0$.

Б) $\gamma'(t)/\gamma(t) = C = const, \gamma(t) = Ce^{\frac{g'''(0)}{\varepsilon}t}, g'''(0) \neq 0$.

Надалі зупинимось на першому випадку. З рівняння (2.6) отримуємо:

$$\begin{aligned}
& -\eta\tilde{x}'(t)u + 6\eta\eta u + (\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3)u = 0, \\
& -\frac{g'(x - \tilde{x}(x,t))}{\varepsilon} \tilde{x}'_t(t)u + 6\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u^2 + \frac{g'''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u - \\
& - 3\frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u + \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon}\right)^3 u = 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Рівняння (2.7) визначає додаткову умову для функцій $g(\cdot)$ та $\tilde{x}(t)$ в представленні (2.2).

Зауважимо, що мають місце наступні прості твердження для граничних випадків параметра локалізації ε .

Твердження 1 Функція (2.2) при $\varepsilon \rightarrow \infty$ ($\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} u(x,t)$) є розв'язком рівняння КдВ.

Дійсно,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \tilde{x}'_t(t) - 6\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u + \left(-\frac{g'''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} + 3\frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{g'(x - \tilde{x}(x,t))}{\varepsilon} \tilde{x}_{xxx}(x,t) - \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(x,t))}{\varepsilon}\right)^3 (1 - \tilde{x}_x(x,t))^3 \right) u = 0,
\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} u(x,t) = \gamma.$$

Твердження 2 Функція (2.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t)$) є розв'язком рівняння КдВ.

Твердження випливає з таких співвідношень:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \tilde{x}_t(t) - 6 \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u + \right. \\ \left. + \left(-\frac{g'''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} + 3 \frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} - \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \right)^3 \right) u \right) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon^3 = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-y^2 x) x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x / \exp(y^2 x) = 0.$$

Розглянемо випадок, коли $\tilde{x}(x, t) = vt$. Тоді згідно (2.7) матимемо:

$$\frac{g'(x - vt)}{\varepsilon} v - 6 \frac{g'(x - vt)}{\varepsilon} \gamma e^{-\frac{g(x-vt)}{\varepsilon}} - \frac{g'''(x - vt)}{\varepsilon} + 3 \frac{g''(x - vt)}{\varepsilon} \frac{g'(x - vt)}{\varepsilon} - \\ - \left(\frac{g'(x - vt)}{\varepsilon} \right)^3 = 0. \quad (2.8)$$

Для зручності подальших викладок введемо позначення $g(\cdot) / \varepsilon = \tilde{g}(\cdot)$, $x - vt = y$. Тоді рівняння (2.8) переписеться у вигляді:

$$\tilde{g}'''(y) - 3\tilde{g}''(y)\tilde{g}'(y) + (\tilde{g}'(y))^3 - v\tilde{g}'(y) + 6\gamma\tilde{g}'(y)e^{-g(y)} = 0. \quad \text{А в результаті} \\ \text{підстановок } \tilde{g}'(y) = p(\tilde{g}), \quad w = p^2 \quad \text{останнє рівняння запишеться у вигляді:}$$

$$w''/2 - 3w'/2 + w = v - 6\gamma e^{-\tilde{g}}. \quad (2.9)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.9) має вигляд: $w = v - 2\gamma e^{-\tilde{g}} + C_1 e^{2\tilde{g}} + C_2 e^{\tilde{g}}$. Тоді за умов $b - 2\gamma e^{-\tilde{g}} + C_1 e^{2\tilde{g}} + C_2 e^{\tilde{g}} \geq 0$, $b - 2\gamma + C_1 + C_2 = 0$ можемо визначити функцію $\tilde{g}(y)$, як розв'язок задачі Коші:

$$\tilde{g}'(y) = \text{sign}(y) \sqrt{b - 2\gamma e^{-\tilde{g}} + C_1 e^{2\tilde{g}} + C_2 e^{\tilde{g}}}, \quad (2.10) \\ \tilde{g}(0) = 0.$$

Покажемо, що відомий солітонний розв'язок [84] рівняння КдВ

$$u(x, t) = 2\chi^2 c h^{-2} \chi(x - 4\chi^2 t - \varphi) \quad (2.11)$$

є частковим випадком представлень (2.2), де χ , φ - деякі параметри. Дійсно, поклавши в (2.10) $C_1 = C_2 = 0$ матимемо: $v = 2\gamma$. Тоді задача (2.10) запишеться у формі:

$$g'(y) = \sqrt{v - ve^{-g}}, g(0) = 0. \quad (2.12)$$

Враховуючи (2.11) та (2.2), отримуємо :

$$2\chi^2 ch^{-2}(\chi(x - 4\chi^2 t - \varphi)) = v \exp(-g(x - vt - \varphi)) / 2.$$

Тоді:

$$g(x - vt - \varphi) = 2 \ln ch(\chi(x - vt - \varphi)), \quad (2.13)$$

$$g(y) = 2 \ln ch(\chi y). \quad (2.14)$$

Диференціюючи $g(y)$ при $v = 4\chi^2$, отримуємо : $g'(y) = \frac{2\chi sh(\chi y)}{ch(\chi y)}$.

Підставляючи (2.14) у праву частину (2.12), маємо:

$$\begin{aligned} \sqrt{v - ve^{-g}} &= 2\chi \sqrt{1 - e^{-2 \ln ch(\chi y)}} = 2\chi \sqrt{1 - ch^{-2}(\chi y)} = 2\chi \sqrt{(ch^2(\chi y) - 1) / ch^2(\chi y)} = \\ &= 2\chi \sqrt{sh^2(\chi y) / ch^2(\chi y)} = 2\chi sh(\chi y) / ch(\chi y) = g'(y). \end{aligned}$$

З'ясуємо питання про те, якими є функції $g(y), u(x, t)$ при деяких конкретних значеннях відповідних параметрів. Нехай, наприклад, $C_1 = 0.9, C_2 = -0.901, b = 0.201, \gamma = 0.1$ (при таких значеннях параметрів виконується рівність $b - 2\gamma + C_1 + C_2 = 0$). На рис. 2.1 зображені графіки функцій $g(y)$ та $g(|y|)$ відповідно. На рис. 2.2 зображено графік функції $u(x, 50)$, та графік класичного солітонного розв'язку, що визначається за допомогою співвідношення (2.11). Відповідні параметри представлення (2.2) підібрані так, щоб максимальні значення функцій (2.11) та (2.2) були однаковими. Бачимо, що при вказаних вище значеннях параметрів розв'язок (2.2) описує відокремлену хвилю незмінної в часі форми, яка у випадку рівності амплітуди з класичним солітонним розв'язком (2.11) відрізняється від нього суттєво меншою локалізацією у просторі. Зауважимо, що розв'язок рівняння (2.11) досить точно описує профіль самотньої хвилі, яка

експериментально досліджувалась, зокрема, Рябенком О.А. [321].

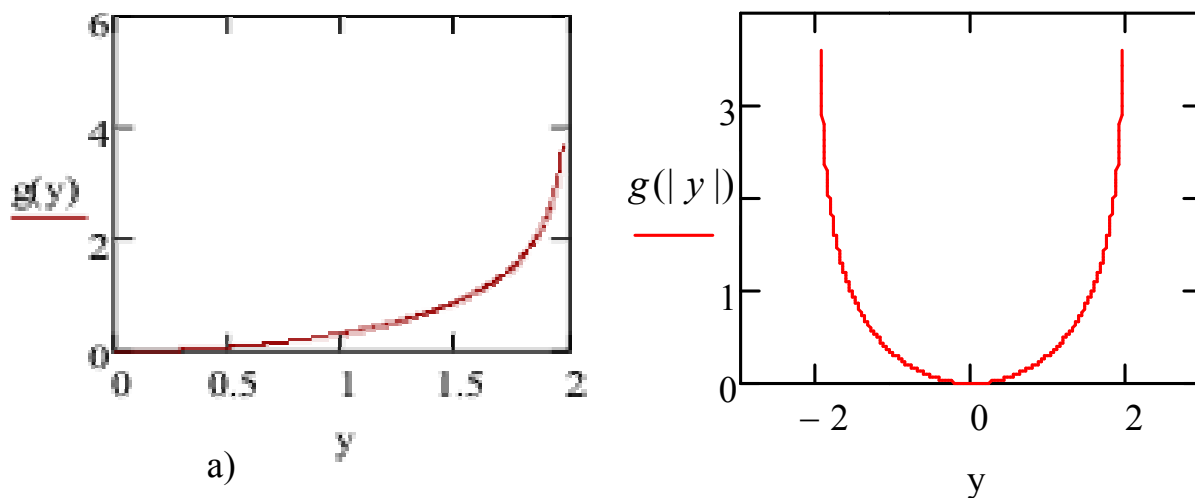


Рис.2.1. Графіки функцій а) $g(y)$, б) $g(|y|)$

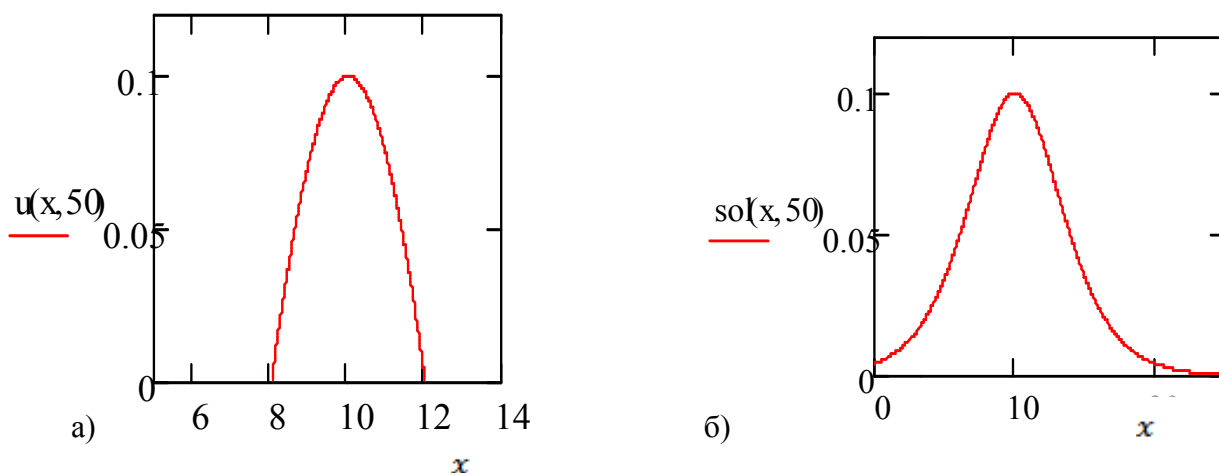


Рис.2.2. Графіки : а) функції $u(x,50)$, б) класичний солітонний розв'язок

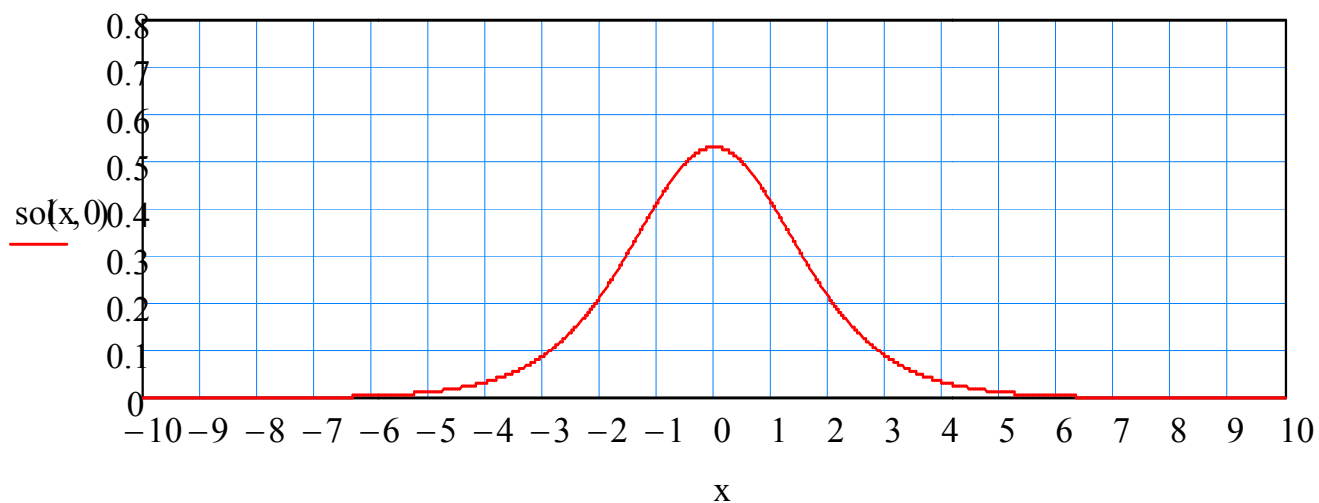


Рис.2.3. Експериментальний профіль хвилі

Таб.1

x	-5	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0
Експерименти	0.01	0.04	0.06	0.1	0.15	0.23	0.34	0.45	0.51	0.53
Теоретичні значення	0.01	0.03	0.06	0.09	0.14	0.21	0.3	0.41	0.50	0.53

Продовження Таб.1

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5
Експерименти	0.51	0.42	0.31	0.23	0.18	0.14	0.12	0.08	0.07	0.05	0.05	0.04	0.04
Теоретичні значення	0.51	0.41	0.3	0.21	0.14	0.09	0.06	0.03	0.02	0.01	0.007	0.004	0.003

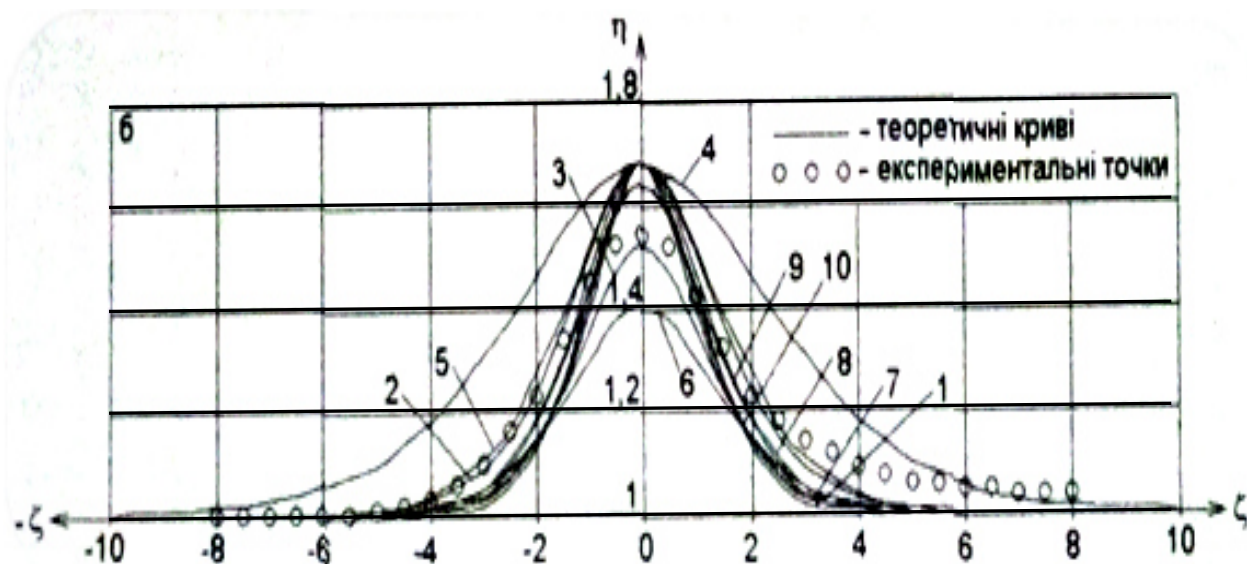


Рис.2.4. Порівняння експериментального профілю з теоретичними

На рис.2.4 показано порівняння експериментальних вимірювань профілю хвилі, яка утворюється в каналі при витіканні води з-під затвору в умовах білякритичних течій [321] (сама схема установки зображена на рис.2.5). Тут цифрами 1-7 позначені відповідно, профілі:

$$\eta = 1 + (Fr_1 - 1)sch^2\left(\sqrt{3(Fr_1 - 1)}\frac{\xi}{2}\right), \eta = 1 + (Fr_1 - 1)sch^2\left(\sqrt{3(Fr_1 - 1)/Fr_1}\frac{\xi}{2}\right),$$

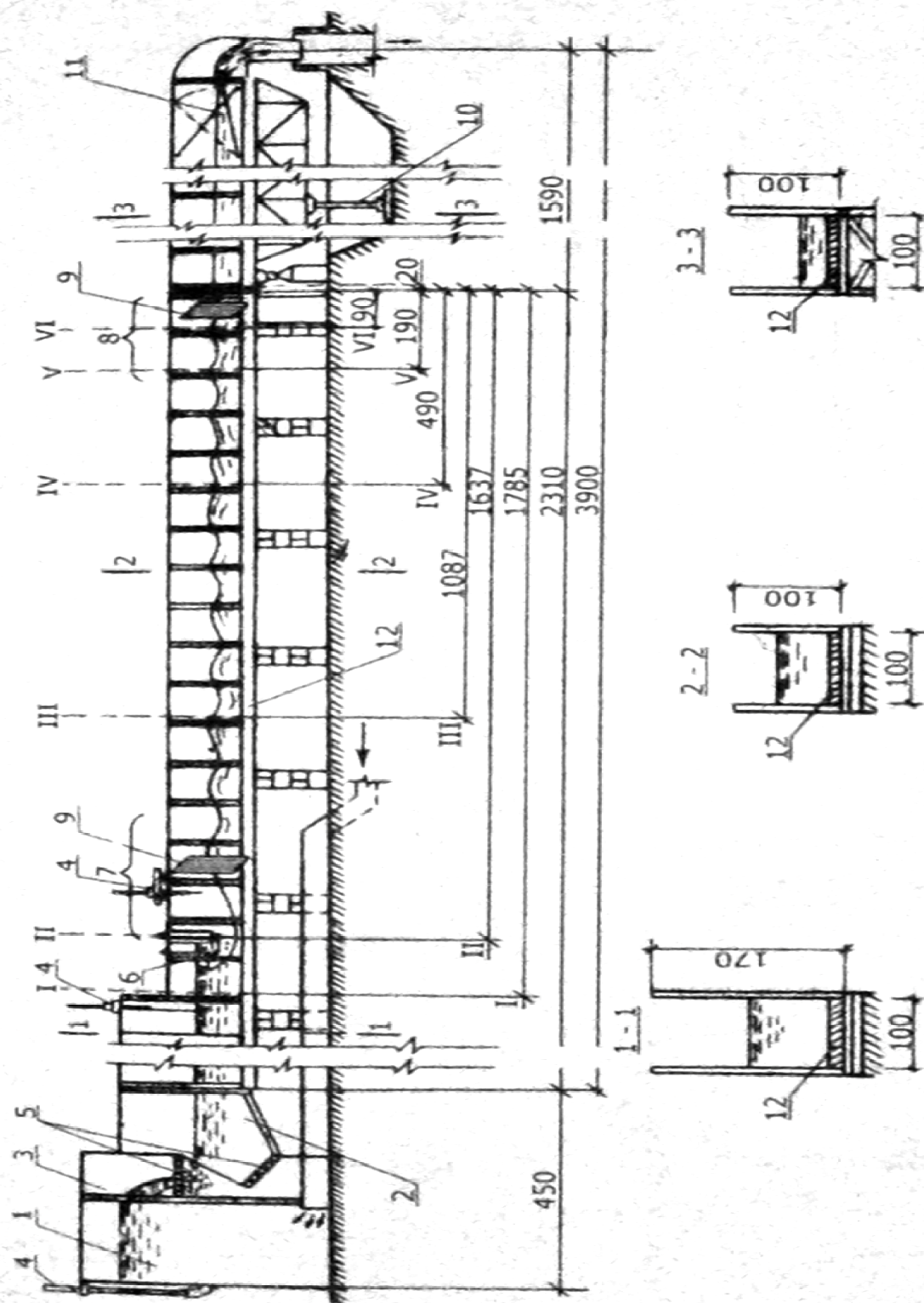


Рис.2.5. Схема експериментальної установки: 1 - голова лотока, 2 - заспокоювальна камера, 3 - вимірювальний трикутний водозлив, 4 - тастери, 5- заспокоювальні решітки, 6-робочий затвор, 7,8-приймальні отвори п'єзометрів, 9 - щити з п'єзометрами, 10 - підйомник, 11 - клапанний затвор, 12-бетонне дно, I-VI-положення робочого затвора.

$$\eta = 1 + \ln(Fr_1) \operatorname{sch}^2\left(\sqrt{3(Fr_1 - 1)} \frac{\xi}{2}\right),$$

$$\eta = 1 + (Fr_1 - 1) \operatorname{sch}^2\left(\sqrt{(Fr_1 - 1) / Fr_1} \frac{\xi}{2}\right),$$

$$\eta = 1 + (Fr_1 - 1) \operatorname{sch}^2\left(9\sqrt{(Fr_1 - 1) / (Fr_1 + 2)^3} \frac{\xi}{2}\right),$$

$$\eta = 1 + \frac{(Fr_1 - 1)}{Fr_1} \operatorname{sch}^2\left(\sqrt{3(Fr_1 - 1) / Fr_1} \frac{\xi}{2}\right),$$

$$\eta = 1 + \frac{Fr_1}{2} \left\{ 1 - \exp\left\{-4 \ln \sqrt{Fr_1} \operatorname{sch}^2\left(\xi \sqrt{\frac{3}{2} \ln \sqrt{Fr_1}} \left\{1 + \frac{3}{2} \ln \sqrt{Fr_1} [3 \operatorname{sch}^2\left(\xi \sqrt{\frac{3}{2} \ln \sqrt{Fr_1}} - 2\right)]\right\}\right)\right\}\right\},$$

де $\xi = x / h_1, \eta = h / h_1$.

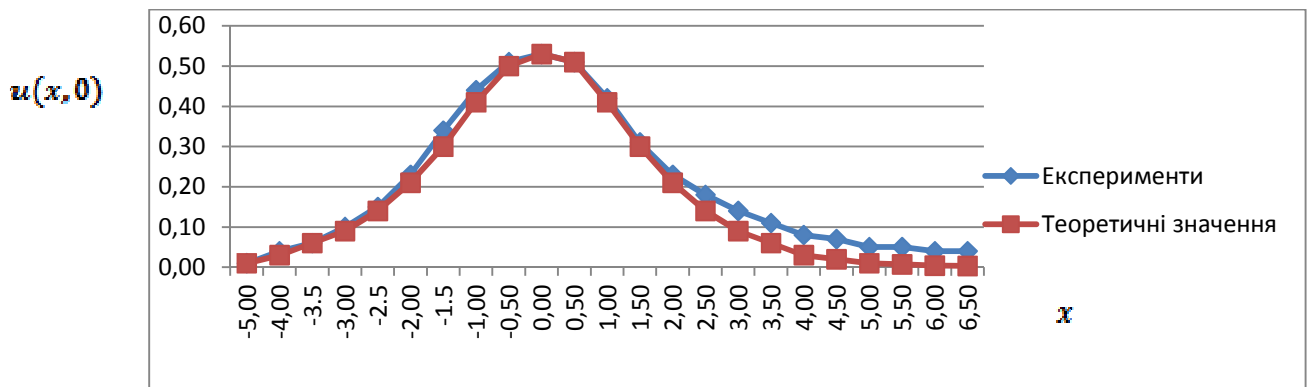


Рис.2.6. Порівняння експериментального профілю з теоретичним (2.3)

На рис.2.6 показано порівняння експериментального дослідження відокремленої хвилі та функції (2.2) при виконанні (2.12).

Розглянемо, як за допомогою представлень виду (2.2) отримати бризерні розв'язки. Нехай $\tilde{u}(x, t) = (x - \tilde{x}(t))u$. Тоді

$$\tilde{u}_x(x, t) = u + (x - \tilde{x}(t))\eta u,$$

$$\tilde{u}_{xx}(x, t) = 2\eta u + (x - \tilde{x}(t))(\eta_x + \eta^2)u,$$

$$\tilde{u}_{xxx}(x, t) = 3(\eta_x + \eta^2)u + (x - \tilde{x}(t))(\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3)u,$$

$$\tilde{u}_t(x, t) = -\tilde{x}'(t)u + (x - \tilde{x}(t))(\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta\tilde{x}'(t))u,$$

$$-\tilde{x}'(t)u + (x - \tilde{x}(t))(\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta\tilde{x}'(t))u + 6(x - \tilde{x}(t))u(u + (x - \tilde{x}(t))\eta u) + 3(\eta_x + \eta^2)u + (x - \tilde{x}(t))(\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3)u = 0.$$

Нехай $\tilde{x}(x, t) = vt$, $g(\cdot) / \varepsilon = \tilde{g}(\cdot)$, $x - vt = y$. Тоді рівняння (2.8) може бути записане у вигляді:

$$\begin{aligned}
-\tilde{x}'(t) + y(\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta\tilde{x}'(t)) + 6y(u + y\eta u) + 3(\eta_x + \eta^2) + y(\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3) &= 0, \\
-v + y(\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta v) + 6y(u + y\eta u) + 3(\eta_x + \eta^2) + y(\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3) &= 0, \\
-v - v y \tilde{g}'(y) + 6y(1 + y\tilde{g}'(y))\gamma e^{-g(y)} + \\
+ 3(\tilde{g}''(y) + (\tilde{g}'(y))^2) + y(\tilde{g}'''(y) + 3\tilde{g}'(y)\tilde{g}''(y) + (\tilde{g}'(y))^3) &= 0.
\end{aligned}$$

При $v = 2, g(0) = 0, g'(0) = 0, g''(0) = \frac{2}{3}, \gamma(t) = 0.01$ отримуємо функцію $g(\cdot)$, зображену на рис.2.7.

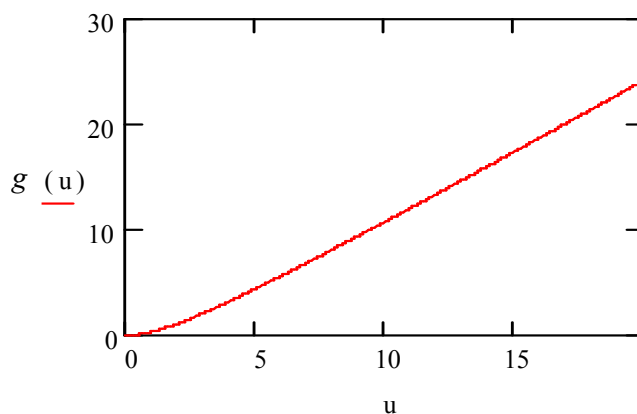


Рис.2.7. Графік функції $g(\cdot)$ для випадку бризерного розв'язку

Бачимо, що функція $g(\cdot)$ належить потрібному нам класу функцій і забезпечує умову локалізації розв'язку, адже при зростанні аргумента вона теж швидко зростає і забезпечує малість збурення за межами області локалізації. На рис.2.8 представлена функція $\tilde{y}(x,t)$ що описує збурення як комбінацію солітона та антисолітона, рис.2.9 - значення функції $\tilde{y}(x,t)$ при фіксованому значенні t .

Таким чином бачимо, що представлення (2.2) описують широкий клас відокремлених локалізованих збурень, що включає в себе і відомі солітонні розв'язки рівняння КдВ як частковий випадок. Наведені вище приклади та співвідношення між параметрами представлень (2.2) показують, що існує цілий клас відокремлених солітоноподібних розв'язків рівняння КдВ, які характеризуються незмінністю їх форми та швидкості при поширенні. Зазначені властивості підводять до необхідності врахування наявності таких хвиль при вирішенні низки технічних задач (наприклад, при розрахунках руху

глибоководних апаратів, при плануванні судноплавних маршрутів в регіонах, де відповідні хвилі виникають за рахунок течій та специфічної форми дна, при проєтуванні схилів гребель, опор мостів, водозливів та лотків).

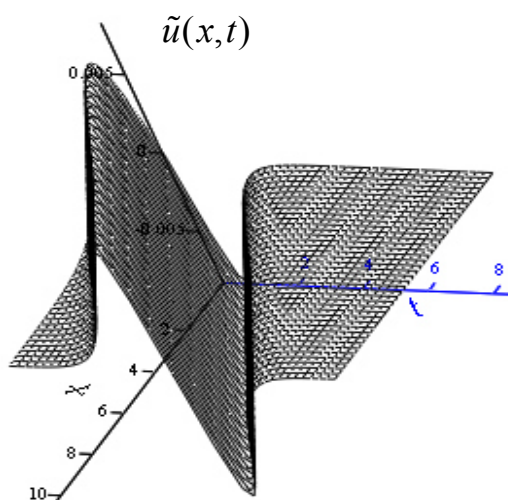


Рис.2.8 Поверхня $\tilde{u}(x, t)$

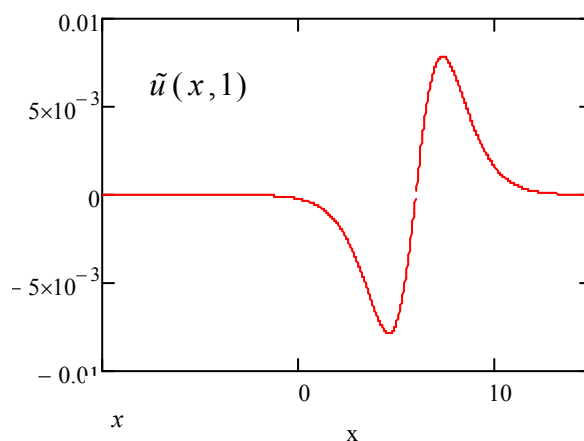


Рис.2.9. Графік $\tilde{u}(x, 1)$

2.2 Метод гауссіанів моделювання одно- та багатосолітонних розв'язків рівнянь типу КдВ

Нехай у представленні (2.2) $g(x - \tilde{x}(t)) = \mathcal{G}(x, t)(x - \tilde{x}(t))^2$ (в даному підрозділі для зручності викладок, не зменшуючи загальності поставлених завдань, вважатимемо, що $\mathcal{G}(x, t) = 1$). В такому випадку збурення являє собою гауссіан. Гауссіани широко використовуються у математичній фізиці при аналізі хвильових процесів а також у наближених обчисленнях, зокрема у вейвлет-перетвореннях.

Зауважимо, що гауссіан досить точно наближає відомий солітонний розв'язок рівняння КдВ виду: $u(x, t) = 2\chi^2 ch^{-2} \chi(x - 4\chi^2 t - \varphi)$. Для ілюстрації цього факту виберемо, наприклад, значення параметра $\chi = 0.224$ солітонного розв'язку та виберемо значення амплітудного параметра гауссіана так, щоб хвилі мали однакові амплітуди. Тоді гауссіан запишеться у вигляді:

$$u(x,t) = 0.10035188398765e^{-\frac{(x-2t-0.04)^2}{24}}. \quad (2.15)$$

Легко підібрати параметр локалізації так, щоб відповідні функції мінімально відхилялись в деякій нормі. На Рис. 2.10 представлені відповідні функції та їх різниця $2\chi^2 ch^{-2} \chi(x - 4\chi^2 t - \varphi) - 0.10035188398765e^{-\frac{(x-2t-0.04)^2}{24}}$. Бачимо, що гауссіан апроксимує солітонний розв'язок рівняння КдВ з точністю до 5×10^{-3} на всій області визначення. Звичайно, це невисока точність з точки зору наближених обчислень, однак слід зауважити, що мова йде про одиночне збурення, для якого найважливішою є точка максимуму. А саме в області точки максимуму гауссіан та точний солітонний розв'язок співпадають. Відповідна похибка виникає лише за рахунок незначного відхилення форми збурень у віддаленій області від точки максимуму. Останнє зауваження робить можливим використання гауссіанів для дослідження солітонів і, особливо, солітон-солітонних взаємодій.

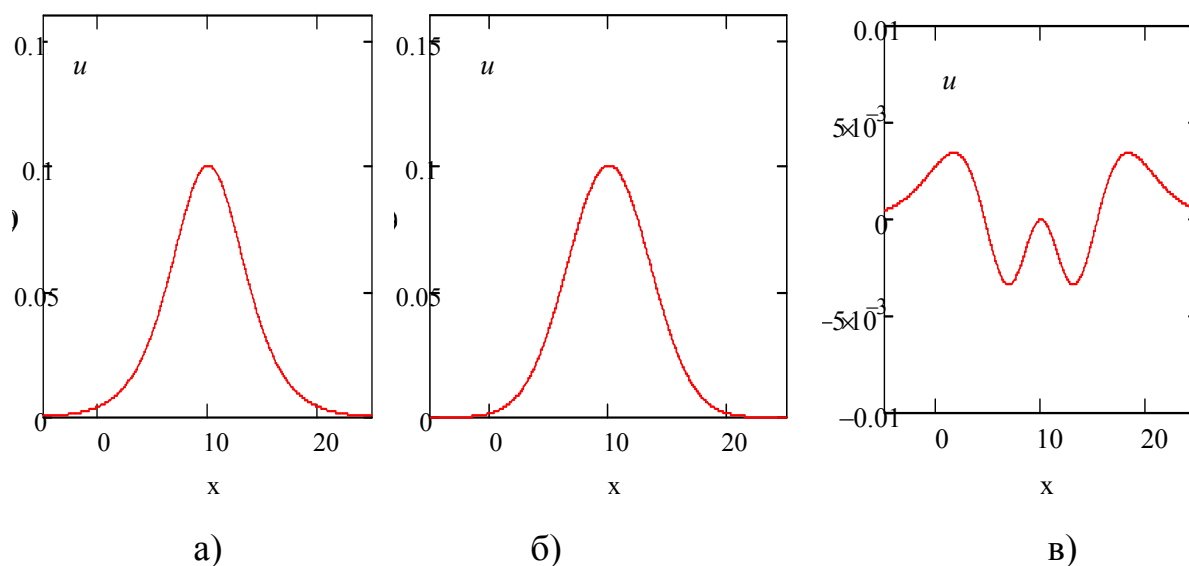


Рис.2.10. Візуалізація гауссіана а), класичного солітона КдВ б) та похибки в)

Зважаючи на специфіку похибки, можемо запропонувати процедуру її мінімізації шляхом додавання відповідних гауссіанів в точках її максимуму чи мінімуму. Так, наприклад, можемо зменшити похибку наближення (2.15), вибираючи функцію для наближеного розв'язку у вигляді:

$$hv(x,t) = 0.00735 \exp(-(x-3t+6.6)^2/16) + 0.008 \exp(-(x-3t-6.5)^2/17) - 0.0007 \exp(-(x-3t+3.5)^2/7) + 0.09889 \exp(-(x-3t)^2/20).$$

Відповідна похибка зображена на рис.2.11. Таким чином, в загальному випадку можемо шукати розв'язок рівнянь типу КдВ у вигляді:

$$u(x,t) = \sum_i \gamma_i \exp(-g(x - \tilde{x}(t) - \delta i)) = \sum_i u_i \text{ або}$$

$$u(x,t) = \sum_i \gamma_i \exp(-(x - \tilde{x}(t) - \delta i)^2 / \varepsilon_i) = \sum_i u_i, \quad (2.16)$$

де δ - деякий параметр, $u_i(x,t) = \gamma_i(t) \exp(-(x - \tilde{x}(t) - \delta i)^2 / \varepsilon)$.

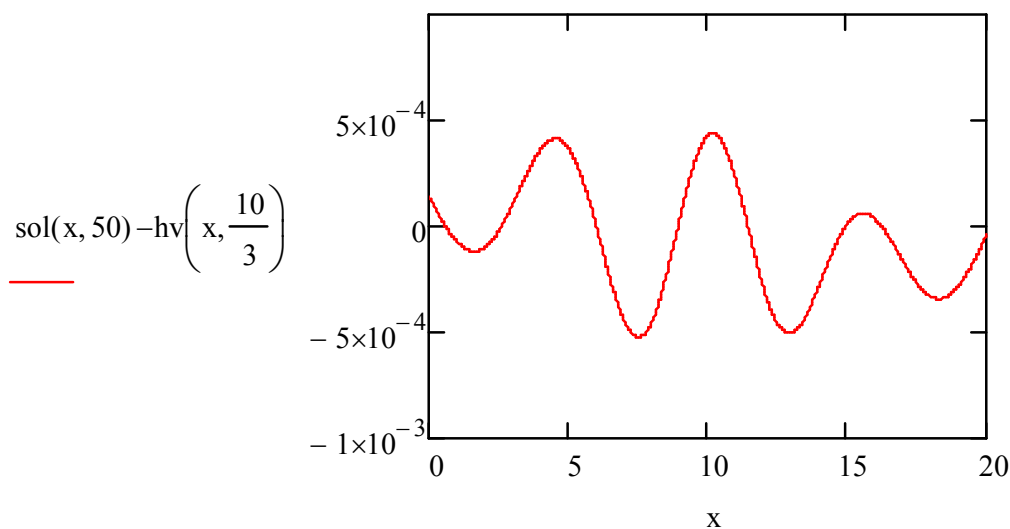


Рис.2.11. Похибка наближення солітона сумою гауссіанів

Відповідні параметри гауссіана слід вибрати з умови мінімізації похибки. Розглянемо цю процедуру детальніше. Підставляючи співвідношення (2.16) в рівняння КдВ маємо:

$$\sum_i (u_i)_t + 6 \sum_i u_i \sum_i (u_i)_x + \sum_i (u_i)_{xxx} = 0. \quad (2.17)$$

Зауважимо, що параметр δ завжди можна вибрати так, щоб виконувалась умова:

$$|u_i u_j| \leq \varepsilon_1, |i - j| \geq 2, \quad (2.18)$$

де ε_1 - малий параметр. Тоді рівняння (2.17) запишеться у вигляді:

$$\sum_i (u_i)_t + 6 \sum_i (u_i (u_i)_x + u_i (u_{i+1})_x + u_i (u_{i-1})_x) + \sum_i (u_i)_{xxx} = o(\varepsilon_1).$$

Знайдемо умову, якій повинен задовольняти параметр δ , щоб виконувалась нерівність (2.18). Маємо: $u_i(x, t) = \gamma_i \exp(-(x - \tilde{x}(t) - \delta i)^2 / \varepsilon)$,

$$u_{i+1}(x, t) = \gamma_{i+1} \exp(-(x - \tilde{x}(t) - \delta(i+1))^2 / \varepsilon),$$

$$\exp(-(x - \tilde{x}(t) - \delta i)^2 / \varepsilon - (x - \tilde{x}(t) - \delta(i+k))^2 / \varepsilon) \leq \varepsilon_1 / \gamma_i \gamma_{i+k}.$$

Введемо функцію $f(y) = \exp(-y^2 / \varepsilon - (y - k\delta)^2 / \varepsilon)$.

Точкою максимуму функції $f(y)$ є точка $y = k\delta / 2$,

$$f(k\delta / 2) = \exp(-(k\delta)^2 / (4\varepsilon) - (k\delta)^2 / (4\varepsilon)) = \exp(-(k\delta)^2 / (2\varepsilon)).$$

Звідси маємо нерівності: $\exp(-(k\delta)^2 / (2\varepsilon)) \leq \varepsilon_1 / \gamma_i \gamma_{i+k}$, $\delta^2 \geq -2\varepsilon \ln(\varepsilon_1 / \gamma_i \gamma_{i+k}) / k^2$,

$$\delta^2 / \varepsilon \geq -2 \ln(\varepsilon_1 / \gamma_i \gamma_{i+k}) / k^2. \text{ Отже } \delta = \max_i \sqrt{-2\varepsilon \ln(\varepsilon_1 / \gamma_i \gamma_{i+k}) / k^2}.$$

Введемо поняття фактичної та відносної областей локалізації солітона.

Фактичну область локалізації рівня ε_1 можемо визначити так:

$$D_f = \{x : |x| \leq (-\varepsilon \ln(\varepsilon_1^{1/2} / \gamma_i))^{1/2}\}.$$

Це поняття впливає з очевидних нерівностей: $\gamma \exp(-z^2 / \varepsilon) \geq \varepsilon_1$, $-z^2 / \varepsilon \geq \ln(\varepsilon_1 / \gamma)$, $z \leq (-\varepsilon \ln(\varepsilon_1 / \gamma))^{1/2}$.

Відносна область локалізації (для малих амплітуд) з параметром ε_1

визначимо так: $D_v = \{x : |x| \leq (-\varepsilon \ln(\varepsilon_1))^{1/2}\}$. Це визначення впливає з

нерівності: $\gamma \exp(-z^2 / \varepsilon) / \gamma \geq \varepsilon_1$ або $z \leq (-\varepsilon \ln(\varepsilon_1))^{1/2}$.

Записавши додаткову умову випуклості розв'язку: $(u_i + u_{i+1})'' \leq 0$, отримуємо задачу нелінійного програмування:

$$\delta \rightarrow \max,$$

$$0 \leq y \leq \delta, \delta \geq 0,$$

$$\begin{aligned} & -2\gamma_i \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon + 4y^2 \gamma_i \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon^2 - 2\gamma_{i+1} \exp(-(y - \delta)^2 / \varepsilon) / \varepsilon + \\ & + 4(y - \delta)^2 \gamma_{i+1} \exp(-(y - \delta)^2 / \varepsilon) / \varepsilon^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Таким чином, можемо знайти максимальне значення параметра δ .

У випадку, коли $g(x - \tilde{x}(t) - \delta i) = (x - \tilde{x}(t) - \delta i)^2 / \varepsilon$, відповідні похідні мають вигляд:

$$u_{i_x} = -2(x - \tilde{x}(t) - \delta i)u_i / \varepsilon;$$

$$u_{i_{xx}} = -2u_i / \varepsilon + 4(x - \tilde{x}(t) - \delta i)^2 u_i / \varepsilon^2;$$

$$u_{i_{xxx}} = 12(x - \tilde{x}(t) - \delta i)u_i / \varepsilon^2 - 8(x - \tilde{x}(t) - \delta i)^3 u_i / \varepsilon^3;$$

$$u_{i_t} = \gamma_i'(t) \exp(-(x - \tilde{x}(t) - \delta i)^2 / \varepsilon) + 2(x - \tilde{x}(t) - \delta i)\tilde{x}'(t)u_i / \varepsilon.$$

Підставляючи відповідні представлення в КдВ, маємо:

$$\begin{aligned} & (\gamma_i'(t)\varepsilon / \gamma_i(t) + 2(x - \tilde{x}(t) - \delta i)\tilde{x}'(t) - \\ & - 12(x - \tilde{x}(t) - \delta i)u_i + 12(x - \tilde{x}(t) - \delta i) / \varepsilon - 8(x - \tilde{x}(t) - \delta i)^3 / \varepsilon^2)u_i / \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Зауважимо, що при $x - \tilde{x}(t) - \delta i = 0$ та малому околі точки розв'язок у вигляді (2.2) можливий лише у випадку, коли $\gamma_i'(t) = 0$.

Отже, будемо знаходити параметри гауссіана з умови мінімуму функціоналу виду:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\gamma_i'(t) \exp(-(x - \tilde{x}(t) - \delta i)^2 / \varepsilon) + 2(x - \tilde{x}(t) - \delta i)\tilde{x}'(t)u_i / \varepsilon - \\ & - 12(x - \tilde{x}(t) - \delta i)u_i u_i / \varepsilon + 12(x - \tilde{x}(t) - \delta i) / \varepsilon^2 - 8(x - \tilde{x}(t) - \\ & - \delta i)^3 u_i / \varepsilon^3)^2 dx dt \rightarrow \min_{\gamma_i, \tilde{x}(t), \varepsilon} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Введемо нову змінну $x - \tilde{x}(t) - \delta i = y$. Тоді маємо задачу:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\gamma_i'(t) + 2y\tilde{x}'(t)\gamma_i(t) / \varepsilon - 12y\gamma_i^2(t) \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon + \\ & + 12y\gamma_i(t) / \varepsilon^2 - 8y^3\gamma_i(t) / \varepsilon^3)^2 \exp(-2y^2 / \varepsilon) dy dt \rightarrow \min_{\gamma_i, \tilde{x}(t), \varepsilon} \end{aligned}$$

Нехай $\tilde{x}(t) = vt$, $\gamma_i(t) = \gamma$. При підстановці в рівняння КдВ отримуємо рівність:

$$2(v - 6\gamma \exp(-(x - vt)^2 / \varepsilon) + 6 / \varepsilon - 4(x - vt)^2 / \varepsilon^2)\gamma(x - vt) \exp(-(x - vt)^2 / \varepsilon) / \varepsilon = 0$$

або, з врахуванням заміни, $x - vt = y$ маємо:

$$2(v - 6\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon) + 6 / \varepsilon - 4y^2 / \varepsilon^2)\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon = 0.$$

Тоді будемо підбирати параметри так, щоб мінімізувати функцію:

$$X(\varepsilon, v, \gamma) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} (v - 6\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon) + 6 / \varepsilon - 4y^2 / \varepsilon^2)^2 \gamma^2 y^2 \exp(-2y^2 / \varepsilon) / \varepsilon^2 dy.$$

Звідси

$$\begin{aligned} & v^2 - 6\gamma v \exp(-y^2 / \varepsilon) + 6v / \varepsilon - 4vy^2 / \varepsilon^2 - \\ & - 6\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon)v + 36\gamma^2 \exp(-2y^2 / \varepsilon) - 36\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon + \\ & + 24\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon)y^2 / \varepsilon^2 + 6v / \varepsilon - 36\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon + 36 / \varepsilon^2 - \\ & - 24y^2 / \varepsilon^3 - 4y^2v / \varepsilon^2 + 24\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon)y^2 / \varepsilon^2 - 24y^2 / \varepsilon^3 + 16y^4 / \varepsilon^4 = \\ & = v^2 - 12\gamma v \exp(-y^2 / \varepsilon) + 12v / \varepsilon - 8vy^2 / \varepsilon^2 + 36\gamma^2 \exp(-2y^2 / \varepsilon) - \\ & - 72\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon + 48\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon)y^2 / \varepsilon^2 + 36 / \varepsilon^2 - 48y^2 / \varepsilon^3 + 16y^4 / \varepsilon^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(\varepsilon, v, \gamma) &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} (v^2 - 12\gamma v \exp(-y^2 / \varepsilon) + 12v / \varepsilon - 8vy^2 / \varepsilon^2 + 36\gamma^2 \exp(-2y^2 / \varepsilon) - \\ & - 72\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon) / \varepsilon + 48\gamma \exp(-y^2 / \varepsilon)y^2 / \varepsilon^2 + 36 / \varepsilon^2 - 48y^2 / \varepsilon^3 + 16y^4 / \varepsilon^4) \times \\ & \times \gamma^2 y^2 \exp(-2y^2 / \varepsilon) / \varepsilon^2 dy; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(\varepsilon, v, \gamma) &= 4\gamma^2 / \varepsilon^2 (v^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-2y^2 / \varepsilon) dy - 12\gamma v \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-3y^2 / \varepsilon) dy + \\ & + 12v / \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-2y^2 / \varepsilon) dy - 8v / \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^4 \exp(-2y^2 / \varepsilon) dy + \\ & + 36\gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-4y^2 / \varepsilon) dy - 72\gamma / \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-3y^2 / \varepsilon) dy + \\ & + 48\gamma / \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-3y^2 / \varepsilon) y^4 dy + 36 / \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-2y^2 / \varepsilon) dy - \\ & - 48 / \varepsilon^3 \int_{-\infty}^{\infty} y^4 \exp(-2y^2 / \varepsilon) dy + 16 / \varepsilon^4 \int_{-\infty}^{\infty} y^6 \exp(-2y^2 / \varepsilon) dy). \end{aligned}$$

З врахуванням значень наступних інтегралів

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-2y^2 / \varepsilon) dy &= \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} 2y^2 / \varepsilon \exp(-2y^2 / \varepsilon) d(\sqrt{2}y / \sqrt{\varepsilon}) = \\ &= \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \exp(-s^2) d(s) = \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-3y^2 / \varepsilon) dy &= \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{3\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{3}y / \sqrt{\varepsilon})^2 \exp(-3y^2 / \varepsilon) d(\sqrt{3}y / \sqrt{\varepsilon}) = \\ &= \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{3\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} (s)^2 \exp(-s^2) ds = \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{6\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^4 \exp(-2y^2 / \varepsilon) dy = \frac{\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (s)^4 \exp(-s^2) ds = \frac{3\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{16\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-4y^2 / \varepsilon) dy &= \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{8} \int_{-\infty}^{\infty} 4y^2 / \varepsilon \exp(-4y^2 / \varepsilon) d(2y / \sqrt{\varepsilon}) = \\ &= \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{8} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \exp(-s^2) d(s) = \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{16}, \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^4 \exp(-3y^2 / \varepsilon) dy = \frac{\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon}}{9\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} (s)^4 \exp(-s^2) ds = \frac{3\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{36\sqrt{3}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^6 \exp(-2y^2 / \varepsilon) dy = \frac{\varepsilon^3 \sqrt{\varepsilon}}{8\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (s)^6 \exp(-s^2) ds = \frac{15\sqrt{\pi} \varepsilon^3 \sqrt{\varepsilon}}{64\sqrt{2}},$$

отримуємо остаточний вираз для функції $X(\varepsilon, v, \gamma)$:

$$\begin{aligned} X(\varepsilon, v, \gamma) &= 4\gamma^2 / \varepsilon^2 (v^2 \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{2}} - 12\gamma v \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{6\sqrt{3}} + \\ &+ 12v / \varepsilon \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{2}} - 8v / \varepsilon^2 \frac{3\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{16\sqrt{2}} + 36\gamma^2 \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{16} - \\ &- 72\gamma / \varepsilon \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{6\sqrt{3}} + 48\gamma / \varepsilon^2 \frac{3\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{36\sqrt{3}} + 36 / \varepsilon^2 \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{2}} - \\ &- 48 / \varepsilon^3 \frac{3\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{16\sqrt{2}} + 16 / \varepsilon^4 \frac{15\sqrt{\pi} \varepsilon^3 \sqrt{\varepsilon}}{64\sqrt{2}}) = \\ &= 4\gamma^2 / \varepsilon^2 (v^2 \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{2}} - 2\gamma v \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} + 3v \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} - v \frac{3\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + 9\gamma^2 \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{4} - \\ &- 12\gamma \frac{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} + 4\gamma \frac{3\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} + 9 \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}\varepsilon} - 3 \frac{3\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi}}{\varepsilon \sqrt{2}} + \frac{15\sqrt{\pi} \sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{2}\varepsilon}) = \\ &= 4\gamma^2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\pi} (\frac{v^2}{4\sqrt{2}\varepsilon} - \frac{2\gamma v}{\varepsilon \sqrt{3}} + \frac{3v}{2\sqrt{2}\varepsilon^2} + \frac{9\gamma^2}{4\varepsilon} - \frac{8\gamma}{\varepsilon^2 \sqrt{3}} + \frac{15}{4\sqrt{2}\varepsilon^3}). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Зауважимо, що функція (2.20) дозволить отримувати співвідношення між основними параметрами солітона v , γ , ε . Очевидно, що нас цікавитимуть співвідношення між парами параметрів, зокрема, амплітудою та швидкістю, областю локалізації та амплітудою при фіксованому третьому параметрі.

Приклади відповідних поверхонь при конкретних значеннях параметрів

зображені на рис.2.12: при $\gamma = 0.4$ поверхня зображена на рис.2.12. а), при $\varepsilon = 6.74$ – на рис.2.12. б), при $\nu = 0.195$ – на рис.2.14.

Аналізуючи відповідні поверхні, знаходимо залежність між двома параметрами при фіксованому третьому з врахуванням мінімуму відповідного функціоналу. Наприклад, залежність між швидкістю та амплітудою солітона при фіксованому значенні параметра локалізації має вигляд:

$$\frac{2\nu}{4\sqrt{2\varepsilon}} - \frac{2\gamma}{\varepsilon\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{2\varepsilon^2}} = 0.$$

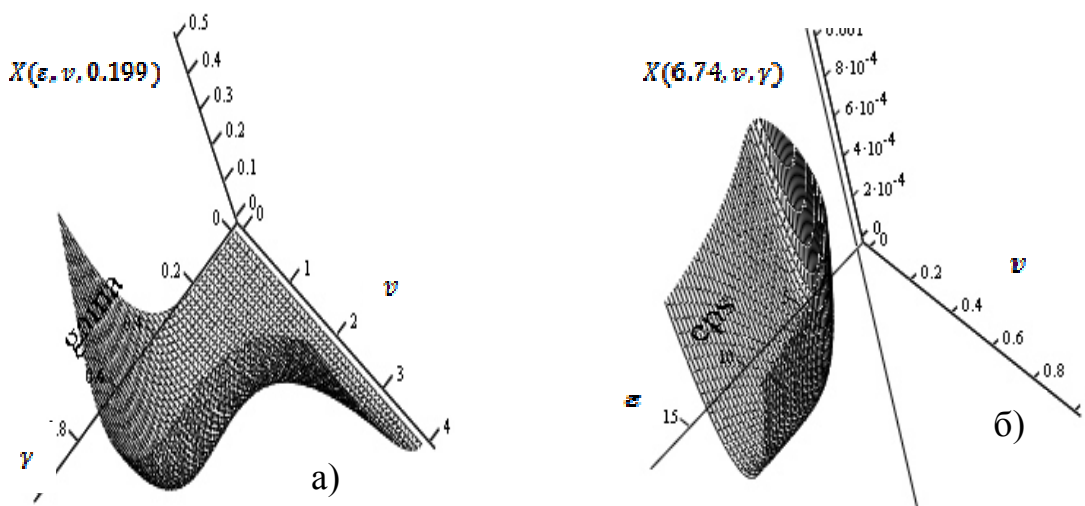


Рис.2.12. Поверхні : а) $X(\varepsilon, \nu, 0.199)$ б) $X(6.74, \nu, \gamma)$

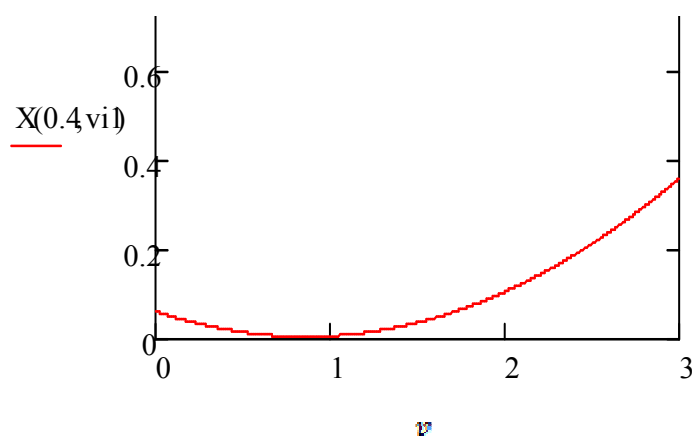


Рис.2.13. Графік функції $X(6.74, \nu, 0.4)$

Лінійний характер залежності добре корелюється з точними розв'язками рівняння КдВ. Аналіз залежності амплітуди та швидкості показує, що хвилі з більшою амплітудою мають більшу швидкість.

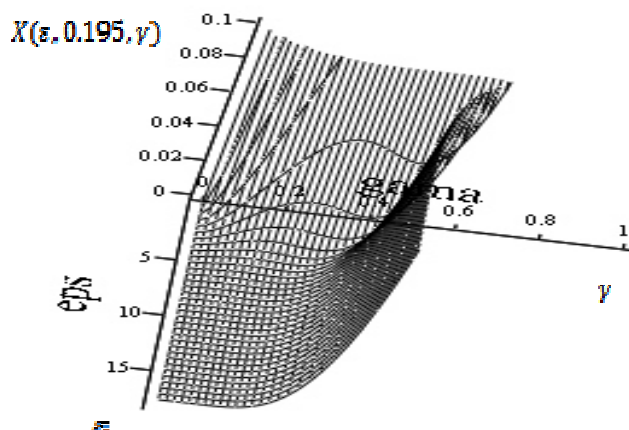


Рис.2.14. Поверхня $X(\varepsilon, 0.195, \gamma)$

Розглянутий вище підхід можемо застосувати і у випадку багатосолітонних розв'язків. Будемо знаходити розв'язок рівняння КдВ у вигляді:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = \gamma_1(t) \exp(-(x - v_1 t - x_1^0)^2 / \varepsilon_1) + \gamma_2(t) \exp(-(x - v_2 t - x_2^0)^2 / \varepsilon_2).$$

Підставляючи в рівняння КдВ маємо:

$$\begin{aligned} & (u_1)_t + (u_2)_t + 6(u_1 + u_2)(u_{1x} + u_{2x}) + u_{1xxx} + u_{2xxx} = 0, \\ & \gamma_1'(t) \exp(-(x - v_1 t - x_1^0)^2 / \varepsilon_1) + 2(x - v_1 t - x_1^0) v_1 u_1 / \varepsilon_1 + \\ & + \gamma_2'(t) \exp(-(x - v_2 t - x_2^0)^2 / \varepsilon_2) + 2(x - v_2 t - x_2^0) v_2 u_2 / \varepsilon_2 + \\ & + 6(u_1 + u_2)(-2(x - v_1 t - x_1^0) u_1 / \varepsilon_1 - 2(x - v_2 t - x_2^0) u_2 / \varepsilon_2) + \\ & + (12(x - v_1 t - x_1^0) / \varepsilon_1^2 - 8(x - v_1 t - x_1^0)^3 / \varepsilon_1^3) u_1 + \\ & + (12(x - v_2 t - x_2^0) / \varepsilon_2^2 - 8(x - v_2 t - x_2^0)^3 / \varepsilon_2^3) u_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Зауважимо, що в такому випадку амплітуда не є константою. Далі будемо знаходити амплітудні коефіцієнти обох хвиль, при цьому швидкісні та локалізаційні параметри вважатимемо заданими.

З рівняння (2.21) випливає:

$$\begin{aligned}
& \gamma_1'(t) \exp(-(x - v_1 t - x_1^0)^2 / \varepsilon_1) + \\
& + 2(x - v_1 t - x_1^0) v_1 \gamma_1(t) \exp(-(x - v_1 t - x_1^0)^2 / \varepsilon_1) / \varepsilon_1 + \\
& + \gamma_2'(t) \exp(-(x - v_2 t - x_2^0)^2 / \varepsilon_2) + \\
& + 2(x - v_2 t - x_2^0) v_2 \gamma_2(t) \exp(-(x - v_2 t - x_2^0)^2 / \varepsilon_2) / \varepsilon_2 + \\
& + 6(\gamma_1(t) \exp(-(x - v_1 t - x_1^0)^2 / \varepsilon_1) + \gamma_2(t) \exp(-(x - v_2 t - x_2^0)^2 / \varepsilon_2)) \times \\
& \times (-2(x - v_1 t - x_1^0) \gamma_1(t) \exp(-(x - v_1 t - x_1^0)^2 / \varepsilon_1) / \varepsilon_1 - \\
& - 2(x - v_2 t - x_2^0) \gamma_2(t) \exp(-(x - v_2 t - x_2^0)^2 / \varepsilon_2) / \varepsilon_2) + \\
& + (12(x - v_1 t - x_1^0) / \varepsilon_1^2 - 8(x - v_1 t - x_1^0)^3 / \varepsilon_1^3) \gamma_1(t) \exp(-(x - v_1 t - x_1^0)^2 / \varepsilon_1) + \\
& + (12(x - v_2 t - x_2^0) / \varepsilon_2^2 - 8(x - v_2 t - x_2^0)^3 / \varepsilon_2^3) \gamma_2(t) \exp(-(x - v_2 t - x_2^0)^2 / \varepsilon_2) = 0.
\end{aligned}$$

Нехай $f_1 = x - v_1 t - x_1^0$, $f_2 = x - v_2 t - x_2^0$. Звідси

$$\begin{aligned}
& \gamma_1'(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) + 2f_1 v_1 \gamma_1(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) / \varepsilon_1 + \gamma_2'(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2) + \\
& + 2f_2 v_2 \gamma_2(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2) / \varepsilon_2 - \\
& - 12(\gamma_1(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) + \gamma_2(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2))(f_1 \gamma_1(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) / \varepsilon_1 + \\
& + f_2 \gamma_2(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2) / \varepsilon_2) + (12f_1 / \varepsilon_1^2 - 8f_1^3 / \varepsilon_1^3) \gamma_1(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) + \\
& + (12f_2 / \varepsilon_2^2 - 8f_2^3 / \varepsilon_2^3) \gamma_2(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2) = 0.
\end{aligned}$$

Отже, будемо мінімізувати функціонал:

$$\begin{aligned}
& \int_{-a}^a (\gamma_1'(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) + 2f_1 v_1 \gamma_1(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) / \varepsilon_1 + \gamma_2'(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2) + \\
& + 2f_2 v_2 \gamma_2(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2) / \varepsilon_2 - 12(\gamma_1(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) + \\
& + \gamma_2(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2))(f_1 \gamma_1(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) / \varepsilon_1 + \\
& + f_2 \gamma_2(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2) / \varepsilon_2) + (12f_1 / \varepsilon_1^2 - 8f_1^3 / \varepsilon_1^3) \gamma_1(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) + \\
& + (12f_2 / \varepsilon_2^2 - 8f_2^3 / \varepsilon_2^3) \gamma_2(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2))^2 dx \rightarrow \min_{\gamma_1, \gamma_2}
\end{aligned}$$

вважаючи, що параметри $\gamma_1(t), \gamma_1'(t), \gamma_2(t), \gamma_2'(t)$ є константами для деяких дискретних значень часу. Записавши відповідні похідні, отримуємо систему рівнянь виду:

$$\begin{aligned}
& \int_{-a}^a 2(\gamma_1'(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) + 2f_1 v_1 \gamma_1(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) / \varepsilon_1 + \gamma_2'(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2) + \\
& + 2f_2 v_2 \gamma_2(t) \exp(-f_2^2 / \varepsilon_2) / \varepsilon_2 - 12(\gamma_1(t) \exp(-f_1^2 / \varepsilon_1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))(f_1\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + \\
& +f_2\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + (12f_1/\varepsilon_1^2 - 8f_1^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + \\
& + (12f_2/\varepsilon_2^2 - 8f_2^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))(\exp(-f_1^2/\varepsilon_1))dx = 0, \\
& \int_{-a}^a 2(\gamma_1'(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + 2f_1v_1\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + \gamma_2'(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2) + \\
& + 2f_2v_2\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - 12(\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + \\
& + \gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))(f_1\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + f_2\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + \\
& + (12f_1/\varepsilon_1^2 - 8f_1^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + \\
& + (12f_2/\varepsilon_2^2 - 8f_2^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))(\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))dx = 0, \\
& \int_{-a}^a 2(\gamma_1'(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + 2f_1v_1\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + \gamma_2'(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2) + \\
& + 2f_2v_2\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - 12(\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + \\
& + \gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))(f_1\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + f_2\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + \\
& + (12f_1/\varepsilon_1^2 - 8f_1^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + (12f_2/\varepsilon_2^2 - \\
& - 8f_2^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))(2f_1v_1\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + \\
& + (12f_1/\varepsilon_1^2 - 8f_1^3/\varepsilon_1^3)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) - 12\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) \times \\
& \times (f_1\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + f_2\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) - \\
& - 12(\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + \gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))f_1\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1)dx = 0, \\
& \int_{-a}^a 2(\gamma_1'(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + 2f_1v_1\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + \gamma_2'(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2) + \\
& + 2f_2v_2\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - 12(\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + \\
& + \gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))(f_1\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + f_2\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + \\
& + (12f_1/\varepsilon_1^2 - 8f_1^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + (12f_2/\varepsilon_2^2 - 8f_2^3/\varepsilon_2^3) \times \\
& \times \gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))(2f_2v_2\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 + \\
& + (12f_2/\varepsilon_2^2 - 8f_2^3/\varepsilon_2^3)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2) - 12\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)(f_1\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + \\
& + f_2\gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) - 12(\gamma_1(t)\exp(-f_1^2/\varepsilon_1) + \\
& + \gamma_2(t)\exp(-f_2^2/\varepsilon_2))f_2\exp(-f_2^2/\varepsilon_2)/\varepsilon_2)dx = 0.
\end{aligned}$$

Вибираючи початкові параметри $v_1 = 0.19517$, $\varepsilon_1 = 6.7413$, $\gamma_1 = 0.193$, $v_2 = 0.37314$, $\varepsilon_2 = 28.401$, $\gamma_2 = 0.1$, отримуємо графіки функцій $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, зображені на рис.2.15 відповідно та суму цих функцій, зображену на рис.2.16.

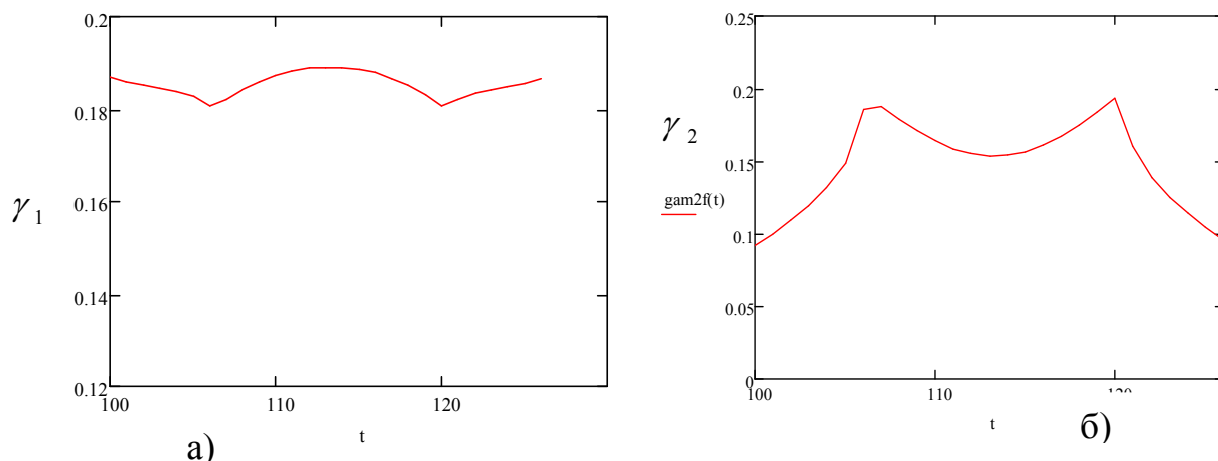


Рис.2.15. Графіки функцій: $\gamma_1 = \gamma_1(t)$ а), $\gamma_2 = \gamma_2(t)$ б)

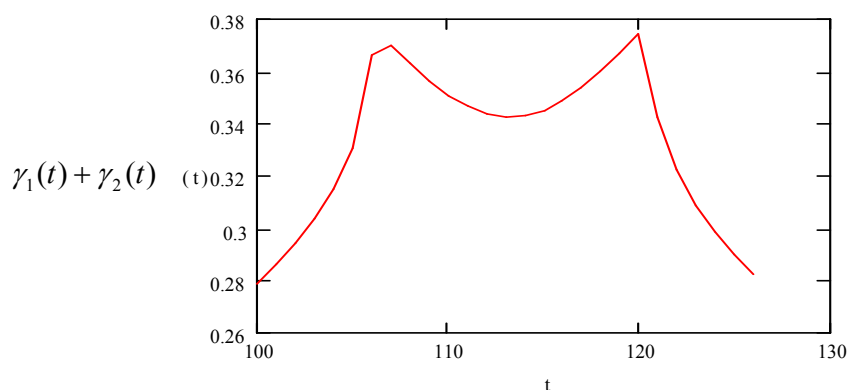


Рис.2.16. Графік функції $\gamma_1(t) + \gamma_2(t)$

Як відомо, для класичного солітонного розв'язку рівняння КдВ швидкість дорівнює подвійній амплітуді. $v_i(t) = 2\gamma_i$. Тому можемо аналогічно розглянути деяке узагальнення, коли $v_i(t) = c_i\gamma_i(t)$.

2.3 Метод моделювання багатосолітонних взаємодій на основі Т-представлень

Розглянутий вище підхід до знаходження амплітудних характеристик відокремлених хвиль дозволяє знайти їх лише наближено. Однак ідея виокремлення саме амплітудних функцій без врахування профілю хвиль привела до методу, який дозволить знаходити точно відповідні амплітудні функції та буде розглянутий в даному параграфі.

Нехай $u_i(x,t) = \gamma_i \exp(-g_i(x - \tilde{x}_i(t))/\varepsilon_i)$, $i = 1,2$ – розв'язки рівняння КдВ. Очевидно, що функція $u_1(x,t) + u_2(x,t)$ не є розв'язком рівняння КдВ в силу

його нелінійності. Тому розглянемо наступне узагальнення. Нехай параметри, що визначають амплітуди, є функціями часу, $\gamma_i = \gamma_i(t)$, $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$. Введемо деякі ефективні радіуси локалізації солітонів: $R_\delta^1 = \min\{R : |u_1(x,t)| < \delta, |x - \tilde{x}_1(t)| > R\}$,

$$R_\delta^2 = \min\{R : |u_2(x,t)| < \delta, |x - \tilde{x}_2(t)| > R\}.$$

Позначимо відповідно $G_\delta^1(t) = \{x : |x - \tilde{x}_1(t)| < R_\delta^1\}$, $G_\delta^2(t) = \{x : |x - \tilde{x}_2(t)| < R_\delta^2\}$. Очевидно, що функція $u(x,t)$ задовольнятиме рівняння КдВ в області $\{G_\delta^1 \cap \overline{G_\delta^2} \cup \overline{G_\delta^1} \cap G_\delta^2 \cup \overline{G_\delta^1} \cap \overline{G_\delta^2}\}$ з точністю $O(\delta)$, якщо $u_i(x,t)$ є точними розв'язками рівняння КдВ.

Нехай виконується умова: $\gamma_i(t) = \gamma_i = const$ при $|\tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t)| > R_\delta^1 + R_\delta^2$.

Підставивши суму $u_1(x,t) + u_2(x,t)$ в рівняння КдВ, отримуємо:

$$\begin{aligned} & (u_1)_t + (u_2)_t + 6(u_1 + u_2)(u_{1x} + u_{2x}) + u_{1xxx} + u_{2xxx} = 0, \\ & \gamma_1'(t) \exp(-g_1(x - \tilde{x}_1(t)) / \varepsilon_1) + g_1'(x - \tilde{x}_1(t)) \tilde{x}_1'(t) u_1 / \varepsilon_1 + \\ & + \gamma_2'(t) \exp(-g_2(x - \tilde{x}_2(t)) / \varepsilon_2) + g_2'(x - \tilde{x}_2(t)) \tilde{x}_2'(t) u_2 / \varepsilon_2 + \\ & + 6(u_1 + u_2)(-g_1'(x - \tilde{x}_1(t)) u_1 / \varepsilon_1 - g_2'(x - \tilde{x}_2(t)) u_2 / \varepsilon_2) + \\ & + (-g_1'''(x - \tilde{x}_1(t)) / \varepsilon_1 + 3g_1'(x - \tilde{x}_1(t)) g_1''(x - \tilde{x}_1(t)) / \varepsilon_1^2 - \\ & - (g_1'(x - \tilde{x}_1(t)))^3 / \varepsilon_1^3) u_1 + ((-g_2'''(x - \tilde{x}_2(t)) / \varepsilon_2 + 3g_2'(x - \\ & - \tilde{x}_2(t)) g_2''(x - \tilde{x}_2(t)) / \varepsilon_2^2 - (g_2'(x - \tilde{x}_2(t)))^3 / \varepsilon_2^3) u_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

При $x = \tilde{x}_1(t)$ та $x = \tilde{x}_2(t)$, з рівняння (2.22) отримуємо систему:

$$\begin{aligned} & \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t) \exp(-g_2(-d(t)) / \varepsilon_2) + g_2'(-d(t)) \tilde{x}_2'(t) \gamma_2(t) \times \\ & \times \exp(-g_2(-d(t)) / \varepsilon_2) / \varepsilon_2 + 6(\gamma_1(t) + \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t)) / \varepsilon_2)) \times \\ & \times (-g_2'(-d(t)) u_2 / \varepsilon_2) + (-g_2'''(-d(t)) / \varepsilon_2 + 3g_2'(-d(t)) g_2''(-d(t)) / \varepsilon_2^2 - \\ & - (g_2'(-d(t)))^3 / \varepsilon_2^3) \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t)) / \varepsilon_2) = 0, \\ & \gamma_1'(t) \exp(-g_1(d(t)) / \varepsilon_1) + \gamma_2'(t) + g_1'(d(t)) \tilde{x}_1'(t) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d(t)) / \varepsilon_1) / \varepsilon_1 + \\ & + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(d(t)) / \varepsilon_1) + \gamma_2(t)) (-g_1'(d(t)) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d(t)) / \varepsilon_1) / \varepsilon_1) + \\ & + (-g_1'''(d(t)) / \varepsilon_1 + 3g_1'(d(t)) g_1''(d(t)) / \varepsilon_1^2 - \\ & - (g_1'(d(t)))^3 / \varepsilon_1^3) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d(t)) / \varepsilon_1) = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

де $d(t) = \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t)$. Звідси:

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) = & -g_2'(-d(t))\tilde{x}_2'(t)\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - \\
& -6(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_2'(-d(t))\gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + (g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 - 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 + \\
& + (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2) - \\
& -(-g_1'(d(t))\tilde{x}_1'(t)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - \\
& -6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t))(-g_1'(d(t))\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1) + \\
& + (g_1'''(d(t))/\varepsilon_1 - 3g_1'(d(t))g_1''(d(t))/\varepsilon_1^2 + (g_1'(d(t)))^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t) \times \\
& \times \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/(1 - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d(t))/\varepsilon_2)); \\
\gamma_2'(t) = & -g_1'(d(t))\tilde{x}_1'(t)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - \\
& -6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t))(-g_1'(d(t))\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1) + \\
& + (g_1'''(d(t))/\varepsilon_1 - 3g_1'(d(t))g_1''(d(t))/\varepsilon_1^2 + (g_1'(d(t)))^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t) \times \\
& \times \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)(-g_2'(-d(t))\tilde{x}_2'(t)\gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - 6(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_2'(- \\
& -d(t))\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + \\
& + (g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 - 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 + (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/(1 - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d(t))/\varepsilon_2)). \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Записавши очевидні початкові умови $\gamma_1(0) = \gamma_1, \gamma_2(0) = \gamma_2$, отримуємо задачу Коші відносно невідомих амплітудних функцій $\gamma_i(t)$, яку можемо розв'язати при відомих швидкостях руху хвиль $\tilde{x}_1'(t), \tilde{x}_2'(t)$. Таким чином, знаходимо наближені розв'язки рівняння КдВ у деякому околі множини: $\Omega_1 = \{(x, t) : x = \tilde{x}_1(t) \vee x = \tilde{x}_2(t)\}$ (точні розв'язки в деякому граничному їх розумінні).

Нехай, наприклад, $\tilde{x}_i'(t) = c_i \gamma_i(t), c_i = 2, i = 1, 2$. Випадок, коли $c_i = 2$, відповідає відомому солітонному розв'язку рівняння КдВ, для якого модуль швидкості рівний подвійній амплітуді. Тоді з (2.24) отримуємо систему:

$$\tilde{x}_1'(t) = 2\gamma_1(t),$$

$$\tilde{x}_2'(t) = 2\gamma_2(t),$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) = & -g_2'(-d(t))c_2\gamma_2^2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - \\
& -6(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_2'(-d(t))\gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + (g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 - 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 + \\
& + (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2) - (-g_1'(d(t))\tilde{x}_1'(t)\gamma_1(t) \times \\
& \times \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - 6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t))(-g_1'(d(t))\gamma_1(t) \times \\
& \times \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1) + (g_1'''(d(t))/\varepsilon_1 - 3g_1'(d(t))g_1''(d(t))/\varepsilon_1^2 + \\
& + (g_1'(d(t)))^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1))\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)) / (1 - \\
& - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d(t))/\varepsilon_2)), \\
\gamma_2'(t) = & -g_1'(d(t))c_1\gamma_1^2(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - \\
& -6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t))(-g_1'(d(t))\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1) + \\
& + (g_1'''(d(t))/\varepsilon_1 - 3g_1'(d(t))g_1''(d(t))/\varepsilon_1^2 + (g_1'(d(t)))^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(- \\
& - g_1(d(t))/\varepsilon_1) - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)(-g_2'(-d(t))\tilde{x}_2'(t)\gamma_2(t)\exp(- \\
& - g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - 6(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_2'(-d(t))\gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + (g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 - 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 + \\
& + (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)) / (1 - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - \\
& - g_2(-d(t))/\varepsilon_2)). \tag{2.25}
\end{aligned}$$

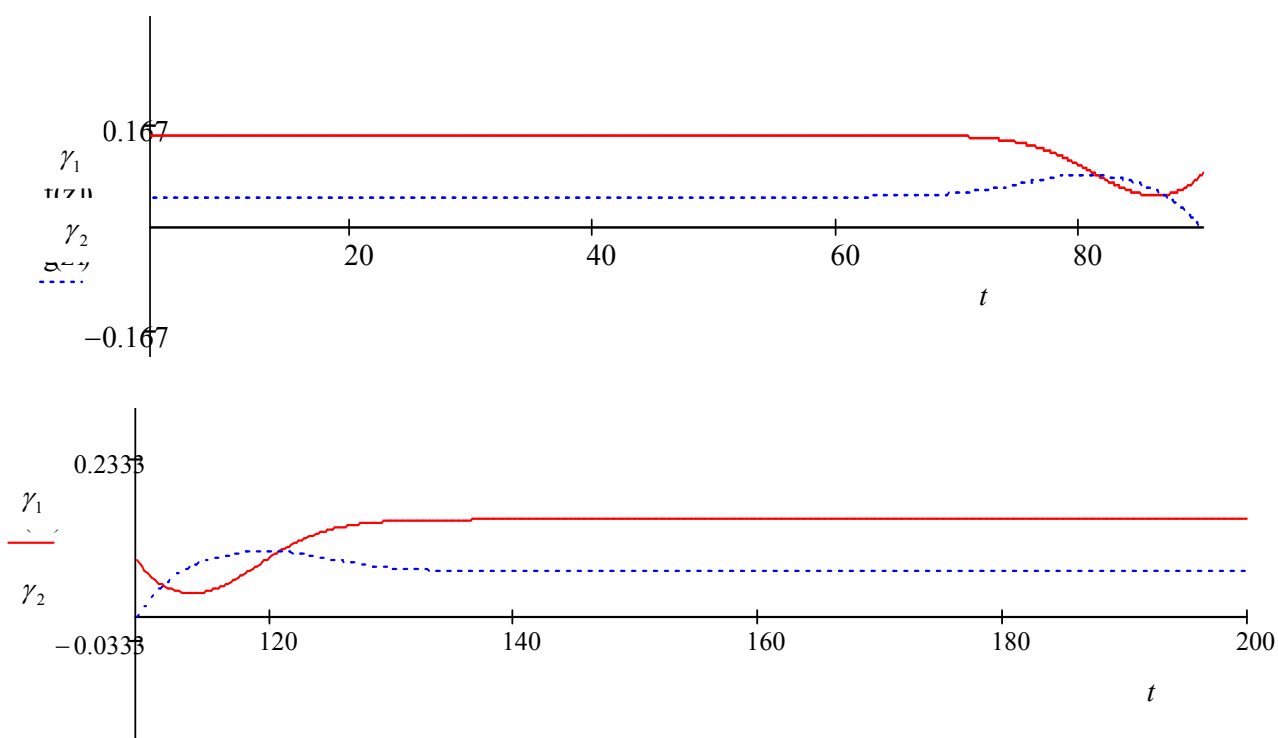


Рис.2.17. Ілюстрація часового розподілу амплітуд γ_1 (суцільна лінія) та γ_2 (пунктир)

Нехай $v_1 = 0.3, v_2 = 0.1, \varepsilon_1 = 6, \varepsilon_2 = 6 / 1.1, \gamma_1 = 0.15, \gamma_2 = 0.05$. Функції амплітуд для цього випадку зображені на рис.2.17.

Поведінка солітоноподібних хвиль в області взаємодії представлена на рис.2.18.

На рис. 2.21 представлено траєкторії солітоноподібних хвиль, на рис.2.22 представлено графічну ілюстрацію розв'язків (2.25) для випадку, коли функції g_1, g_2 визначаються співвідношенням (2.14).

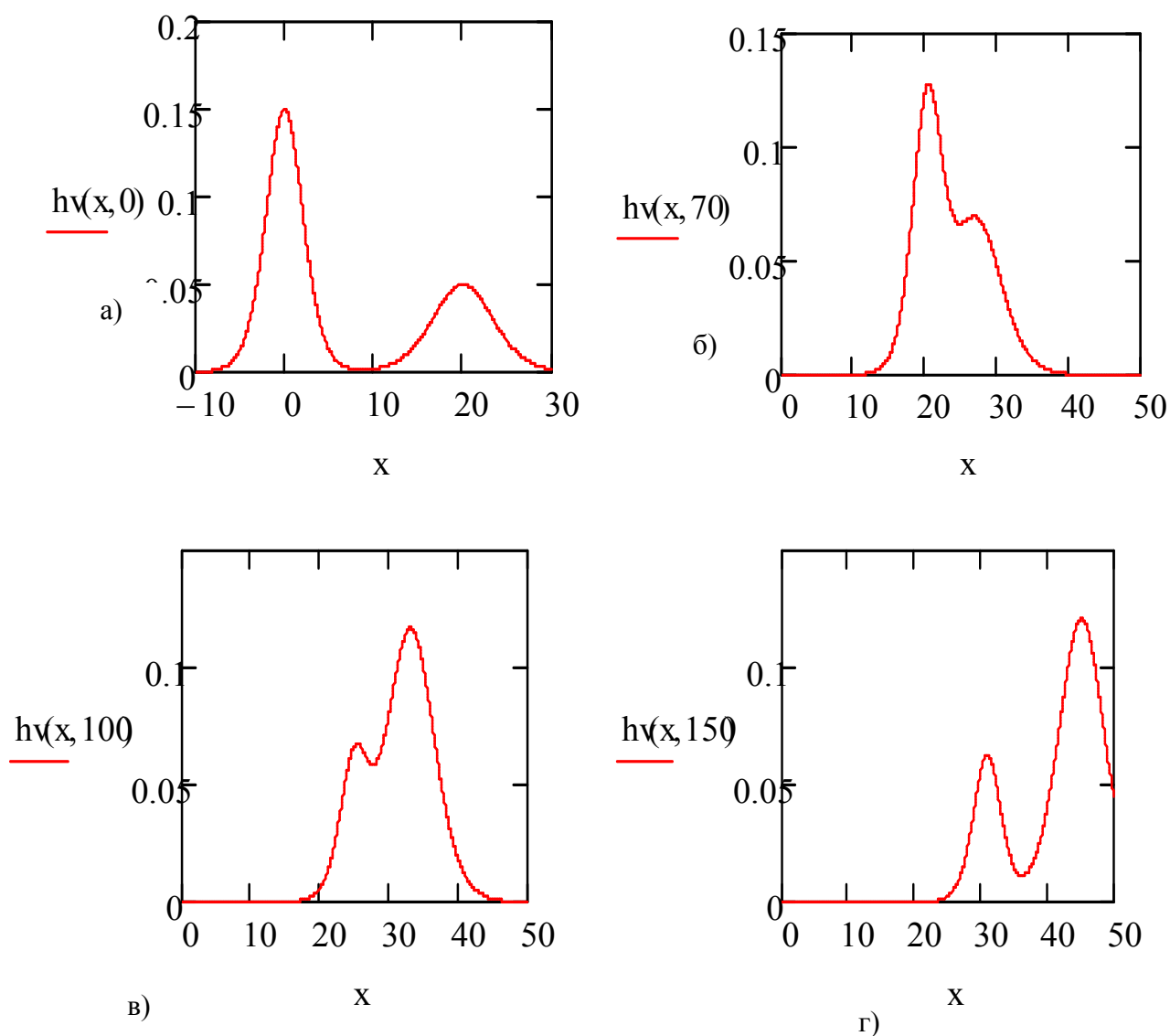


Рис.2.18. Процес взаємодії хвиль у різні моменти часу: а) $t=0$, б) $t=70$ в) $t=100$
г) $t=150$

Розглянемо ще приклад взаємодії антисолітонів за наступних початкових умов:

$$x_{10} = 20, x_{20} = 0, v_1 = -0.7, v_2 = 10, \varepsilon_1 = 19.22, \varepsilon_2 = 11.22, \gamma_1 = -0.2, \gamma_2 = -0.4.$$

Відповідні траєкторії зображені на рис.2.21, поверхня взаємодії-рис.2.22.

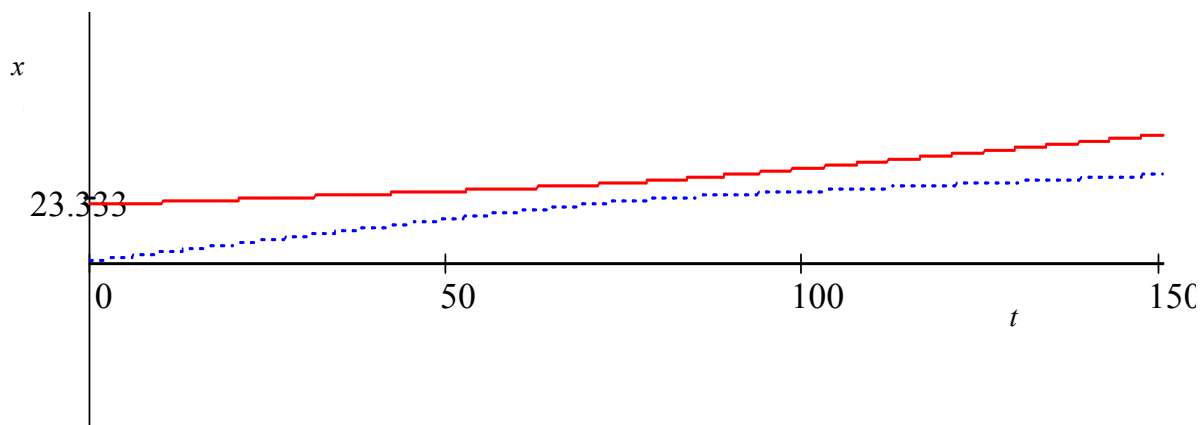


Рис.2.19. Амплітуди хвиль за умови (2.14)

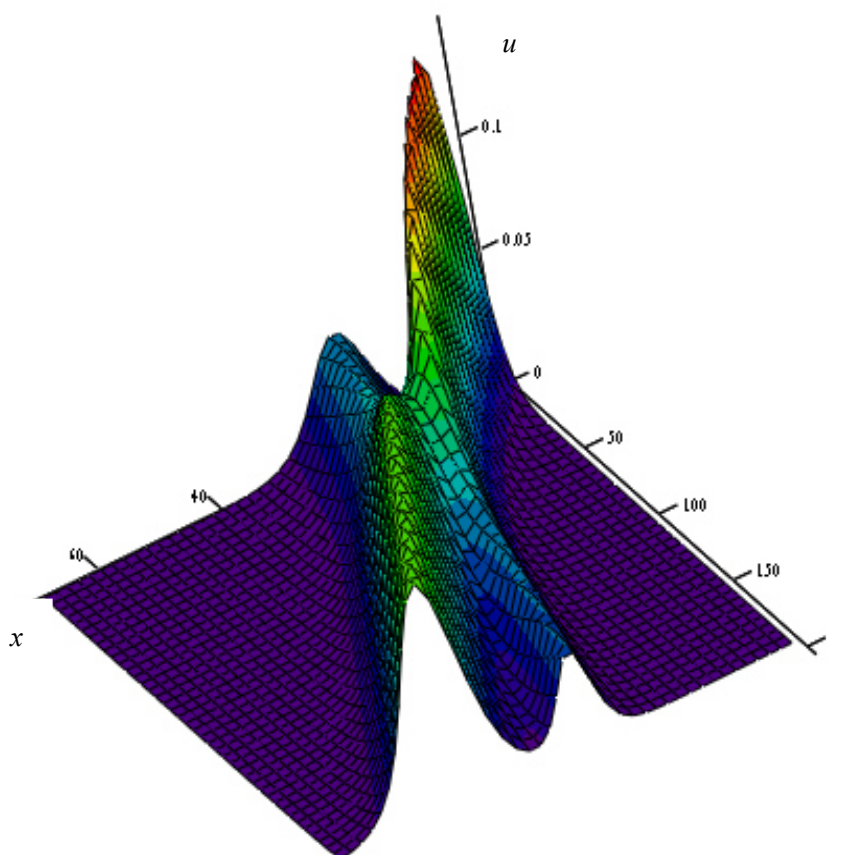


Рис. 2.20. Взаємодія солітонів

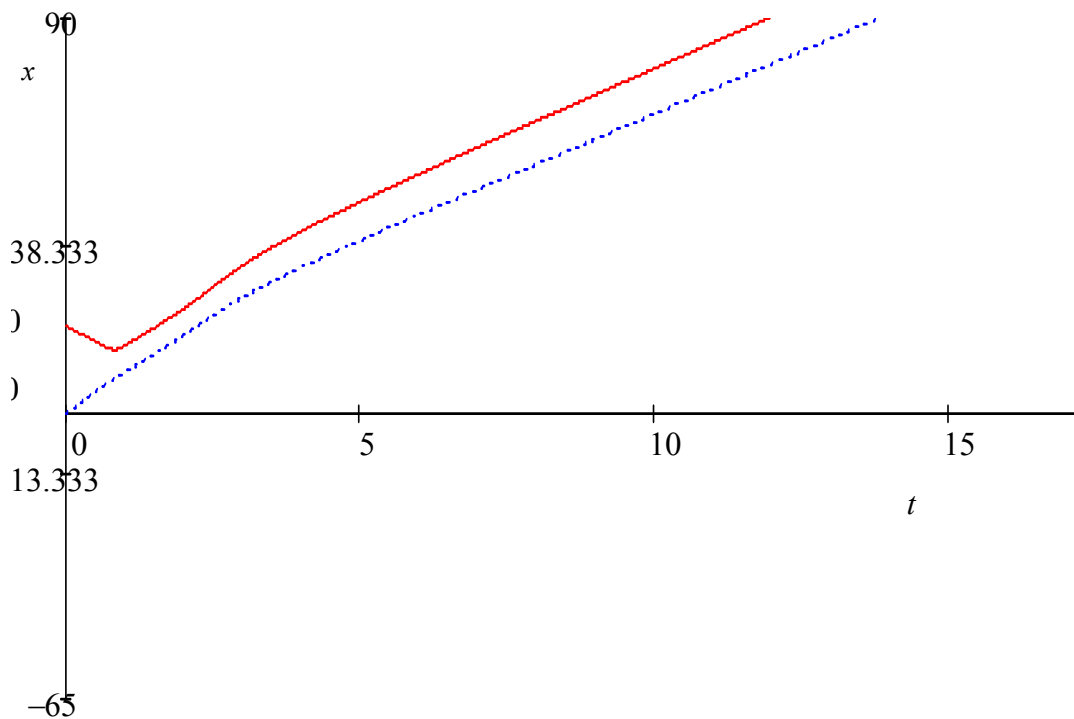


Рис.2.21. Траєкторії антисолітонів

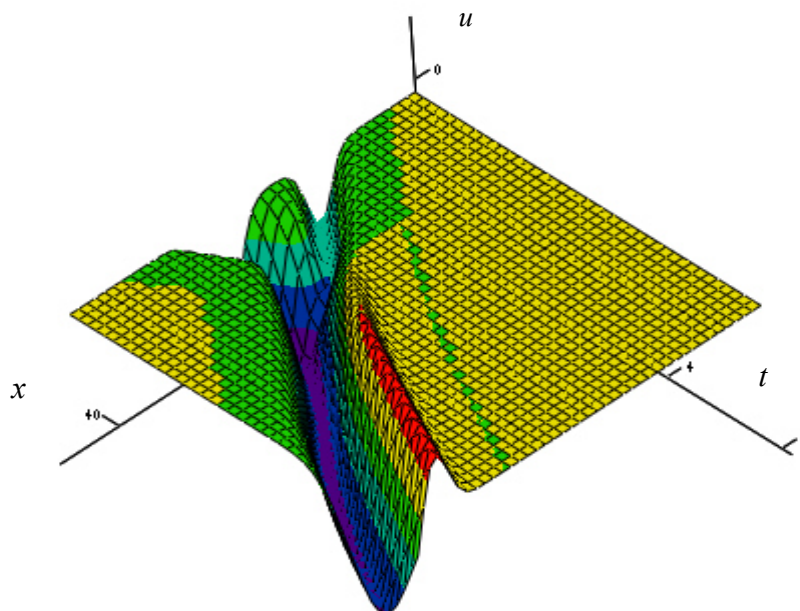


Рис.2.22. Ілюстрація взаємодії антисолітонів в часі

Аналіз поверхні на рис. 2.22 показує, що при взаємодії хвиль типу антисолітонів спостерігається явище виникнення додатнього збурення.

Очевидно, що запропонований розв'язок у формі $u_1(x,t) + u_2(x,t)$ є наближенням і рівняння КдВ перетворюється у рівність лише на множині Ω_1 .

Для подальшого уточнення розв'язку $u(x,t)$ розглянемо функції виду:

$$u_1^1(x,t) = \gamma_1^1(t) \exp(-g_1(x - \tilde{x}_1(t) - \alpha) / \varepsilon_1),$$

$$u_2^1(x,t) = \gamma_2^1(t) \exp(-g_2(x - \tilde{x}_2(t) - \beta) / \varepsilon_1), \text{ де } \alpha, \beta \text{ - деякі параметри, та}$$

підставляємо їх суму в рівняння КдВ (для спрощення запису верхні індекси амплітудних функцій будемо опускати).

Використовуючи підхід, аналогічний розглянутому вище, при $x = \tilde{x}_1(t) + \alpha$ $x = \tilde{x}_2(t) + \beta$ отримуємо систему:

$$\begin{aligned} & \gamma_1'(t) \exp(-g_1(\alpha) / \varepsilon_1) + \gamma_2'(t) \exp(-g_2(-d(t)) / \varepsilon_2) + g_1'(\alpha) \tilde{x}_1'(t) \tilde{u}_1(\alpha, t) / \varepsilon_1 + \\ & + g_2'(-d(t)) \tilde{x}_2'(t) \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t)) / \varepsilon_2) / \varepsilon_2 + \\ & + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(\alpha) / \varepsilon_1) + \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t)) / \varepsilon_2)) (-g_1'(\alpha) \tilde{u}_1(\alpha, t) / \varepsilon_1 - \\ & - g_2'(-d(t)) \tilde{u}_2(-d(t), t) / \varepsilon_2) + (-g_1'''(\alpha) / \varepsilon_1 + 3g_1'(\alpha) g_1''(\alpha) / \varepsilon_1^2 - \\ & - (g_1'(\alpha))^3 / \varepsilon_1^3) \tilde{u}_1(\alpha, t) + (-g_2'''(-d(t)) / \varepsilon_2 + 3g_2'(-d(t)) g_2''(-d(t)) / \varepsilon_2^2 - \\ & - (g_2'(-d(t)))^3 / \varepsilon_2^3) \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t)) / \varepsilon_2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma_1'(t) \exp(-g_1(d_1(t)) / \varepsilon_1) + \gamma_2'(t) \exp(-g_2(\beta) / \varepsilon_2) + g_1'(d_1(t)) \tilde{x}_1'(t) u_1(d_1(t), t) / \varepsilon_1 + \\ & + g_2'(\beta) \tilde{x}_2'(t) u_2(\beta, t) / \varepsilon_2 + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t)) / \varepsilon_1) + \\ & + \gamma_2(t) \exp(-g_2(\beta) / \varepsilon_2)) ((-g_1'(d_1(t)) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t)) / \varepsilon_1) / \varepsilon_1) - \\ & - g_2'(\beta) \tilde{u}_2(\beta, t) / \varepsilon_2) + ((-g_2'''(\beta) / \varepsilon_2 + 3g_2'(\beta) g_2''(\beta) / \varepsilon_2^2 - \\ & - (g_2'(\beta))^3 / \varepsilon_2^3) \tilde{u}_2(\beta, t) + (-g_1'''(d_1(t)) / \varepsilon_1 + 3g_1'(d_1(t)) g_1''(d_1(t)) / \varepsilon_1^2 - \\ & - (g_1'(d_1(t)))^3 / \varepsilon_1^3) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t)) / \varepsilon_1) = 0, \end{aligned}$$

де $d(t) = \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t) - \alpha$, $\tilde{u}_i(x,t) = \gamma_i^1(t) \exp(-g_i(x) / \varepsilon_i)$, $d_1(t) = \tilde{x}_2(t) + \beta - \tilde{x}_1(t)$.

Звідси

$$\begin{aligned} & \gamma_1'(t) = -\exp(-g_2(\beta) / \varepsilon_2) (g_1'(\alpha) \tilde{x}_1'(t) \tilde{u}_1(\alpha, t) / \varepsilon_1 + g_2'(-d(t)) \tilde{x}_2'(t) \gamma_2(t) \times \\ & \times \exp(-g_2(-d(t)) / \varepsilon_2) / \varepsilon_2 + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(\alpha) / \varepsilon_1) + \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t)) / \varepsilon_2)) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (-g_1'(\alpha)\tilde{u}_1(\alpha, t)/\varepsilon_1 - g_2'(-d(t))\tilde{u}_2(-d(t), t)/\varepsilon_2) + (-g_1'''(\alpha)/\varepsilon_1 + \\
& + 3g_1'(\alpha)g_1''(\alpha)/\varepsilon_1^2 - (g_1'(\alpha))^3/\varepsilon_1^3)\tilde{u}_1(\alpha, t) + (-g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 + \\
& + 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 - (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)) + \\
& + (g_1'(d_1(t))\tilde{x}_1'(t)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + g_2'(\beta)\tilde{x}_2'(t)\tilde{u}_2(\beta, t)/\varepsilon_2 + \\
& + 6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(\beta)/\varepsilon_2))((-g_1'(d_1(t))\gamma_1(t) \times \\
& \times \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - g_2'(\beta)\tilde{u}_2(\beta, t)/\varepsilon_2) + ((-g_2'''(\beta)/\varepsilon_2 + 3g_2'(\beta)g_2''(\beta)/\varepsilon_2^2 - \\
& - (g_2'(\beta))^3/\varepsilon_2^3))\tilde{u}_2(\beta, t) + (-g_1'''(d_1(t))/\varepsilon_1 + 3g_1'(d_1(t))g_1''(d_1(t))/\varepsilon_1^2 - \\
& - (g_1'(d_1(t)))^3/\varepsilon_1^3)\tilde{u}_1(d_1(t), t)/\varepsilon_1)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))/ \\
& /(\exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1 - g_2(\beta)/\varepsilon_2) - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d_1(t))/\varepsilon_2)), \\
& \gamma_2'(t) = -\exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1)(g_1'(d_1(t))\tilde{x}_1'(t)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + \\
& + g_2'(\beta)\tilde{x}_2'(t)u_2/\varepsilon_2 + 6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(\beta)/\varepsilon_2)) \times \\
& \times ((-g_1'(d_1(t))\gamma_1(t)\exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - g_2'(\beta)u_2/\varepsilon_2) + ((-g_2'''(\beta)/\varepsilon_2 + \\
& + 3g_2'(\beta)g_2''(\beta)/\varepsilon_2^2 - (g_2'(\beta))^3/\varepsilon_2^3))u_2 + (-g_1'''(d_1(t))/\varepsilon_1 + \\
& + 3g_1'(d_1(t))g_1''(d_1(t))/\varepsilon_1^2 - (g_1'(d_1(t)))^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1)) + \\
& + \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)(g_1'(\alpha)\tilde{x}_1'(t)u_1/\varepsilon_1 + g_2'(-d(t))\tilde{x}_2'(t)\gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 + 6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_1'(\alpha)u_1/\varepsilon_1 - \\
& - g_2'(-d(t))u_2/\varepsilon_2) + (-g_1'''(\alpha)/\varepsilon_1 + \\
& + 3g_1'(\alpha)g_1''(\alpha)/\varepsilon_1^2 - (g_1'(\alpha))^3/\varepsilon_1^3)u_1 + (-g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 + \\
& + 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 - (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))/(\exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1 - g_2(\beta)/\varepsilon_2) - \\
& - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d_1(t))/\varepsilon_2)). \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Записавши очевидні початкові умови: $\gamma_1(0) = \gamma_1^0 \exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1)$, $\gamma_2(0) = \gamma_2^0 \exp(-g_2(\beta)/\varepsilon_2)$, отримуємо нову серію задач Коші, на основі розв'язків яких будуватимемо точний розв'язок рівняння КдВ на множинах $\Omega_{\alpha, \beta} = \{(x, t) : x = \tilde{x}_1(t) + \alpha, x = \tilde{x}_2(t) + \beta\}$.

Аналогічно можемо розглядати різні закони руху. Нехай, наприклад, $\tilde{x}_i(t) = c_i \gamma_i(t)t + x_i^0$, $\tilde{x}'_i(t) = c_i \gamma'_i(t)t + c_i \gamma_i(t)$.

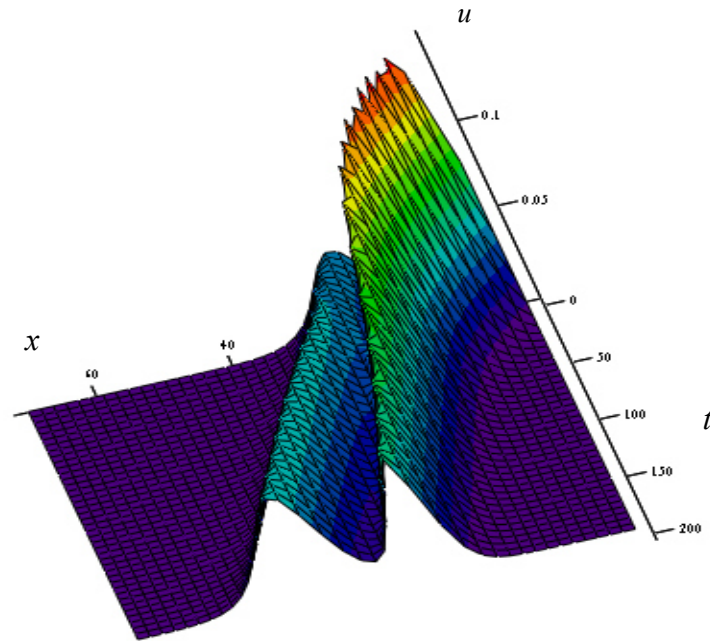


Рис. 2.23. Взаємодія солітонів у випадку спеціального закону руху

Для цього закону руху будемо аналогічні задачі Коші для амплітудних функцій та їх уточнення. Відповідні розв'язки наведені на Рис.2.23. Легко показати, що при умовах, які визначають клас G , у вигляді (2.4) може бути представлений будь-який розв'язок рівняння (2.3), який має характер хвилі незмінної форми. Це твердження справедливе для будь-якого диференціального рівняння, що має розв'язки, які є відокремленими хвилями.

2.4 Висновки

Таким чином, в цьому розділі запропоновано метод моделювання процесів поширення одновимірних локалізованих збурень, що ґрунтується на основі Т-представлень. Відповідний підхід, на відміну від відомих методів, має в певному розумінні універсальний характер. Адже форма розв'язку, що пропонується, дозволяє описати хвилю будь-якого профілю. Метод є значно простішим від відомих підходів, зокрема методу оберненої задачі розсіювання з точки зору апарату, який застосовується. Адже у порівнянні з методом оберненої задачі розсіювання, наприклад, немає необхідності розв'язувати обернену задачу по відновленню потенціалу рівняння Шредингера за даними

розсіювання з використанням інтегрального рівняння Гельфанда-Левітана-Марченко [223], яку, очевидно, не завжди вдається розв'язати.

На основі Т-представлень отримано нові класи солітоноподібних розв'язків, зокрема, для рівняння Кортевега - де Вріза. Показано, що класичний розв'язок рівняння КдВ є частковим випадком отриманих узагальнень.

Отримано наближені розв'язки рівнянь типу КдВ на основі гауссіанів, що є частковим випадком Т-представлень. Відповідний підхід допускає поширення на багатосолітонний випадок та забезпечує можливість знаходження амплітуд солітоноподібних хвиль.

Для дослідження взаємодії солітонів запропоновано новий метод, що є вдосконаленням методу гауссіанів. Відповідний підхід дозволяє побудувати систему задач Коші для амплітуд солітонів, що взаємодіють. При цьому є можливість вибору відповідних початкових умов та апроксимації розрахункової області (побудові відповідної криволінійної сітки) та знаходження розв'язку у багатосолітонному випадку з заданою точністю.

Відповідний підхід можна використати для аналізу багатосолітонних взаємодій для широких класів моделей, що описуються більш складними диференціальними рівняннями та їх системами.

РОЗДІЛ 3 МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЙ СОЛІТОНОПОДІБНИХ ЗБУРЕНЬ У СЕРЕДОВИЩАХ, ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В ЯКИХ ОПИСУЮТЬСЯ РІВНЯННЯМИ ТИПУ МІЛКОЇ ВОДИ

В даному розділі розглядатимемо задачу моделювання двовимірних локалізованих солітоноподібних збурень у середовищах, що описуються рівняннями типу мілкої води. При цьому розглядаються локалізовані хвилі у гравітуючих газових дисках а також відокремлені кругові хвилі при наближенні мілкої води для випадку довільних поверхонь дна.

Для рівнянь газової динаміки, на відміну від низки інших праць, зокрема [281], де збурені розв'язки знаходились у вигляді спіральних хвиль та аналізувались відповідні дисперсійні співвідношення за класичною схемою, тут розглядатимемо збурення, які мають характер тонких δ -солітонів. Доведено низку тверджень, які доводять існування локалізованих збурень для гравітуючих газових дисків а також запропоновано методику знаходження траєкторій відповідних збурень для деяких випадків поверхневої густини при різних початкових значеннях швидкостей. Показано, що такі хвилі можуть відігравати суттєву роль у механізмах виникнення гідродинамічної нестійкості [281] та інших випадках.

Для моделі мілкої води запропоновано метод моделювання процесів поширення локалізованих кругових хвиль типу цунамі та дослідження їх взаємодії.

3.1 Моделювання кругових відокремлених хвиль за допомогою Т-представлень

3.1.1 Загальний випадок

Під цунамі розуміють кругову хвилю, що розповсюджується в океані від центра її утворення на великі відстані. В океані висота такої хвилі відносно невелика, однак при накочуванні на берег висота цунамі зростає і вона спричиняє значні руйнування.

Будемо розглядати систему рівнянь мілкої води за умов відсутності в'язкості та компонент зовнішньої сили:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{hu_r}{r} + \frac{\partial(hu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -g \frac{\partial b}{\partial r}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{g}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi}. \quad (3.3)$$

У випадку відсутності азимутальної компоненти швидкості $u_\varphi = 0$.

Тоді з (3.1)-(3.3) отримуємо систему:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{hu_r}{r} + \frac{\partial(hu_r)}{\partial r} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + g \frac{\partial h}{\partial r} = -g \frac{\partial b}{\partial r}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = -\frac{\partial b}{\partial \varphi}, \quad (3.6)$$

або

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{hu}{r} + u \frac{\partial h}{\partial r} + h \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + g_0 \frac{\partial h}{\partial r} = -g_0 \frac{\partial b}{\partial r}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = -\frac{\partial b}{\partial \varphi}. \quad (3.9)$$

Нехай форма профілю визначається співвідношенням:

$$h(r, \varphi, t) = \gamma_h(\varphi, t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}\right\} + c_{gl}, \quad (3.10)$$

де $\gamma_h(\varphi, t)$, $\tilde{r}(\varphi, t)$ - деякі функції, ε, c_{gl} - константи.

Співвідношення (3.10) описує кругову одиночну хвилю незмінного в часі профілю, що поширюється від деякого центра. Зауважимо, що у вигляді

(3.10) можна представити будь-яке додатне збурення, будь-яке від'ємне збурення типу антисолітона а також комбінацію типу “солітон-антисолітон”.

Розглянемо, наприклад, функцію виду (її графік зображено на Рис.3.1. а)):

$$g(x) = \begin{cases} -\ln(1.001 + \cos(x)), & 4.7 \leq x \leq 11, \\ 0 & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Відповідна функція $h(r, 0)$ зображена на Рис. 3.1. б). Бачимо, що профіль хвилі являє собою збурення типу “солітон-антисолітон”.

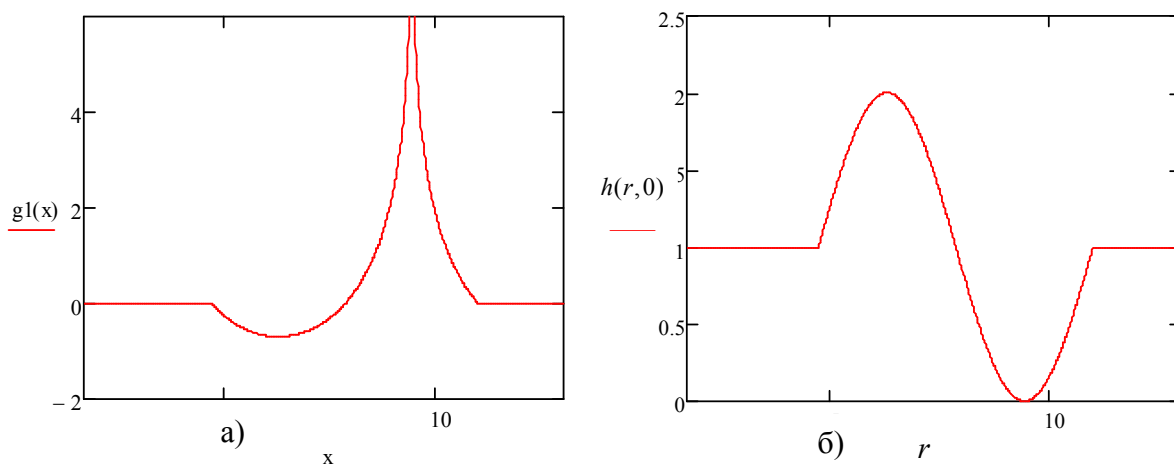


Рис.3.1 Графіки функцій а) $g(x)$, б) $h(r, 0)$

З врахуванням (3.10) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= -\frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \gamma_h(\varphi, t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}\right\} = -\frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} &= -\frac{g''(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) + \left(\frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}\right)^2 (h - c_{gl}), \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \gamma_h'(\varphi, t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}\right\} + \\ &\gamma_h(\varphi, t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}\right\} \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} = \\ &= \gamma_h'(\varphi, t) (h - c_{gl}) / \gamma_h(\varphi, t) + (h - c_{gl}) \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}, \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \gamma_h(\varphi, t)}{\partial \varphi} \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}\right\} + \gamma_h(\varphi, t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}\right\} \times \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\times \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{r}(\varphi, t)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \gamma_h(\varphi, t)}{\partial \varphi} h / \gamma_h(\varphi, t) + h \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{r}(\varphi, t)}{\partial \varphi}.$$

Підставляючи (3.11) в систему (3.7)-(3.9), отримуємо:

$$\begin{aligned} \gamma_h'(\varphi, t)(h - c_{gl}) / \gamma_h(\varphi, t) + (h - c_{gl})\tilde{r}'(\varphi, t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} + \frac{hu}{r} - \\ - u \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) + h \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) = -g_0 \frac{\partial b}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \gamma_h(\varphi, t)}{\partial \varphi} h / \gamma_h(\varphi, t) + h \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{r}(\varphi, t)}{\partial \varphi} = -\frac{\partial b}{\partial \varphi}.$$

Звідси:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\gamma_h'(\varphi, t)}{\gamma_h(\varphi, t)} \frac{h - c_{gl}}{h} - \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} + u \left(\frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} - \frac{1}{r} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) - u \frac{\partial u}{\partial r} - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \gamma_h(\varphi, t)}{\partial \varphi} h / \gamma_h(\varphi, t) + h \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{r}(\varphi, t)}{\partial \varphi} = -\frac{\partial b}{\partial \varphi}.$$

Зауважимо, що друге рівняння системи (3.13) є лінійним по u . В такому випадку можемо записати загальний розв'язок у вигляді:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, t) = e^{\int \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t)) h - c_{gl}}{\varepsilon} \frac{1}{h} \frac{1}{r} dr} (C(\varphi, t) - \\ - \int \left(\frac{\gamma_h'(\varphi, t)}{\gamma_h(\varphi, t)} \frac{h - c_{gl}}{h} + \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} \right) e^{-\int \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t)) h - c_{gl}}{\varepsilon} \frac{1}{h} \frac{1}{r} dr} dr) = \\ = \frac{1}{r} e^{\int \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t)) h - c_{gl}}{\varepsilon} \frac{1}{h} dr} (C(\varphi, t) - \\ - \int \left(\frac{\gamma_h'(\varphi, t)}{\gamma_h(\varphi, t)} \frac{h - c_{gl}}{h} + \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} \right) e^{-\int \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t)) h - c_{gl}}{\varepsilon} \frac{1}{h} dr} r dr). \end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення

$$\int \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} dr = -\ln(\gamma(t)) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + c_{gl},$$

отримуємо вираз для функції збурення:

$$u(r, \varphi, t) = \frac{1}{r(\gamma(\varphi, t) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + c_{gl})} (C(\varphi, t) - \gamma_h'(\varphi, t) \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} r dr - \\ - \tilde{r}'(\varphi, t) \int \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) r dr).$$

З врахуванням співвідношень

$$\int \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) dr = -\gamma(\varphi, t) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}},$$

$$\int \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) r dr = -\gamma(\varphi, t) \int r d e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} =$$

$$= -r\gamma(\varphi, t) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + \gamma(\varphi, t) \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr,$$

$$\int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} r dr = r \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr - \iint e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr, \text{ отримуємо:}$$

$$u(r, \varphi, t) = \frac{1}{r(\gamma(\varphi, t) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + c_{gl})} (C(\varphi, t) - \gamma_h'(\varphi, t) \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} r dr -$$

$$- \tilde{r}'(\varphi, t) \int \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) r dr) = \frac{1}{rh} (C(\varphi, t) - (\gamma'(\varphi, t) r + \tag{3.14}$$

$$+ \tilde{r}'(\varphi, t) \gamma(\varphi, t)) \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \gamma'(\varphi, t) \iint e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr +$$

$$+ \tilde{r}'(\varphi, t) r \gamma(\varphi, t) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}})$$

$$\text{або } u(r, t) = \frac{1}{rh} (C(\varphi, t) - r \frac{d}{dt} \gamma(\varphi, t) \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \frac{d}{dt} \gamma(\varphi, t) \iint e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr).$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\gamma_h'(\varphi, t)(h - c_{gl}) / \gamma_h(\varphi, t) + (h - c_{gl}) \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}}{rh^2} (C(\varphi, t) - (\gamma_h'(\varphi, t) r +$$

$$\begin{aligned}
& +\tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))\int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(\varphi, t)\int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \tilde{r}'(\varphi, t)r\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}}) + \\
& +\frac{1}{rh}(C'(\varphi, t) - (\gamma_h''(\varphi, t)r + \tilde{r}''(\varphi, t)\gamma(\varphi, t) + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma'(\varphi, t))\int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \\
& +(\gamma_h'(\varphi, t)\tilde{r}'(\varphi, t)r + \tilde{r}'^2(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + \gamma_h''(\varphi, t)\int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr - \\
& -\gamma_h'(\varphi, t)\tilde{r}'(\varphi, t)\int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \tilde{r}''(\varphi, t)r\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + \tilde{r}'^2(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + \\
& +\gamma_h''(\varphi, t)\int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr - \gamma_h'(\varphi, t)\tilde{r}'(\varphi, t)\int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \tilde{r}''(\varphi, t)r\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + \\
& +\tilde{r}'(\varphi, t)r\gamma'(\varphi, t)e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + \tilde{r}'^2(\varphi, t)r\gamma(\varphi, t)\frac{g'(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{rh^2}[(C'(\varphi, t) - (\gamma_h''(\varphi, t)r + \tilde{r}''(\varphi, t)\gamma(\varphi, t) + 2\tilde{r}'(\varphi, t)\gamma'(\varphi, t))\int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \\
& +2\gamma_h'(\varphi, t)\tilde{r}'(\varphi, t)r(h - c_{gl}) / \gamma(\varphi, t) + \\
& +\tilde{r}'^2(\varphi, t)(h - c_{gl}) + \gamma_h''(\varphi, t)\int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \tilde{r}''(\varphi, t)r(h - c_{gl}) + \\
& +\tilde{r}'^2(\varphi, t)r\frac{g'(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}(h - c_{gl}))h - \\
& -(C(\varphi, t) - (\gamma_h'(\varphi, t)r + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))\int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(\varphi, t)\int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \\
& +\tilde{r}'(\varphi, t)r(h - c_{gl}))(\gamma_h'(\varphi, t)(h - c_{gl}) / \gamma_h(\varphi, t) + (h - c_{gl})\tilde{r}'(\varphi, t)\frac{g'(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon})].
\end{aligned}$$

Підставляючи останні співвідношення у друге рівняння (3.13), отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{rh}(C'(\varphi, t) - (\gamma_h''(\varphi, t)r + \tilde{r}''(\varphi, t)\gamma(\varphi, t) + 2\tilde{r}'(\varphi, t)\gamma'(\varphi, t))\int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \\
& +2\gamma_h'(\varphi, t)\tilde{r}'(\varphi, t)r(h - c_{gl}) / \gamma(\varphi, t) + \tilde{r}'^2(\varphi, t)(h - c_{gl}) + \gamma_h''(\varphi, t)\int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \\
& +\tilde{r}''(\varphi, t)r(h - c_{gl}) + \tilde{r}'^2(\varphi, t)r\frac{g'(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}(h - c_{gl})) - \\
& -(C(\varphi, t) - (\gamma_h'(\varphi, t)r + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))\int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(\varphi, t)\int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \\
& +\tilde{r}'(\varphi, t)r(h - c_{gl}))(\gamma_h'(\varphi, t) / \gamma_h(\varphi, t) + \tilde{r}'(\varphi, t)\frac{g'(r-\tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon})\frac{(h - c_{gl})}{rh^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) + \frac{1}{rh} (C(\varphi, t) - (\gamma_h'(\varphi, t)r + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))) \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \\
&+ \gamma_h'(\varphi, t) \int \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \tilde{r}'(\varphi, t) r \gamma(\varphi, t) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} \frac{\gamma_h'(\varphi, t) h - c_{gl}}{\gamma_h(\varphi, t) h} + \frac{1}{rh} (C(\varphi, t) - \\
&- (\gamma_h'(\varphi, t)r + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))) \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(\varphi, t) \int \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \\
&+ \tilde{r}'(\varphi, t) r \gamma(\varphi, t) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t)) h - c_{gl}}{\varepsilon h} - \frac{1}{r^2 h^2} (C(\varphi, t) - \\
&- \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t)) \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(\varphi, t) \int \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr - \gamma_h'(\varphi, t) r \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \\
&+ \tilde{r}'(\varphi, t) r \gamma(\varphi, t) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}})^2 \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t)) h - c_{gl}}{\varepsilon h} + \\
&+ \frac{1}{r^3 h^2} (C(\varphi, t) - \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t)) \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \\
&+ \gamma_h'(\varphi, t) \int \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr - \gamma_h'(\varphi, t) r \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \\
&+ \tilde{r}'(\varphi, t) r \gamma(\varphi, t) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}})^2 - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

При цьому останнє рівняння системи (3.13) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \gamma_h(\varphi, t)}{\partial \varphi} \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}\right\} + \\
&+ \gamma_h(\varphi, t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}\right\} \frac{g'(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{r}(\varphi, t)}{\partial \varphi} = -\frac{\partial b}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

Отримали співвідношення, які дозволяють аналізувати поверхню дна та профіль хвилі.

$$\text{Нехай } \int \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr = \psi(r - \tilde{r}(\varphi, t)), \int e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr = \psi'(r - \tilde{r}(\varphi, t)).$$

Зауважимо, що рівняння (3.15) може не мати розв'язків у випадку заданої функції b для довільних значень r, t . Для аналізу цього факту досить

розглянути вирази, що містять множники виду $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}$. Остання обставина говорить про те, що профіль хвилі в часі змінюватиметься.

У випадку змінного профілю хвилі можемо описати його у вигляді:

$$h(r, \varphi, t) = \gamma_h(\varphi, t) \exp\left\{-\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}\right\} + c_{gl}, \quad (3.16)$$

де $\gamma_h(\cdot), \tilde{r}(\cdot), g(\cdot)$, - деякі функції, ε, c_{gl} - константи, $g(t, s)$ - диференційовна функція, що має властивості:

$$\begin{aligned} g(t, 0) = 0, g(t, s) \geq 0, \frac{\partial}{\partial t} g(t, 0) = 0, \frac{\partial}{\partial s} g(t, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} g(t, s) < 0, s < 0, \frac{\partial}{\partial s} g(t, s) > 0, s > 0, \\ \exists a < 0 : \lim_{s \rightarrow a^+} g(t, s) = +\infty, \exists b > 0 : \lim_{s \rightarrow b^-} g(t, s) = +\infty. \end{aligned}$$

Провівши розрахунки, аналогічні до проведених вище, отримаємо вираз для швидкості та функції профілю:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, t) = \frac{1}{rh} (C(\varphi, t) + \int (h - c_{gl}) r \frac{\partial}{\partial t} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} dr - \gamma_h'(\varphi, t) \int e^{-\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} r dr - \\ - \tilde{r}'(\varphi, t) \int (h - c_{gl}) r \frac{\partial}{\partial s} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} dr), \end{aligned}$$

або

$$u(r, \varphi, t) = \frac{1}{rh} (C(\varphi, t) - r \frac{d}{dt} \gamma_h(\varphi, t) \int e^{-\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \frac{d}{dt} \gamma_h(\varphi, t) \iint e^{-\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr).$$

Аналог рівняння (3.15) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_h'(\varphi, t)(h - c_{gl}) / \gamma_h(\varphi, t) - (h - c_{gl}) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} + (h - c_{gl}) \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}}{rh^2} \times \\ \times ((C(\varphi, t) + \int (h - c_{gl}) r \frac{\partial}{\partial t} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} dr - (\gamma_h'(\varphi, t)r + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t)) \int e^{-\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma_h'(\varphi, t) \iint e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \tilde{r}'(\varphi, t) r \gamma(\varphi, t) e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}}) + \frac{1}{rh} (C'(\varphi, t) + \\
& + \int (\gamma_h'(\varphi, t) (h - c_{gl}) / \gamma_h(\varphi, t) - (h - c_{gl})) \frac{d}{dt} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} r \frac{\partial}{\partial t} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} dr + \\
& + \int (h - c_{gl}) r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} - \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} dr - \\
& - (\gamma_h''(\varphi, t) r + \tilde{r}''(\varphi, t) \gamma(\varphi, t) + \tilde{r}'(\varphi, t) \gamma'(\varphi, t)) \int e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + (\gamma_h'(\varphi, t) r + \tilde{r}'(\varphi, t) \gamma(\varphi, t)) \times \\
& \times \int e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} + \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{\partial}{\partial s} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \right) dr + \\
& + \gamma_h''(\varphi, t) \iint e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \\
& + \gamma_h'(\varphi, t) \iint e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} + \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{\partial}{\partial s} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \right) dr dr + \\
& + \tilde{r}''(\varphi, t) r \gamma(\varphi, t) e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + \tilde{r}'(\varphi, t) r \gamma'(\varphi, t) e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} + \\
& + \tilde{r}'(\varphi, t) r \gamma(\varphi, t) e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} + \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{\partial}{\partial s} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \right)) = \\
& = -\frac{1}{rh} (C(\varphi, t) + \int (h - c_{gl}) r \frac{\partial}{\partial t} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} dr - (\gamma_h'(\varphi, t) r + \\
& + \tilde{r}'(\varphi, t) \gamma(\varphi, t)) \int e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(\varphi, t) \iint e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \tilde{r}'(\varphi, t) r \gamma(\varphi, t) e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}}) \times \\
& \times \left(\frac{h - c_{gl}}{h} \frac{\partial}{\partial t} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} - \gamma_h'(\varphi, t) \frac{h - c_{gl}}{h \gamma_h(\varphi, t)} - \right. \\
& \left. - \frac{h - c_{gl}}{h} \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{\partial}{\partial s} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} + \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{rh} (C(\varphi, t) + \right. \\
& \left. + \int (h - c_{gl}) r \frac{\partial}{\partial t} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} dr - (\gamma_h'(\varphi, t) r + \tilde{r}'(\varphi, t) \gamma(\varphi, t)) \int e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_h'(\varphi, t) \iint e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}} dr dr + \tilde{r}'(\varphi, t) r \gamma(\varphi, t) e^{\frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon}}) + \\
& + g_0 \frac{\partial}{\partial s} \frac{g(t, r - \tilde{r}(\varphi, t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Отримали досить складне інтегро-диференціальне рівняння. Тому надалі не розв'язуватимемо його а застосуємо наступний наближений метод.

Нехай маємо початкову умову:

$$h(r, \varphi, t_0) = \gamma_h(\varphi, t_0) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(\varphi, t_0))}{\varepsilon}\right\} + c_{gl}, \quad \text{де } g \text{- задана функція.}$$

Будемо знаходити розв'язок системи у формі (3.10). Зауважимо, що рівняння (3.15) має місце при $r = \tilde{r}(\varphi, t) + \alpha$. При такій умові воно матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{rh} \left(C'(\varphi, t) - (\gamma''(\varphi, t)r + \tilde{r}''(\varphi, t)\gamma(\varphi, t) + 2\tilde{r}'(\varphi, t)\gamma'(\varphi, t))\psi'(\alpha) + \right. \\
& + 2\gamma'(\varphi, t)\tilde{r}'(\varphi, t)r(h - c_{gl}) / \gamma(\varphi, t) + \\
& + \tilde{r}'^2(\varphi, t)(h - c_{gl}) + \gamma''(\varphi, t)\psi(\alpha) + \tilde{r}''(\varphi, t)r(h - c_{gl}) + \tilde{r}'^2(\varphi, t)r \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon} (h - c_{gl}) \left. \right) - \\
& - \left(C(\varphi, t) - (\gamma'(\varphi, t)r + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))\psi'(\alpha) + \gamma'(\varphi, t)\psi(\alpha) + \tilde{r}'(\varphi, t)r(h - c_{gl}) \right) \times \\
& \times (\gamma'(\varphi, t) / \gamma(t) + \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon}) \frac{(h - c_{gl})}{rh^2} = \\
& = g_0 \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon} (h - c_{gl}) + \frac{1}{rh} (C(\varphi, t) - (\gamma'(\varphi, t)r + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))\psi'(\alpha) + \gamma'(\varphi, t)\psi(\alpha) + \\
& + \tilde{r}'(\varphi, t)r\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}}) \frac{\gamma'(\varphi, t)}{\gamma(\varphi, t)} \frac{h - c_{gl}}{h} + \frac{1}{rh} (C(\varphi, t) - (\gamma'(\varphi, t)r + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))\psi'(\alpha) + \\
& + \gamma'(\varphi, t)\psi(\alpha) + \\
& + \tilde{r}'(\varphi, t)r\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}}) \tilde{r}'(\varphi, t) \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} - \frac{1}{r^2 h^2} (C(\varphi, t) - (\gamma'(\varphi, t)r + \\
& + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))\psi'(\alpha) + \\
& + \gamma'(\varphi, t)\psi(\alpha) + \tilde{r}'(\varphi, t)r\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}})^2 \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} + \frac{1}{r^3 h^3} (C(\varphi, t) - (\gamma'(\varphi, t)r + \\
& + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))\psi'(\alpha) + \gamma'(\varphi, t)\psi(\alpha) + \tilde{r}'(\varphi, t)r\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}})^2 - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Зауважимо, що останнє рівняння містить функції $\gamma(\cdot)$, $C(\cdot)$ та $\tilde{r}(\cdot)$. При цьому повинні виконуватись певні початкові умови, які залежать від характеру початкових збурень. Нехай $\gamma(\varphi, t_0) = \gamma_h(\varphi, t_0)$. Будемо вибирати функцію $C(\varphi, t)$ так, щоб функція швидкості (3.14) була рівна 0. Тоді матимемо співвідношення :

$$C(\varphi, t) - (\gamma'(\varphi, t)\tilde{r}(\varphi, t) + \tilde{r}'(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))\psi'(\varphi, \alpha) + \gamma'(\varphi, t)\psi(\alpha) + \tilde{r}'(\varphi, t)\tilde{r}(\varphi, t)\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} = 0.$$

Звідси

$$C'(\varphi, t) - (\gamma''(\varphi, t)\tilde{r}(\varphi, t) + 2\gamma'(\varphi, t)\tilde{r}'(\varphi, t) + \tilde{r}''(\varphi, t)\gamma(\varphi, t))\psi'(\alpha) + \gamma''(\varphi, t)\psi(\alpha) + \tilde{r}''(\varphi, t)\tilde{r}(\varphi, t)\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} + \tilde{r}'^2(\varphi, t)\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} + \tilde{r}'(\varphi, t)\tilde{r}(\varphi, t)\gamma'(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} = 0.$$

При таких умовах рівняння (3.17) матиме вигляд:

$$\frac{1}{(\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} + c_{gl})} \left(\tilde{r}'(\varphi, t)\gamma'(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} + \tilde{r}''(\varphi, t)\frac{g'(\alpha)}{\varepsilon}\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} \right) = g_0 \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon}\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}.$$

Нехай $\tilde{r}(t) = vt$. Тоді отримуємо систему:

$$\frac{1}{(\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} + c_{gl})} \left(v\gamma'(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} + v^2 \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon}\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} \right) = g_0 \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon}\gamma(\varphi, t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} - g_0 \frac{\partial b}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \gamma_h(\varphi, t)}{\partial \varphi} \exp\left\{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}\right\} = -\frac{\partial b}{\partial \varphi}.$$

Отримали рівняння для знаходження функції $\gamma(\varphi, t)$. При кожному значенні параметра α отримуватимемо інші значення відповідних функцій при певних початкових умовах. Змінюючи параметр α , покриватимемо область $\Omega = \{(r, t) : r \in [0, +\infty), t \in [0, +\infty)\}$ кривими $\Omega_\alpha = \{(r, t) : r = \tilde{r}(\varphi, t)\}$, де існує точний розв'язок відповідної системи рівнянь.

Зауважимо, що розглянутий вище метод фактично враховує змінний в часі профіль хвилі. При цьому швидкість рідини в точці максимуму збурення є нульовою. У випадку, коли на функцію швидкості (3.14) накладаються інші початкові умови, можна отримати інші класи розв'язків.

3.1.2 Деякі часткові випадки.

Будемо розглядати випадок симетричної хвилі та поверхні дна. Очевидно, нас цікавитиме випадок, коли зміна дна в часі не дублює профіль хвилі. Для розгляду такого випадку будемо аналізувати ті доданки у співвідношенні (3.15), які не містять множників виду $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}$. Тоді з (3.15) отримуємо співвідношення:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(-\gamma_h''(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + 2\gamma_h'(t)\tilde{r}'(t)(h-c_{gl}) / \gamma(t) + \right. \\ & \left. + \tilde{r}''(t)(h-c_{gl}) + \tilde{r}'^2(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h-c_{gl}) \right) - \\ & - 2 \left(-\gamma_h'(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \tilde{r}'(t)(h-c_{gl}) \right) \left(\gamma_h'(t) / \gamma_h(t) + \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \right) \frac{(h-c_{gl})}{h^2} = \\ & = g_0 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h-c_{gl}) - \\ & - \frac{1}{h^2} \left(-\gamma_h'(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \tilde{r}'(t)\gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} \right)^2 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли поверхня дна є константою. Тоді повинна виконуватись умова:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(-\gamma_h''(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + 2\gamma_h'(t)\tilde{r}'(t)(h-c_{gl}) / \gamma(t) + \right. \\ & \left. + \tilde{r}''(t)(h-c_{gl}) + \tilde{r}'^2(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h-c_{gl}) \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left(-\gamma_h'(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \tilde{r}'(t)(h-c_{gl}) \right) (\gamma_h'(t) / \gamma_h(t) + \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}) \frac{(h-c_{gl})}{h^2} = \\
& = g_0 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h-c_{gl}) - \\
& - \frac{1}{h^2} (-\gamma_h'(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \tilde{r}'(t) \gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}})^2 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h}.
\end{aligned}$$

Нехай $\gamma(t) = const = \gamma$. Тоді з останнього рівняння отримуємо:

$$\tilde{r}''(t) + \tilde{r}'^2(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{c_{gl}^2}{h^2} = g_0 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} h.$$

Нехай $c_{gl} = 0$. Тоді останнє рівняння запишеться у вигляді:

$$\tilde{r}''(t) e^{\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} / (g_0 \gamma) = \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}. \text{ Звідси}$$

$$\begin{aligned}
h & = \gamma e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} = \gamma e^{-(\ln(g_0 \gamma / R) - \ln(C - r + \tilde{r}(t)))} = R / g_0 (g_0 \gamma / R - |r - R t^2 / 2|), \\
|r - R t^2 / 2| & < g_0 \gamma / R.
\end{aligned}$$

Нехай $\gamma_h(t) = const, \tilde{r}(t) = vt$. Тоді функція швидкості (3.14) матиме

ВИГЛЯД:

$$u(r, t) = \frac{1}{r(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})} (C(t) + vr \gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} - v \gamma \int e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr).$$

Рівняння (3.15) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} + 1/r \right) v^2 \frac{h-c_{gl}}{h} + \frac{C'(t)}{r(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})} - \frac{C(t) v \gamma \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}}}{r(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})^2} - \\
& - \frac{v^2 \gamma^2 e^{-2\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon}}{(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})^2} + \frac{v^2 \gamma^2 \int e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}}}{r(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})^2} = \\
& = g_0 \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} (h-c_{gl}) + \left(\frac{1}{r(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})} (C(t) + vr \gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -v\gamma \int e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr) v \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} - \left(\frac{1}{r(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})} (C(t) + \right. \\
& \left. + v\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} - v\gamma \int e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr) \right)^2 \left(\frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} - \frac{1}{r} \right) - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Аналізуючи в (3.18) доданки, що не містять множників $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}$, для

$$\text{випадку } C(t) = 0 \text{ отримуємо: } \left(\frac{v^2 c_{gl}^2}{h} - g_0 \right) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h-c_{gl}) = -g_0 \frac{\partial b}{\partial r}.$$

Нехай $-g_0 \frac{\partial b}{\partial r} = C + F \frac{1}{r} + G \frac{1}{r^2}$. Тоді з (3.18) отримуємо рівняння для

функції, що визначає профіль хвилі:

$$\frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} = \frac{C}{\left(\frac{v^2 c_{gl}^2}{h} - g_0 \right) (h-c_{gl})} = \frac{C}{g_0 \left(\frac{c_{gl}^3}{h^3} - 1 \right) (h-c_{gl})} = \frac{Ch^3}{g_0 (c_{gl}^3 - h^3) (h-c_{gl})}.$$

Проводячи заміну методу біжучої хвилі, отримуємо загальний розв'язок у

$$\text{вигляді: } \frac{g_0}{C} \gamma e^{-\psi} + \frac{c_{gl}^3}{c_{gl}^3 2(\gamma e^{-\psi} + c_{gl})^2} = x + D.$$

Розглянемо випадок, коли в (3.18) рівний 0 коефіцієнт, що містить множник $1/r$. Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned}
& v^2 \frac{h-c_{gl}}{hr} + \frac{v^2 \gamma^2 \int e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}}}{r(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})^2} = - \frac{1}{r(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})} v^2 \gamma \int e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr \times \\
& \times \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} + \frac{2v^2 \gamma^2 e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} \int e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h}}{r(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})^2} + \frac{v^2 \gamma^2 e^{-2\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}}}{r(\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})^2}.
\end{aligned}$$

$$\text{Звідси } \gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} c_{gl} + c_{gl}^2 = -2\gamma \int e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} c_{gl}.$$

Позначимо $\int e^{-\frac{g(u)}{\varepsilon}} du = \psi(u)$. Тоді матимемо рівняння:

$$\psi'^2(u) / (2\psi(u)) + c_{gl}\psi'(u) / (2\gamma\psi(u)) = \psi''(u).$$

Розглядаючи, наприклад, початкові умови $\psi(0) = 0.7, \psi'(0) = 1$ та $\gamma = -0.1, c_{gl} = 1.1, v = \sqrt{c_{gl}g_0}$, отримуємо розв'язок відповідної задачі Коші. Профіль хвилі зображений на рис.3.2. Для випадку $C(t) = const$ з (3.18) отримуємо:

$$\begin{aligned} & v\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} c_{gl} + v c_{gl}^2 - C(v+1) \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} (\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl}) + 2v\gamma \int e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} c_{gl} = \\ & = -2\gamma C e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} \frac{g'(r-vt)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

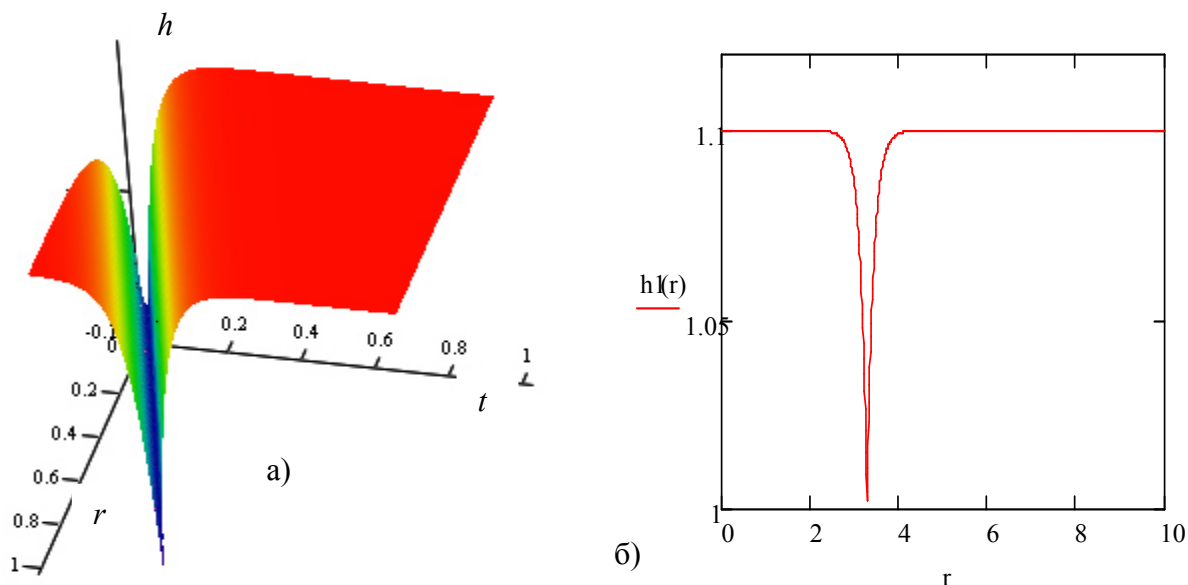


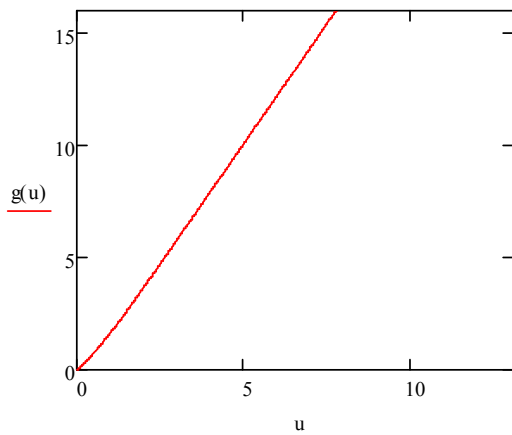
Рис.3.2. а) поверхня $h(r,t)$, б) графік функції $h(r,2)$

Звідси, позначивши $\int e^{-\frac{g(u)}{\varepsilon}} du = \psi(u)$, отримуємо рівняння:

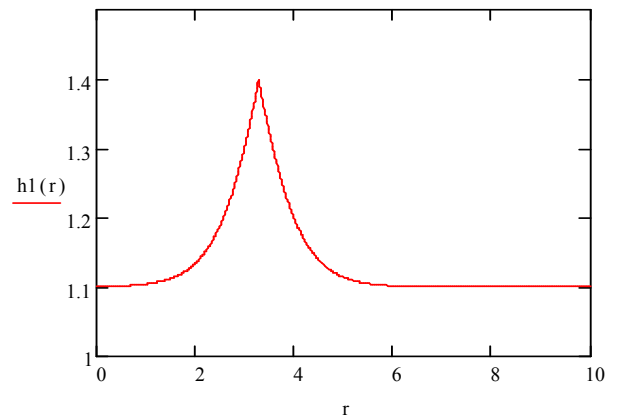
$$v\gamma\psi'^2(u)c_{gl} + v c_{gl}^2\psi'(u) = \psi''(u)(2\gamma C\psi'(u) + 2v\gamma c_{gl}\psi(u) - C(v+1)(\gamma\psi'(u) + c_{gl})).$$

При цьому отримали умову для функції дна:

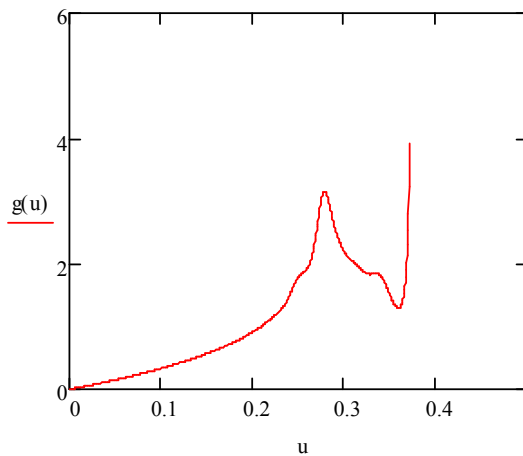
$$g_0 \frac{\partial b}{\partial r} = \left(g_0 - \frac{v^2 c_{gl}^2}{h} \right) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) - \frac{2v\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} v\gamma \int e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr}{r^2 (\gamma e^{-\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})^2}$$



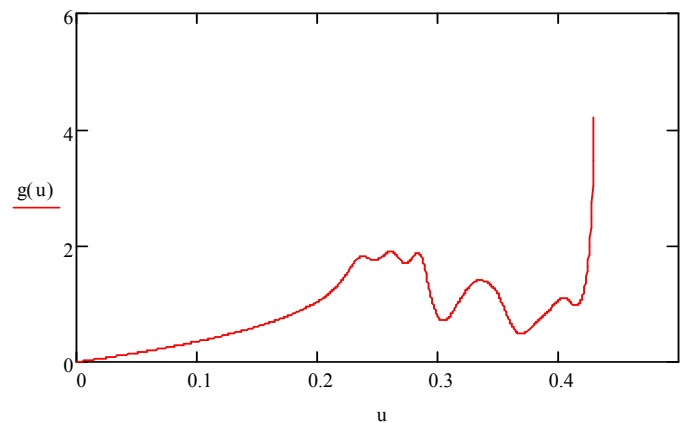
а)



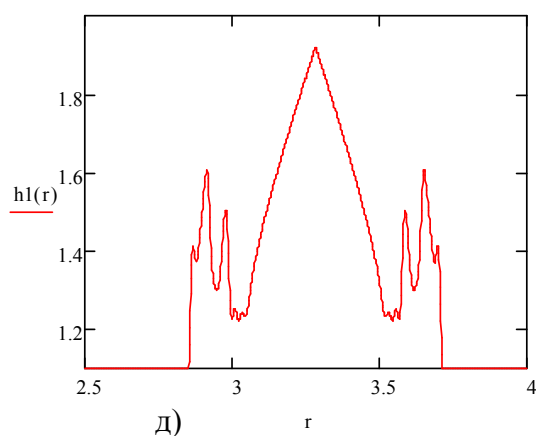
б)



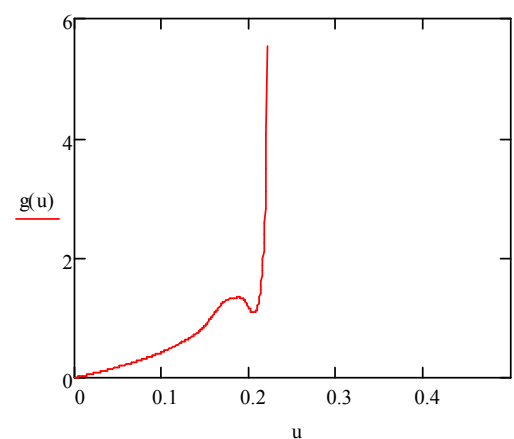
в)



г)



д)



е)

Рис.3.3 а) графік функції $g(u)$, випадок $\gamma = 0.3$, б) профіль хвилі при $\gamma = 0.3$ в) випадок $\gamma = 0.8$, г) випадок $\gamma = 0.82$, д) профіль хвилі при $\gamma = 0.82$ е) випадок $\gamma = 0.89$.

$$\frac{(v\gamma \int e^{\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} dr)^2}{r^2(\gamma e^{\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}} + c_{gl})^2} \left(\frac{g'(r-vt)}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} - \frac{1}{r} \right).$$

На рис.3.3 зображені графіки функцій $g(u)$ при $c_{gl} = 1.1, v = \sqrt{c_{gl}g_0}$, $\psi(0) = 0.7, \psi'(0) = 1$, на рис.3.4– поверхня, що описує профіль відповідної хвилі в часі.

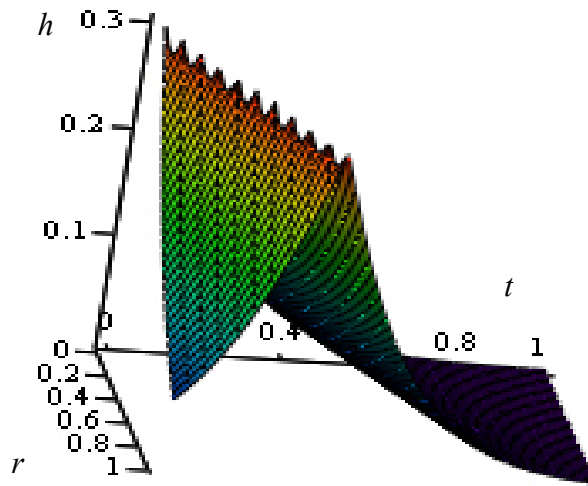


Рис.3.4 Поверхня $h(r,t)$ при $\gamma = 0.3$.

3.1.3 Випадки спеціальних представлень функції швидкості

Розглянемо окремі випадки розв'язків, коли профіль хвилі не змінюється. Нехай функція швидкості має вигляд:

$$\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t) = u. \quad (3.19)$$

Відповідне представлення для швидкості можна отримати, продиференціювавши перше рівняння системи (3.11) по t , друге – по r та використавши умову рівності змішаних похідних. Звідси:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{r}''(t) - g_0 \frac{\frac{\partial h}{\partial t} \tilde{r}'(t) - h \tilde{r}''(t)}{(\tilde{r}'(t))^2}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -g_0 \frac{\partial h}{\partial r} / \tilde{r}'(t).$$

Тоді з співвідношення (3.20) отримуємо:

$$\frac{\partial u}{r \partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + g_0 \frac{\partial^2 b}{\partial r^2}. \quad (3.21)$$

Підставляючи (3.21) в систему (3.7) отримуємо:

$$\begin{aligned} \tilde{r}''(t) - g_0 \frac{\gamma_h'(t)(h - c_{gl}) / \gamma_h(t) + (h - c_{gl})\tilde{r}'(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}}{\tilde{r}'(t)} + g_0 \frac{h\tilde{r}''(t)}{(\tilde{r}'(t))^2} = \\ = g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) - (\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t)) g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) / \tilde{r}'(t) - \\ - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}, \end{aligned}$$

$$2g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) / \tilde{r}'(t) = - \frac{\gamma_h'(t)}{\gamma_h(t)} \frac{h - c_{gl}}{h} - \frac{\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t)}{r},$$

Нехай $\frac{\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t)}{r}$ – мале значення. Тоді $2g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} / \tilde{r}'(t) = - \frac{\gamma_h'(t)}{\gamma_h(t)} \frac{1}{h}$.

Нехай $\frac{\gamma_h'(t)}{\gamma_h^2(t)} = C$, $\tilde{r}'(t) = v$. Тоді $\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} = - \frac{Cv}{2g_0} e^{\frac{g(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}}$, $c_{gl} = 0$. Отримали

просте рівняння для знаходження функції $g()$. Тоді рівняння для функції дна

$$\begin{aligned} \text{матиме вигляд: } \frac{\partial b}{\partial r} = \frac{\gamma_h'(t)(h - c_{gl}) / \gamma_h(t) + (h - c_{gl})v \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}}{v} + \\ + \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) - (v - g_0 h / v) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) / v. \end{aligned}$$

3.1.4 Випадок залежності амплітуди від просторової змінної

Нехай

$$h(r, \phi, t, \varepsilon) = \gamma_h(r) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\} + c_{gl}. \quad (3.22)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= \gamma_h'(r) \exp\left\{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\} - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \gamma_h(r) \exp\left\{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\} = \\ &= \gamma_h'(r)(h-c_{gl}) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h-c_{gl}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \gamma_h(r) \exp\left\{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\} \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} = (h-c_{gl}) \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}.$$

З врахуванням (3.23) система (3.7) запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{h-c_{gl}}{h} \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} - \frac{u}{r} - u \frac{h-c_{gl}}{h} (\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}), \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial r} - g_0 (\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}) h - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} u(r, t) &= e^{\int \frac{1}{r} - (\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}) \frac{h-c_{gl}}{h} dr} (C(t) - \\ &- \int \frac{h-c_{gl}}{h} \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} e^{-\int \frac{1}{r} - (\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}) \frac{h-c_{gl}}{h} dr} dr) = \\ &= \frac{1}{r} e^{-\int (\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}) \frac{h-c_{gl}}{h} dr} (C(t) - \tilde{r}'(t) \int \frac{h-c_{gl}}{h} \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} r e^{\int (\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}) \frac{h-c_{gl}}{h} dr} dr). \end{aligned}$$

Нехай

$$u = \tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t). \quad (3.25)$$

$$\text{Звідси} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{r}''(t) - g_0 \frac{\frac{\partial h}{\partial t} \tilde{r}'(t) - h \tilde{r}''(t)}{\tilde{r}'^2(t)}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -g_0 \frac{\partial h}{\partial r} / \tilde{r}'(t).$$

Підставляємо останні співвідношення в систему (3.24):

$$\begin{aligned} -g_0 \frac{\partial h}{\partial r} / \tilde{r}'(t) &= -\tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} - \frac{\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t)}{r} - \\ &- (\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t)) (\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\tilde{r}''(t) - g_0 \frac{\frac{\partial h}{\partial t} \tilde{r}'(t) - h \tilde{r}''(t)}{\tilde{r}'^2(t)} = u g_0 \frac{\partial h}{\partial r} / \tilde{r}'(t) - g_0 (\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}) h - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}.$$

Звідси

$$\begin{aligned}
\tilde{r}''(t) - g_0 \frac{(h\tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon})\tilde{r}'(t) - h\tilde{r}''(t)}{\tilde{r}'^2(t)} &= (1 - g_0 h / \tilde{r}'^2(t))g_0(\gamma_h'(r)h / \gamma_h(r) - \\
-g_0(\gamma_h'(r)h / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}h) / \tilde{r}'(t) &= -\tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} - \\
-\frac{\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t)}{r} - (\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t))(\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}), & \quad (3.27) \\
-\frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}h) - g_0(\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon})h - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}, & \\
-g_0(\gamma_h'(r)h / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}h) / \tilde{r}'(t) &= -\tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} - \frac{\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t)}{r} - \\
-(\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t))(\gamma_h'(r) / \gamma_h(r) - \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}), & \\
-2g_0(\gamma_h'(r)h / \gamma_h(r)) / \tilde{r}'(t) + 2g_0 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}h / \tilde{r}'(t) &= -\frac{\tilde{r}'(t) - g_0 h / \tilde{r}'(t)}{r} - \\
-\tilde{r}'(t)\gamma_h'(r) / \gamma_h(r), & \\
-2g_0\gamma_h'(r)h / (\gamma_h(r) / \tilde{r}'(t)) + 2g_0 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}h / \tilde{r}'(t) &= -\tilde{r}'(t)\gamma_h'(r) / \gamma_h(r), \\
-2g_0\gamma_h'(r)e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} / (\gamma_h^2(r)\tilde{r}'(t)) + 2g_0 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} / \tilde{r}'(t) &= -\tilde{r}'(t)\gamma_h'(r) / \gamma_h^2(r).
\end{aligned}$$

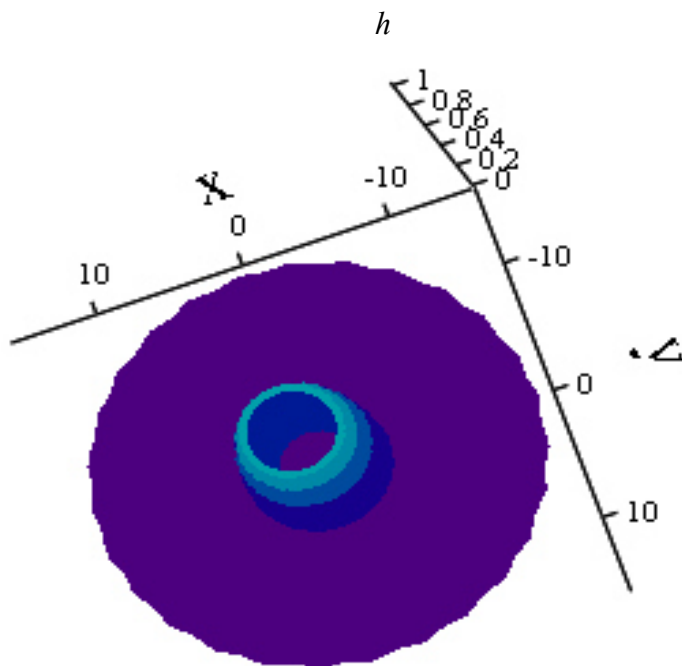


Рис.3.5 Профіль кругової хвилі

Нехай $\gamma_h'(r) / \gamma_h^2(r) = C$. Тоді з останнього співвідношення:

$$-2g_0 C e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} / \nu + 2g_0 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} / \nu = -\tilde{r}'(t)C.$$

Отримали рівняння для функції $g()$.

3.1.5 Комбінація типу “солітон-антисолітон”

Нехай

$$h(r, \phi, t, \varepsilon) = \gamma_h(t) \exp\left\{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\}. \quad (3.28)$$

Звідси:

$$\frac{\partial h}{\partial r} = -\frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \gamma_h(t) \exp\left\{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\} = -\frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} h, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = -\frac{g''(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} h + \left(\frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right)^2 h, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \gamma_h'(t) h / \gamma_h(t) + h \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}.$$

Введемо функцію виду:

$$\tilde{h}(r, \phi, t, \varepsilon) = \gamma_h(t)(r-\tilde{r}(t)-\Delta(t)) \exp\left\{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\} + c_{gl} = h(r, \phi, t, \varepsilon)(r-\tilde{r}(t)-\Delta(t)) +$$

$$+ c_{gl} = h(r, \phi, t, \varepsilon) \delta(r, t) + c_{gl},$$

де $\delta(r, t) = r - \tilde{r}(t) - \Delta(t)$. Тоді

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial r} \delta + h, \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial r} \delta + h \frac{\partial \delta}{\partial r}, \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \delta - h(\tilde{r}'(t) + \Delta'(t)), \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \delta + h \frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

Підставляючи відповідні представлення в (3.7), отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= -(\gamma_h'(t) / \gamma_h(t) + \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}) \frac{h\delta}{h\delta + c_{gl}} - \frac{\partial \delta}{\partial t} \frac{h}{h\delta + c_{gl}} - \\ &-\frac{u}{r} - u \left(-\frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial r} \right) \frac{h}{h\delta + c_{gl}}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial r} + g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} h \delta - g_0 h \frac{\partial \delta}{\partial r} - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}. \quad (3.32)$$

Нехай

$$u = \tilde{r}'(t) - g_0(h + c_{gl}) / \tilde{r}'(t). \quad (3.33)$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{r}''(t) - g_0 \frac{\frac{\partial h}{\partial t} \tilde{r}'(t) - (h + c_{gl}) \tilde{r}''(t)}{\tilde{r}'^2(t)}, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -g_0 \frac{\partial h}{\partial r} / \tilde{r}'(t). \quad (3.35)$$

Враховуючи (3.34),(3.35) з (3.31) отримуємо:

$$\begin{aligned} -g_0 \frac{\partial h}{\partial r} / \tilde{r}'(t) &= -(\gamma_h'(t) / \gamma_h(t) + \tilde{r}'(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}) \frac{h \delta}{h \delta + c_{gl}} - \\ &= -\frac{\partial \delta}{\partial t} \frac{h}{h \delta + c_{gl}} - \frac{u}{r} - (\tilde{r}'(t) - g_0(h + c_{gl}) / \tilde{r}'(t)) \left(-\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial r} \right) \frac{h}{h \delta + c_{gl}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

За умов $\gamma_h'(t) = 0, \tilde{r}'(t) = v$ з (3.36) отримуємо:

$$\begin{aligned} g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} h / v &= -v \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h \delta}{h \delta + c_{gl}} + \\ &+ v \frac{h}{h \delta + c_{gl}} - (v - g_0(h + c_{gl}) / v) \left(-\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \delta + 1 \right) \frac{h}{h \delta + c_{gl}}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} / v &= -v \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{\delta}{h \delta + c_{gl}} + \\ &+ v \frac{1}{h \delta + c_{gl}} - (v - g_0(h + c_{gl}) / v) \left(-\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \delta + 1 \right) \frac{1}{h \delta + c_{gl}}, \\ \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (g_0 / v + v \frac{\delta}{h \delta + c_{gl}} - (v - g_0(h + c_{gl}) / v) \frac{\delta}{h \delta + c_{gl}}) &= \\ = v \frac{1}{h \delta + c_{gl}} - (v - g_0(h + c_{gl}) / v) \frac{1}{h \delta + c_{gl}}, \end{aligned}$$

$$\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \left(g_0 / v + v \frac{\delta}{h\delta + c_{gl}} - (v - g_0(h + c_{gl}) / v) \frac{\delta}{h\delta + c_{gl}} \right) = \frac{g_0(h + c_{gl})}{v(h\delta + c_{gl})},$$

$$\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \left(g_0 / v + g_0(h + c_{gl}) / v \frac{\delta}{h\delta + c_{gl}} \right) = \frac{g_0(h + c_{gl})}{v(h\delta + c_{gl})},$$

$$\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h\delta + c_{gl} + (h + c_{gl})\delta) = h + c_{gl}.$$

Звідси

$$\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} = (h + c_{gl}) / (2h\delta + c_{gl}(1 + \delta)).$$

З рівняння (3.32) маємо:

$$\begin{aligned} \tilde{r}''(t) - g_0 \frac{\frac{\partial h}{\partial t} \tilde{r}'(t) - (h + c_{gl}) \tilde{r}''(t)}{\tilde{r}'^2(t)} &= (\tilde{r}'(t) - g_0(h + c_{gl}) / \tilde{r}'(t)) g_0 \frac{\partial h}{\partial r} / \tilde{r}'(t) + \\ + g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} h\delta - g_0 h \frac{\partial \delta}{\partial r} - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Звідси отримуємо рівняння для функції дна:

$$\begin{aligned} h v \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} - g_0 \frac{\varepsilon}{v} &= -(1 - g_0(h + c_{gl}) / v^2) g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} h + g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} h\delta - \\ - g_0 h - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial r} &= (h + c_{gl}) g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} h / v^2 + \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} h\delta - h = \\ &= (h + c_{gl})^2 g_0 h / ((2h\delta + c_{gl}(1 + \delta))v^2) + (h + c_{gl})h\delta / (2h\delta + c_{gl}(1 + \delta)) - h = \\ &= h((h + c_{gl})^2 g_0 / ((2h\delta + c_{gl}(1 + \delta))v^2) + (h + c_{gl})\delta / (2h\delta + c_{gl}(1 + \delta)) - 1). \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.2 Структура розв'язків рівнянь газової динаміки гравітуючого газового диску

Розглянемо систему рівнянь газової динаміки гравітуючого диску галактики [393]:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial(r\sigma u)}{r\partial r} + \frac{\partial(\sigma v)}{r\partial \varphi} = 0, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial r} - D \frac{p}{\sigma} \frac{d \ln \Omega_z}{dr}, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sigma r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma_s p \left(\frac{\partial ru}{r\partial r} + \frac{\partial v}{r\partial \varphi} \right) + u \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = (\gamma_s - 1) pu \frac{d \ln(C\Omega_z)}{dr}, \quad (3.44)$$

де u, v - радіальна та азимутальна компоненти швидкості газу, σ, p - поверхневі щільність та тиск в газовому диску, Φ - деякий гравітаційний потенціал. Для тонкого газового диску, що знаходиться в полі центрального об'єкта маси M_1 , параметр Ω_z є кеплерівська кутова швидкість: $\Omega_z^2 = GM_1 / r^3$ G -гравітаційна стала, $\gamma_s = 1 + 2(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, γ -об'ємний показник адіабати, що визначає зв'язок між внутрішньою енергією та тиском:

$$E = \frac{P}{\gamma - 1}.$$

Зауважимо, що $\Omega_z = \sqrt{GM_1} / r^{3/2}$. Тоді $\frac{d(\ln \Omega_z)}{dr} = -\frac{3}{2r}$. Нехай має місце

політропний закон, що зв'язує поверхневий тиск та поверхневу щільність:

$$p = B \sigma^{\gamma_s}.$$

В такому випадку співвідношення (3.4) узгоджується з (3.1), якщо права частина рівняння (3.4) є 0. Такий випадок можливий, коли $\gamma_s = 1$ або

$C\Omega_z = const$. Розглядають також ізентропічні моделі, коли виконується

співвідношення: $\ln \frac{p_0}{\sigma_0^{\gamma_s} \Omega_z^{\gamma_s - 1}} = const$. Звідси, зважаючи на політропність,

$$\ln \frac{B}{\Omega_z^{\gamma_s - 1}} = const \text{ або } \Omega_z = const.$$

Тоді система (3.41)-(3.44) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} \right) + u \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{v \partial \sigma}{r \partial \varphi} &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - B \gamma_s \sigma^{\gamma_s - 2} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \sigma^{\gamma_s - 2} \frac{B \gamma_s}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

де $u(r, \varphi, t), v(r, \varphi, t)$ - радіальна та азимутальна компоненти швидкості газу відповідно, $\sigma(r, \varphi, t)$ - поверхнева густина газового диску, $\Phi(r, \varphi, t)$ - гравітаційний потенціал, B, D - деякі невід'ємні сталі.

Зауважимо, що система (3.45) є квазілінійною.

У випадку неізентропічної моделі друге рівняння системи (3.45) матиме вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - B \gamma_s \sigma^{\gamma_s - 2} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{3}{2r} D B \sigma^{\gamma_s - 1}.$$

Нехай $u_0(r) \equiv 0, v_0(r), \sigma_0(r, \varphi, t), \Phi_0(r)$ - функції, що є розв'язками системи (3.5) (рівноважні компоненти швидкості, густини та гравітаційного потенціалу відповідно). Підставивши ці функції в систему (3.5), отримуємо:

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial t} + \frac{v_0 \partial \sigma_0}{r \partial \varphi} = 0, \quad -\frac{v_0^2}{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 2} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}.$$

Аналізуючи останнє рівняння бачимо, що у випадку, коли $u_0(r) \equiv 0$ обов'язково повинні залежати від кута та часу або азимутальна складова швидкості, або гравітаційний потенціал, чого бути не може. Отже, $v_0(r) = v_0(r, \varphi, t)$.

Тоді маємо рівняння:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} = -\sigma_0^{\gamma_s - 2} \frac{B \gamma_s}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi}.$$

Отже, отримали систему для "рівноважних" значень:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} + \frac{v_0 \partial \sigma_0}{r \partial \varphi} = 0, \\ -\frac{v_0^2}{r} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-2} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{3}{2r} DB \sigma_0^{\gamma_s-1}, \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} = -\sigma_0^{\gamma_s-2} \frac{B \gamma_s}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi}. \end{array} \right.$$

Будемо шукати розв'язок системи (3.45) (аналогічно як в роботі [281]) у вигляді суми рівноважних величин та деяких збурень:

$$\begin{aligned} \sigma(r, \varphi, t) &= \sigma_0(r, \varphi, t) + \sigma_1(r, \varphi, t), \\ \Phi(r, \varphi, t) &= \Phi_0(r) + \Phi_1(r, \varphi, t), \\ u(r, \varphi, t) &= u_1(r, \varphi, t), \\ v(r, \varphi, t) &= v_0(r, \varphi, t) + v_1(r, \varphi, t). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Гравітаційний потенціал задовольняє рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_1}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 4\pi G \sigma_1 \delta(z).$$

Зауважимо, що у випадку, коли $\gamma_s = 2$ в останній системі збурення можемо вважати довільним - адже при розкладі в ряд величин виду

$$(\sigma_0 + \sigma_1)^{\gamma_s-1} = \sigma_0^{\gamma_s-1} + (\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s-2} \sigma_1 + O(\sigma_1^2),$$

$$(\sigma_0 + \sigma_1)^{\gamma_s-2} = \sigma_0^{\gamma_s-2} + (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \sigma_1 + O(\sigma_1^2)$$

не потрібно враховувати малість збурень густини. Окремо можемо розглянути і випадок, коли $\gamma_s = 3$. В цьому випадку також може бути відсутньою умова малості збурення густини, однак при цьому слід враховувати, що

$$(\sigma_0 + \sigma_1)^{\gamma_s-1} = (\sigma_0 + \sigma_1)^2 = \sigma_0^2 + 2\sigma_0 \sigma_1 + \sigma_1^2,$$

$$(\sigma_0 + \sigma_1)^{\gamma_s-2} = \sigma_0 + \sigma_1.$$

Будемо підставляти співвідношення (3.46) в систему (3.45). В результаті отримаємо систему для збурень:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} + \sigma_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_1}{r} + \frac{\partial v_1}{r \partial \varphi} \right) + u_1 \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{v_1}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{1}{r} \left(\sigma_1 u_1 + u_1 r \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \sigma_1 r \frac{\partial u_1}{\partial r} + \sigma_1 \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + v_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} \right) = 0, \\
& \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{2v_0 v_1}{r} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_1 \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} - B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} - \\
& - B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_1 \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{3}{2r} BD (\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \sigma_1 + \frac{v_1^2}{r} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}, \\
& \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{u_1 v_0}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_1 \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} - \\
& - \frac{B\gamma_s}{r} \sigma_0^{\gamma_s - 2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \sigma_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} - u_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{v_1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \frac{u_1 v_1}{r}. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Введемо вектор-функцію збурень $f_1(r, \varphi, t) = (u_1(r, \varphi, t), v_1(r, \varphi, t), \sigma_1(r, \varphi, t))$.

Тоді функцію $f_1(r, \varphi, t)$ будемо знаходити у вигляді:

$$f_1(r, \varphi, t) = \varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon), \quad (3.48)$$

де $\psi_f(t) = (\psi_u(t), \psi_v(t), \psi_\sigma(t))$, $\psi_u(t)$, $\psi_v(t)$, $\psi_\sigma(t)$, $\tilde{r}(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$ - деякі функції, причому $\tilde{r}(t) \geq 0$, $\psi_\sigma(t) \geq 0$, ε - малий параметр, ε_0 - деяка константа,

$$\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = \exp \left\{ -\frac{g(r - \tilde{r}(t)) + g(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \right\},$$

де $g(x)$ - функція, яка має властивості:

$$g(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty), g(0) = 0, g(-x) = g(x),$$

існують константи $\alpha_1, \tilde{\alpha}_1, \alpha_2, \tilde{\alpha}_2, c_1 > 0, c_2 > 0, 0 < \alpha_1, \tilde{\alpha}_1 < 1, 0 < \alpha_2, \tilde{\alpha}_2 < 1$ а також $\varepsilon > 0$ такі, що $\tilde{c}_1 g^{\tilde{\alpha}_1}(x) \leq |g'(x)| \leq c_1 g^{\alpha_1}(x)$, $|g''(x)| \leq c_2 g^{\alpha_2}(x)$ у області $\{x : g(x) \leq -\varepsilon \ln \varepsilon\}$.

Очевидно, що така функція існує, наприклад $g(x) = x^4$. Бачимо, що в такому випадку збурення (3.48) являє собою одиночну хвилю типу δ -солітона [213], причому точка максимуму збурення рухається за траєкторією,

що описується в полярній системі координат функціями $\tilde{r}(t)$ та $\tilde{\varphi}(t)$.

Продиференціювавши співвідношення (3.47), отримаємо:

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = -\varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon), \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -\varepsilon_0 \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} = & \varepsilon_0 \psi_f'(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) [\tilde{\varphi}'(t) g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) + \\ & + \tilde{r}'(t) g'(r - \tilde{r}(t))]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Будемо підставляти співвідношення (3.49) в систему (3.45). Маємо:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \times \\ & \times \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) + \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) [\tilde{\varphi}'(t) g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) + \tilde{r}'(t) g'(r - \tilde{r}(t))] - \right. \\ & - \frac{v_0}{r} \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) + \sigma_0 \left(-\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_u(t) - \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon r} \psi_v(t) \right) + \\ & + \frac{1}{r} (-\varepsilon_0 \psi_u(t) r \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \psi_\sigma(t) r \varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_u(t) \times \\ & \times \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \\ & \left. - \varepsilon_0 \psi_v(t) \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \psi_u'(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) [\tilde{\varphi}'(t) g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) + \\ & + \tilde{r}'(t) g'(r - \tilde{r}(t))] - \frac{v_0}{r} \varepsilon_0 \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \\ & - \frac{2v_0 \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - B \gamma_s (\gamma_s - 2) \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \\ & + B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 2} \varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \\ & + B \gamma_s (\gamma_s - 2) \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_u(t) \times \\
& \times \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \frac{\varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} \varepsilon_0 \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \\
& + \frac{(\varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon))^2}{r}, \\
& \varepsilon_0 \psi_v'(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) [\tilde{\varphi}'(t) g'(\varphi - \varphi(t)) + \\
& + \tilde{r}'(t) g'(r - \tilde{r}(t))] + \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{\partial v_0}{\partial r} - \\
& - \frac{v_0}{r} \varepsilon_0 \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \frac{\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) v_0}{r} = \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} - \frac{B \gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \\
& + \frac{B \gamma_s}{r} \sigma_0^{\gamma_s - 2} \varepsilon_0 \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \\
& + \frac{B \gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \varepsilon_0 \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \\
& + \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \frac{\varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{\varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} \varepsilon_0 \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \\
& - \frac{\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r}. \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Надалі будемо розглядати наступні області:

$$G_\varepsilon^1 = \{(r, \varphi, t) : g(r - \tilde{r}(t)) + g(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) \geq -\varepsilon \ln \varepsilon, t \in [0, T], r \leq R\},$$

$$G_\varepsilon^2 = \{(r, \varphi, t) : g(r - \tilde{r}(t)) + g(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) \leq -\varepsilon \ln \varepsilon, t \in [0, T], r \leq R\},$$

$$G_\varepsilon^\alpha = \{(r, \varphi, t) : g(r - \tilde{r}(t)) + g(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) < \varepsilon^{1/\alpha_1}, t \in [0, T]\}.$$

3.3 Проблеми існування локалізованих солітоноподібних розв'язків рівнянь газової динаміки гравітуючого газового диску

Твердження 1 Нехай $\varepsilon_0 = \varepsilon^{1-\alpha_1} \vartheta(\varepsilon)$, $\vartheta(\varepsilon)$ – деяка функція, така що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vartheta(\varepsilon) = 0, \sigma_0(r), v_0(r), \frac{d\sigma_0(r)}{dr}, \frac{dv_0(r)}{dr} – \text{обмежені функції.}$$

Тоді існують такі функції $\tilde{r}(t) \geq 0$, $\tilde{\varphi}(t)$ та стала $T > 0$, що розв'язок системи (3.45) може бути знайдений у вигляді (3.48) з точністю:

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon_0 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}), & (r, \varphi, t) \in G_\varepsilon^1 \\ O(\vartheta(\varepsilon)), & (r, \varphi, t) \in G_\varepsilon^2 \end{cases} \quad (3.54)$$

При цьому $\psi_u(t) \equiv 0$, $\psi_v(t) \equiv 0$, $\psi_\sigma(t) = \psi_\sigma \geq 0$.

Твердження 2 Нехай в області $G = \{(r, \varphi) : r_1 \leq r \leq r_2\}$ поверхнева густина має вигляд:

$$\sigma_0(r) = Cr^D - \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma}{2}, \quad (3.55)$$

де C – така стала, що $\sigma_0(r) \geq 0$. Тоді існують такі стала $T > 0$ і функції $\tilde{r}(t) \geq 0$, $\tilde{\varphi}(t)$, що на інтервалі $[0, T]$ розв'язок системи (3.45) може бути знайдений у вигляді (3.48) з точністю :

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon_0 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}), & (r, \varphi, t) \in G_\varepsilon^1, \\ O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1}), & (r, \varphi, t) \in G_\varepsilon^\alpha. \end{cases} \quad (3.56)$$

При цьому: $\psi_u(t) \equiv 0$, $\psi_v(t) \equiv 0$, $\psi_\sigma(t) \equiv \psi_\sigma > 0$, а ε_0 та α – довільні додатні константи.

Твердження 3 Нехай $\sigma_0(r) \geq 0, v_0(r)$ – неперервно-диференційовні та обмежені в деякій області $G = \{(r, \varphi) : r_1 \leq r \leq r_2\}$ функції. Тоді існують такі значення $T > 0$ і обмежені диференційовні функції $\psi_u(t), \psi_v(t), \psi_\sigma(t) \geq 0$, $\tilde{r}(t) \geq 0, \tilde{\varphi}(t)$, що на інтервалі $[0, T]$ розв'язок системи (3.45) може бути знайдений у вигляді (3.48) з точністю (3.56).

При цьому $\psi_\sigma'(t) \geq 0$, а стала $\varepsilon_0 > 0$ має бути такою, щоб функція

$\frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{\sigma_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} + \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma(t)}{\tilde{r}(t)}$ не змінювала знак при $t \in [0, T]$.

Очевидно, що у випадку, коли $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} + \frac{\sigma_0(r)}{r} \geq 0$, $r \in G$, стала ε_0 – довільне додатне число .

Доведення.

Будемо аналізувати вирази $\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)$ та $\frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)$

. Введемо функцію $f(x, y) = \frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon}\}$ і знайдемо її екстремум.

Маємо очевидну нерівність: $f(x, y) = \frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon}\} \leq \frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\frac{x^2}{\varepsilon}\}$.

Продиференціювавши функцію $f(x) = \frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\frac{x^2}{\varepsilon}\}$, отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = c_1 \left(\frac{2\alpha_1 x^{2\alpha_1-1}}{\varepsilon} - \frac{2x^{2\alpha_1+1}}{\varepsilon^2} \right) \exp\{-\frac{x^2}{\varepsilon}\} = c_1 \frac{2x^{2\alpha_1-1}}{\varepsilon} \left(\alpha_1 - \frac{x^2}{\varepsilon} \right) \exp\{-\frac{x^2}{\varepsilon}\}. \quad \text{Звідси}$$

$x^2 = \alpha_1 \varepsilon$, $x = \pm \sqrt{\alpha_1 \varepsilon}$. Очевидно, що мінімум цієї функції досягається в точці 0.

Функція парна. Отже, в точці $x = \sqrt{\alpha_1 \varepsilon}$ - максимум. Значення функції в цій точці рівне

$$\frac{c_1 (\alpha_1 \varepsilon)^{\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\alpha_1\} = \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} \exp\{-\alpha_1\}. \quad \text{Тоді очевидно є нерівність:}$$

$$\frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\{-\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon}\} \leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} \exp\{-\alpha_1\}.$$

Зауважимо, що у області , що визначається співвідношенням $\{x : x^2 \geq -\varepsilon \ln \varepsilon\}$ максимальне значення функції досягається на границі області - в точці $x_{\max} = \sqrt{-\varepsilon \ln \varepsilon}$ і рівне $f(\sqrt{-\varepsilon \ln \varepsilon}) = c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}$.

При виконанні умови $\{x : x^2 \leq \varepsilon^{1+\alpha}\}$ максимальне значення функції досягається в точці $x_{\max} = \varepsilon^{(1+\alpha)/2}$ і рівне $f(x) = c_1 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1} \exp\{-\varepsilon^\alpha\}$. Отже, у

області G_ε^2 мають місце нерівності:

$$\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} e^{-\alpha_1}, \quad (3.57)$$

$$\frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} e^{-\alpha_1}. \quad (3.58)$$

В області G_ε^1 виконуються нерівності:

$$\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}, \quad (3.59)$$

$$\frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}. \quad (3.60)$$

Звідси отримуємо нерівності, що виконуються в області G_ε^1 :

$$|f_1| \leq \varepsilon_0 \varepsilon \psi_f(t),$$

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial r} \right| = \left| -\varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq \psi_f(t) \varepsilon_0 c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1},$$

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \right| = \left| -\varepsilon_0 \frac{2(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq \psi_f(t) \varepsilon_0 c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1},$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_1}{\partial t} \right| &= \left| \varepsilon_0 \psi_f'(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) [\tilde{\varphi}'(t) g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) + \tilde{r}'(t) g'(r - \tilde{r}(t))] \right| \leq \\ &\leq \varepsilon_0 \varepsilon \left| \psi_f'(t) \right| + \varepsilon_0 c_1 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} \left| \psi_f(t) (\tilde{\varphi}'(t) + \tilde{r}'(t)) \right|. \end{aligned}$$

Розглядаючи систему (3.47), бачимо, що всі рівності виконуються з точністю: $O(\varepsilon_0 \varepsilon) + O(\varepsilon_0 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}) = O(\varepsilon_0 (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1})$ для будь-яких

обмежених функцій $\sigma_0(r)$, $\nu_0(r)$, $\frac{d\sigma_0(r)}{dr}$, $\frac{d\nu_0(r)}{dr}$, а отже, розв'язок системи

(3.47) в області G_ε^1 можна знайти у вигляді (3.48).

Розглянемо область G_ε^α . В цій області при $\alpha > 0$ виконуються нерівності:

$1 \geq \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \geq \exp\left\{-\frac{2\varepsilon^{2+2\alpha}}{\varepsilon}\right\} = \exp\{-2\varepsilon^{1+2\alpha}\} = 1 - 2\varepsilon^{1+2\alpha} + o(\varepsilon^{1+2\alpha})$. Тоді з

врахуванням властивості функції $f(x)$, яка при виконанні співвідношення $\{x : x^2 \leq \varepsilon^{1+\alpha}\}$ досягає максимального значення $x_{\max} = \varepsilon^{(1+\alpha)/2}$ і яке рівне $f(x) = c_1 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1} \exp\{-\varepsilon^\alpha\}$, можемо записати нерівності:

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial r} \right| = \left| -\varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq \psi_f(t) \varepsilon_0 c_1 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1} \exp\{-\varepsilon^\alpha\},$$

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \right| = \left| -\varepsilon_0 \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq \psi_f(t) \varepsilon_0 c_1 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1} \exp\{-\varepsilon^\alpha\},$$

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial t} \right| = \left| \varepsilon_0 \psi_f'(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) [\tilde{\varphi}'(t) g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) + \tilde{r}'(t) g'(r - \tilde{r}(t))] \right| \leq \varepsilon_0 \varepsilon \left| \psi_f'(t) \right| + \varepsilon_0 c_1 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1} \exp\{-\varepsilon^\alpha\} \left| \psi_f(t) (\tilde{\varphi}'(t) + \tilde{r}'(t)) \right|.$$

Аналізуючи останні нерівності бачимо, що в системі (3.47) величини $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}$,

$\frac{\partial f_1}{\partial r}$ мають порядок малості $O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1})$. Крім того, виконується рівність:

$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \varepsilon_0 \psi_f'(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1})$. При цьому функцію $\omega(r, \varphi, t, \varepsilon)$

можемо вважати рівною 1 з точністю $O(\varepsilon^{1+2\alpha})$. Тоді з системи (3.47) можемо отримати наступну систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_1(r, \varphi, t)}{\partial t} = -\sigma_0(r) \frac{u_1(r, \varphi, t)}{r} - u_1(r, \varphi, t) \frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \sigma_1(r, \varphi, t) u_1(r, \varphi, t) + \\ + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1}), \\ \frac{\partial u_1(r, \varphi, t)}{\partial t} = \frac{2v_0(r)v_1(r, \varphi, t)}{r} - 3B\sigma_1(r, \varphi, t) \frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} + \frac{3}{r} BD\sigma_0(r)\sigma_1(r, \varphi, t) + \\ + \frac{3}{2r} BD\sigma_1^2(r, \varphi, t) + \frac{v_1^2(r, \varphi, t)}{r} + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1}), \\ \frac{\partial v_1(r, \varphi, t)}{\partial t} = -u_1(r, \varphi, t) \frac{\partial v_0(r)}{\partial r} - \frac{u_1(r, \varphi, t)v_0(r)}{r} - \frac{u_1(r, \varphi, t)v_1(r, \varphi, t)}{r} + \\ + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1}). \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Підставимо тепер (3.48) в (3.61). Розкладаючи всі функції, що залежать від r , в ряд Тейлора в околі $\tilde{r}(t)$ і враховуючи, що $|r - \tilde{r}(t)| \leq \varepsilon^{1+\alpha}$, отримаємо систему співвідношень:

$$\begin{aligned} \psi_\sigma'(t) &= -\psi_u(t) \left(\frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{\sigma_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} + \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma(t)}{\tilde{r}(t)} \right) + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1}), \\ \psi_u'(t) &= 2 \frac{v_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} \psi_v(t) + \varepsilon_0 \frac{\psi_v^2(t)}{\tilde{r}(t)} - 3B \psi_\sigma(t) \frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \\ &+ \frac{3BD}{\tilde{r}(t)} \sigma_0(\tilde{r}(t)) \psi_\sigma(t) + \frac{3BD}{2\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1}), \\ \psi_v'(t) &= -\psi_u(t) \left(\frac{\partial v_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{v_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} + \frac{\varepsilon_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \right) + O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1}) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Зауважимо, що система (3.62) є нелінійною автономною системою.

Виходячи з фізичних міркувань, можемо сформулювати такі додаткові умови: $\psi_\sigma(t) \geq 0$, $\sigma_0(r) \geq 0$, $r_0 \leq \tilde{r}(t) \leq R$, де R – деяка стала. Крім того, функції $\sigma_0(r), v_0(r)$ є неперервно-диференційовними згідно умов твердження. Тоді можна показати, що задача Коші для системи (3.62) має розв'язок для будь-яких початкових умов. Оскільки функція $\psi_\sigma(t)$ визначає величину збурення густини (разом з константою ε_0), то нас цікавитимуть саме такі розв'язки системи (3.62), при яких збурення густини суттєво не зменшується з часом. Тоді можна говорити про солітонний характер розв'язків. Адже відомо, що солітони являють собою структурно стійкі відокремлені хвилі, що поширюються у нелінійному середовищі.

Проаналізуємо розв'язки системи (3.62) при різних функціях $\sigma_0(r)$ та $v_0(r)$. Як бачимо з першого рівняння системи (3.62), знак $\psi_\sigma'(t)$ залежить від функцій $\psi_u(t)$ та функції виду:

$$\frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{\sigma_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} + \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma(t)}{\tilde{r}(t)}. \quad (3.63)$$

Якщо функція (3.63) невід'ємна, то при $\psi_u(t) < 0$ виконується умова: $\psi_\sigma'(t) \geq 0$. Зауважимо, що при будь-яких обмежених функціях $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r}$ та $\sigma_0(r)$ можемо підібрати таке достатньо велике значення ε_0 , що функція (3.63) буде додатною.

Нехай у деякій області $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} + \frac{\sigma_0(r)}{r} \geq 0$. Тоді функція (3.63) є невід'ємною при довільному невід'ємному значенні ε_0 .

Нехай $\psi_u(t) = 0, t \in [t_1, t_2]$. Тоді з першого та третього рівняння системи (3.62) $\psi_\sigma(t) = \psi_\sigma = const, \psi_v(t) = \psi_u(t) = 0$. З другого рівняння системи (3.62)

отримаємо умову:
$$\frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} - \frac{D}{\tilde{r}(t)} \sigma_0(\tilde{r}(t)) - \frac{D}{2\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = O(\varepsilon_0 \varepsilon^{(1+\alpha)\alpha_1-1}).$$

Остання умова виконується, якщо

$$\sigma_0(r) = r^D (C + \int \frac{D}{2r} \varepsilon_0 \psi_\sigma r^{-D} dr) = r^D (C - \frac{D \varepsilon_0 \psi_\sigma}{2D} r^{-D}) = Cr^D - \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma}{2},$$

де C – деяка така стала, що $\sigma_0(r) \geq 0$. Звідси отримуємо твердження 2.

Нехай у деякій області $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} = O(\varepsilon_1)$, $\tilde{r}(t)$ – монотонно-зростаюча невід'ємна функція, яка задовольняє умови: $\tilde{r}(0) = r_0, \frac{1}{r_0} < \varepsilon_1$. Тоді $\frac{1}{\tilde{r}(t)} < \varepsilon_1$.

Отже з першого рівняння системи (3.62) випливає, що $\psi_\sigma'(t) = O(\varepsilon_1)$. При цьому знак функції $\psi_u(t)$ може бути будь-яким.

Нехай у деякій області $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} + \frac{\sigma_0(r)}{r} < 0$. Тоді, очевидно, можемо вибрати такі мале значення ε_0 та функцію $\tilde{r}(t)$, щоб виконувалась нерівність:

$$\frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{\sigma_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} + \frac{\varepsilon_0 \psi_\sigma(t)}{\tilde{r}(t)} \leq 0. \text{ В такому випадку, при виконанні умови}$$

$\psi_u(t) > 0$, виконується нерівність: $\psi_\sigma'(t) \geq 0$. Аналізуючи друге рівняння

системи (3.66) бачимо, що при виконанні умови $\frac{\partial v_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \frac{v_0(\tilde{r}(t))}{\tilde{r}(t)} \leq 0$ виконуються нерівності $\psi_u'(t) \geq 0$ та $\psi_v'(t) \geq 0$. Отже отримали всі умови, що сформульовані в твердженні 3. Доведення завершено.

Нехай $v_1 \equiv 0$, $\gamma_s = 2$. Тоді з системи (3.51-3.53) маємо:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) + \\ & + \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) [\tilde{\varphi}'(t) g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) + \tilde{r}'(t) g'(r - \tilde{r}(t))] - \right. \\ & \left. - \frac{v_0}{r} \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) + \sigma_0 \left(-\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_u(t) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} (-\varepsilon_0 \psi_u(t) r \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \psi_\sigma(t) r \varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right) = 0. \end{aligned}$$

Оскільки $g'(\varphi - \varphi(t)) = 0$, $\varphi = \varphi(t)$, $g'(r - \tilde{r}(t)) = 0$, $r = \tilde{r}(t)$, то

$$\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{\varepsilon} g'(\varphi - \varphi(t)) \psi_\sigma(t) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r}) + \\ & + \frac{\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma(t) (\tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) - 2\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) = 0. \end{aligned}$$

Звідси маємо систему:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \omega (\psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega) = 0, \\ \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon} g'(\varphi - \varphi(t)) \psi_\sigma(t) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r}) = 0, \\ \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma(t) (\tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) - 2\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega) = 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

З (3.52) та (3.53) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= -\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \psi_u'(t) - \\
&- \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\tilde{r}'(t) - 2B \psi_\sigma(t) / \psi_u(t) - \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) - \\
&- \psi_u(t) \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r}),
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} &= -\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r}) + \\
&+ \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{2B}{r} \psi_\sigma(t).
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Нехай

$$\begin{aligned}
\Phi_1(r, \varphi, t) &= (\tilde{r}'(t) \psi_u(t) - 2B \psi_\sigma(t)) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = \tilde{r}'(t) u_1(r, \varphi, t, \varepsilon) - \\
&- 2B \sigma_1(r, \varphi, t, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Тоді з (3.65) та (3.66) отримуємо:

$$\begin{aligned}
0 &= -\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \psi_u'(t) + \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \\
&- \psi_u(t) \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r}),
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$0 = -\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r}) + \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{\tilde{r}'(t) \psi_u(t)}{r}. \tag{3.68}$$

Зауважимо, що при $\tilde{r}'(t) \psi_u(t) - 2B \psi_\sigma(t) = 0$ збурення гравітаційного потенціалу є нульовим. Розглянемо окремі випадки.

Нехай $u_1 = 0$. Тоді з системи (3.64), (3.67-3.68) отримуємо співвідношення:

$$\psi_\sigma'(t) = 0, \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} = 0, \tilde{r}'(t) = 0 \tag{3.69}$$

Рівняння (3.55)-(3.46), очевидно, виконуються. Нехай має місце співвідношення: $\frac{v_0(r)}{r} = \Omega = const$. Ця умова означає, що газовий диск

галактики обертається, як тверде тіло. Зауважимо, що поверхневий показник адіабати $\gamma_s = 2$ відповідає об'ємному показнику адіабати $\gamma = 2$, який можемо

знайти за формулою Хантера [2]: $\gamma_s = 3 - \frac{2}{\gamma}$ (такий показник відповідає газу типу іонізованої плазми). Отже, можемо сформулювати твердження:

Твердження 4. Нехай $\gamma_s = 2$. Тоді частковий розв'язок системи (3.47) може бути знайдений у вигляді (3.48), причому

$$u_1(r, \varphi, t) = v_1(r, \varphi, t) = 0, \psi_\sigma(t) = \psi_\sigma = const, \tilde{\varphi}'(t) = \frac{v_0(r)}{r} = \Omega = const,$$

$$\tilde{r}(t) = \tilde{r} = const, \Phi_1(r, \varphi, z, t) = -2B\varepsilon_0\psi_\sigma\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = -2B\sigma_1(r, \varphi, t, \varepsilon).$$

Отже, для випадку $\gamma_s = 2$ знайшли частковий розв'язок системи (3.47) у формі збурень, що являють собою незатухаючу хвилю, яка рухається по колу із сталою кутовою швидкістю: $\tilde{\varphi}'(t) = \frac{v_0(r)}{r} = const$. При цьому збурення поверхневої густини може бути довільним.

Нехай $u_1 \neq 0$. Аналізуючи співвідношення (3.64)-(3.66), бачимо що в цьому випадку можемо говорити лише про наближений розв'язок. При цьому зауважимо, що у нас будуть малі параметри: ε , збурення поверхневої густини та швидкостей. Подальший аналіз суттєво залежатиме від співвідношення між цими малими параметрами та властивостей функції g . Однак, необхідно зауважити, що точність, з якою повинні виконуватись усі рівності (3.64)-(3.66) повинна бути меншою від величини збурення поверхневої густини (інакше ми не зможемо говорити про існування солітона).

Будемо аналізувати систему (3.64) та рівняння (3.67)-(3.68). Нехай

$$\tilde{\varphi}'(t) = \frac{v_0(r)}{r} = \Omega = const. \quad (3.70)$$

Для спрощення подальших викладок будемо вважати, що $\psi_u(t) = \psi_u = const$, $\psi_\sigma(t) = \psi_\sigma = const$, $\sigma_0(r) = \sigma_0 = const$. Нехай виконується співвідношення:

$$\varepsilon_0 \psi_u = \varepsilon^{1-\alpha_1}. \quad (3.71)$$

Розглянемо систему (3.64). З першого рівняння маємо:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \left(\sigma_0 \frac{\psi_u}{r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma \psi_u \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right) = \\ & = \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \psi_u(t) \frac{\sigma_0}{r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \psi_u \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq \\ & \leq \frac{\sigma_0}{r} \varepsilon^{1-\alpha_1} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma \varepsilon^{1-\alpha_1} \leq \varepsilon^{1-\alpha_1}. \end{aligned}$$

В останній нерівності врахували малість величини $\frac{\sigma_0}{r}$ що впливає з

даних спостережень а також малість $\frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma$. Отже перше рівняння системи

(3.64) виконується з точністю, що не перевищує $\varepsilon^{1-\alpha_1}$. Друге рівняння виконується, якщо виконується (3.70). З третього рівняння маємо:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma (\tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u / \psi_\sigma - 2\varepsilon_0 \psi_u \omega) = \\ & = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma (\tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u / \psi_\sigma - 2\varepsilon_0 \psi_u \omega) = \\ & = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma (\tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u / \psi_\sigma) - \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma 2\varepsilon_0 \psi_u \omega, \\ & \left| \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma 2\varepsilon_0 \psi_u \omega \right| \leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} e^{-\alpha_1} \psi_\sigma 2\varepsilon_0^2 |\psi_u| \leq \\ & \leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1} |\psi_u|} e^{-\alpha_1} \psi_\sigma 2\varepsilon^{2(1-\alpha_1)} \leq 2c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \frac{\psi_\sigma}{|\psi_u|} \varepsilon^{1-\alpha_1}, \\ & \left| \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma (\tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u / \psi_\sigma) - \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma 2\varepsilon_0 \psi_u \omega \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{\varepsilon_0 \omega}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma (\tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u / \psi_\sigma) \right| + 2c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \frac{\psi_\sigma}{|\psi_u|} \varepsilon^{1-\alpha_1}. \end{aligned}$$

Нехай

$$\tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) = 0. \quad (3.72)$$

Тоді третє рівняння системи (3.64) має місце з точністю $2c_1\alpha_1^{\alpha_1}e^{-\alpha_1}\frac{\psi_\sigma}{|\psi_u|}\varepsilon^{1-\alpha_1}$.

Розглянемо рівняння (3.67). З нерівностей (3.57)-(3.58) випливає нерівність:

$$\left| \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \varepsilon^{1-\alpha_1}.$$

Отже, рівняння (3.67) виконується з точністю $c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \varepsilon^{1-\alpha_1}$.

З співвідношення (3.68) маємо:

$$\psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \left(\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \right) \leq \varepsilon^{1-\alpha_1} \left(\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \right) = 2\Omega \varepsilon^{1-\alpha_1} \leq \varepsilon^{1-\alpha_1}. \quad \text{Розглянемо}$$

вираз $\frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{\tilde{r}'(t) \psi_u}{r}$. З нерівності (3.58) випливає наступна

нерівність:

$$\left| \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \tilde{r}'(t) \psi_u(t) \right| \leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1} r} e^{-\alpha_1} |\tilde{r}'(t)| \varepsilon^{1-\alpha_1} = \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1} |\tilde{r}'(t)|}{r} e^{-\alpha_1}.$$

Звідси $\frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1}}{r} |\tilde{r}'(t)| \leq \varepsilon^{1-\alpha_1}$ або $\frac{|\tilde{r}'(t)|}{r} \leq \frac{\varepsilon^{1-\alpha_1} e^{-\alpha_1}}{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}$, а з врахуванням (3.72)

$$\frac{\sigma_0 |\psi_u|}{r \psi_\sigma} \leq \frac{\varepsilon^{1-\alpha_1} e^{-\alpha_1}}{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}. \quad \text{Тоді отримуємо додаткове обмеження на область, у якій}$$

розглядаємо нашу систему:

$$e^{-\alpha_1} c_1 \alpha_1^{\alpha_1} \frac{\sigma_0 |\psi_u|}{\varepsilon^{1-\alpha_1} \psi_\sigma} \leq r \leq R. \quad (3.73)$$

Отже, при виконанні співвідношення (3.73) траєкторії солітонів визначаються рівностями (3.72) та (3.70), з яких отримуємо:

$$\tilde{r}(t) = c_r + \sigma_0 \psi_u t / \psi_\sigma + O(\varepsilon^{1-\alpha_1}), \quad \tilde{\varphi}(t) = c_\varphi + \Omega t,$$

$$(\tilde{\varphi}(t) - c_\varphi) / \Omega = (\tilde{r}(t) - c_r) \psi_\sigma / (\sigma_0 \psi_u),$$

$$\tilde{r}(t) = (\tilde{\varphi}(t) - c_\varphi) \sigma_0 \psi_u / (\psi_\sigma \Omega) + c_r.$$

Бачимо, що остання рівність є рівнянням спіралі Архімеда.

Твердження 5 Нехай $\gamma_s = 2$. Тоді частковий розв'язок системи (3.47)

може бути знайдений у вигляді (3.48) у області

$$G = \{(r, \varphi) : e^{-\alpha_1} c_1 \alpha_1^{\alpha_1} \frac{\sigma_0 |\psi_u|}{\varepsilon^{1-\alpha_1} \psi_\sigma} \leq r \leq R\} \text{ з точністю, що не перевищує величину}$$

$$\max \{2c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \frac{\psi_\sigma}{|\psi_u|}, c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1}, 1\} \varepsilon^{1-\alpha_1}. \text{ При цьому } v_1(r, \varphi, t) = 0,$$

$$\psi_u(t) = \psi_u = const, \psi_\sigma(t) = \psi_\sigma = const, \tilde{\varphi}(t) = c_\varphi + \Omega t,$$

$$\tilde{r}(t) = c_r + \sigma_0 \psi_u t / \psi_\sigma, \sigma_0(r) = \sigma_0 = const, \frac{v_0(r)}{r} = \Omega = const,$$

$$\Phi_1(r, \varphi, z, t) = \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\sigma_0 \psi_u^2 - 2B \psi_\sigma^2) / \psi_\sigma.$$

Розглянемо випадок довільного параметра γ_s . Зауважимо, що рівняння (3.51) не залежить від параметра γ_s і його аналіз вже проведений вище. Тому будемо розглядати лише рівняння (3.52)-(3.53). Запишемо ці рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = & -\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) + \\ & + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} + B\gamma_s(\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}) - \\ & - \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\tilde{r}'(t) - B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) / \psi_u(t) - \\ & - B\gamma_s(\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) - \\ & - \psi_u(t) \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = & -\varepsilon_0 \omega(\psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} + \\ & + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega}{r}) - \varepsilon_0 \omega \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_v(t) (\tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega \psi_v(t) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{B\gamma_s}{r} \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t) / \psi_v(t) - \\
& - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_v(t) \omega - \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega).
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Нехай

$$\begin{aligned}
\Phi_1(r, \varphi, z, t) &= (\tilde{r}'(t) \psi_u(t) - B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-2}(r) \psi_\sigma(t)) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = \\
&= \tilde{r}'(t) u_1(r, \varphi, t, \varepsilon) - B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-2} \sigma_1(r, \varphi, t, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Для спрощення подальших викладок будемо вважати, що $\psi_u(t) = \psi_u = const$, $\psi_\sigma(t) = \psi_\sigma = const$, $\sigma_0(r) = \sigma_0 = const$, $\psi_v(t) = 0$.

Тоді рівняння (3.74)-(3.75) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned}
0 &= -\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_u'(t) - \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t) + B\gamma_s (\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}) + \\
&+ \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega (B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_u(t) \omega + \\
&+ \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega) - \psi_u(t) \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r}),
\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\varepsilon_0 \omega (\psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r}) - \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega (-\frac{\tilde{r}'(t) \psi_u(t)}{r} - \\
&- \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) \omega).
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Враховуючи рівності (3.70)- (3.72) маємо:

$$\begin{aligned}
0 &= \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t) + \\
&+ \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega (B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_u(t) \omega + \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega),
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\varepsilon_0 \omega (\psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r}) - \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega (-\frac{\tilde{r}'(t) \psi_u(t)}{r} - \\
&- \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) \omega).
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Розглядаємо рівняння (3.79). З врахуванням нерівностей (3.59)-(3.60) можемо записати наступні нерівності:

$$\left| \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \varepsilon^{1-\alpha_1},$$

$$\left| \varepsilon_0 \psi_\sigma \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \right| \leq \varepsilon^{1-\alpha_1} \frac{\psi_\sigma}{\psi_u} \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2},$$

$$\left| \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} B\gamma_s(\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0^2 \psi_\sigma^2(t) \omega^2 \right| \leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} e^{-\alpha_1} B\gamma_s(\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0^2 \psi_\sigma^2 \omega \leq$$

$$\leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} e^{-\alpha_1} B\gamma_s(\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon^{2(1-\alpha_1)} \psi_\sigma^2 / \psi_u^2 = c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} B\gamma_s(\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon^{1-\alpha_1} \frac{\psi_\sigma^2}{\psi_u^2}.$$

Розглянемо рівняння (3.80). Маємо:

$$\left| \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \left(\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \right) \right| \leq \varepsilon^{1-\alpha_1} \left| \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \right| = 2\Omega \varepsilon^{1-\alpha_1} \leq \varepsilon^{1-\alpha_1}.$$

Вираз $\frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{\tilde{r}'(t) \psi_u}{r}$ вже розглянули вище і отримали

співвідношення (3.73). Залишається розглянути вираз

$\frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0^2 \psi_\sigma^2(t) \omega^2$. Маємо нерівності:

$$\left| \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) \omega \right| \leq$$

$$\leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} e^{-\alpha_1} \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0^2 \psi_\sigma^2(t) \omega \leq$$

$$\leq \frac{c_1 \alpha_1^{\alpha_1}}{\varepsilon^{1-\alpha_1}} e^{-\alpha_1} \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon^{2(1-\alpha_1)} \psi_\sigma^2 / \psi_u^2 =$$

$$= c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\psi_\sigma^2}{\psi_u^2} \varepsilon^{1-\alpha_1}.$$

Отже, рівняння (3.79)-(3.80) виконуються з точністю, що не перевищує

$$\max \left\{ c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\psi_\sigma^2}{\psi_u^2}, 2c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \frac{\psi_\sigma}{|\psi_u|}, 1 \right\} \varepsilon^{1-\alpha_1}.$$

Твердження 6 Частковий розв'язок системи (3.47) може бути знайдений

у вигляді (3.48) у області $G = \{(r, \varphi) : e^{-\alpha_1} c_1 \alpha_1^{\alpha_1} \frac{\sigma_0 |\psi_u|}{\varepsilon^{1-\alpha_1} \psi_\sigma} \leq r \leq R\}$ з

точністю, що не перевищує величину

$$\max \left\{ c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} B \gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\psi_\sigma^2}{\psi_u^2}, 2c_1 \alpha_1^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \frac{\psi_\sigma}{|\psi_u|}, 1 \right\} \varepsilon^{1-\alpha_1}. \text{ При цьому}$$

$$v_1(r, \varphi, t) = 0, \psi_u(t) = \psi_u = \text{const}, \psi_\sigma(t) = \psi_\sigma = \text{const}, \tilde{\varphi}(t) = c_\varphi + \Omega t,$$

$$\tilde{r}(t) = c_r + \sigma_0 \psi_u t / \psi_\sigma, \sigma_0(r) = \sigma_0 = \text{const}, \frac{v_0(r)}{r} = \Omega = \text{const},$$

$$\Phi_1(r, \varphi, z, t) = \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\sigma_0 \psi_u^2 - 2B \psi_\sigma^2) / \psi_\sigma.$$

Як відомо [2], збурення гравітаційного потенціалу задовольняє рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 4\pi G \sigma_1 \delta(z), \quad (3.81)$$

де G - гравітаційна стала, $G = 6,67 * 10^{-11} \frac{\text{Н м}^2}{\text{кг}^2}$, $\delta(z)$ - деяка функція.

Розглянемо області:

$$G_\varepsilon^1 = \{(r, \varphi, t) : g(r - \tilde{r}(t)) + g(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) \geq -2\varepsilon \ln \varepsilon, t \in [0, T], r \leq R\},$$

$$G_\varepsilon^\alpha = \{(r, \varphi, t) : g(r - \tilde{r}(t)) \leq \varepsilon^{1+\alpha}, g(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) < \varepsilon^{1+\alpha}, t \in [0, T], r \leq R\}.$$

Будемо вважати, що збурення гравітаційного потенціалу має вигляд:

$$\Phi_1(r, \varphi, t) = \tilde{r}'(t) u_1(r, \varphi, t, \varepsilon) - 2B \sigma_1(r, \varphi, t, \varepsilon) = \varepsilon_0 (\tilde{r}'(t) \psi_u(t) - 2B \psi_\sigma(t)) w(r, \varphi, t, \varepsilon). \quad (3.82)$$

Надалі будемо розглядати ε_0 як функцію від z : $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(z)$. Причому будемо вважати, що в точці $z = 0$ ця функція досягає максимального значення: $\varepsilon_0(z) \leq \varepsilon_0(0) = \varepsilon_0$.

Тоді з рівняння (3.81) отримуємо:

$$\varepsilon_0(z) (\tilde{r}'(t) \psi_u - 2B \psi_\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right) + (\tilde{r}'(t) \psi_u - 2B \psi_\sigma) w \frac{\partial^2 \varepsilon_0(z)}{\partial z^2} = 4\pi G \delta(z) \psi_\sigma \varepsilon_0(z) w. \quad (3.83)$$

Розглянемо область G_ε^1 . Зауважимо, що в цій області мають місце очевидна нерівність: $|w| \leq \varepsilon^2$. Маємо:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = -\frac{g''(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \frac{g'^2(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon^2} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = -\frac{g''(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \frac{g'^2(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon^2} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon).$$

Проаналізуємо у області G_ε^1 величини $\frac{\partial f_1}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi^2}$. Зауважимо, що

у області $\{x : x^2 \geq -2\varepsilon \ln \varepsilon\}$ максимальне значення функції

$$f(x, y) = \frac{c_1 x^{2\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon}\right\} \text{ рівне}$$

$$f(-2\varepsilon \ln \varepsilon) = \frac{c_1 (-2\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1}}{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{-2\varepsilon \ln \varepsilon}{\varepsilon}\right\} = c_1 (-2\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} \varepsilon. \text{ Отже,}$$

$$\left| \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq c_1 (-2\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} \varepsilon. \text{ Аналогічно отримуємо нерівності:}$$

$$\left| \frac{g''(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq c_2 (-2\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_2} \varepsilon,$$

$$\frac{g'^2(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon^2} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq \frac{c_1 g^{2\alpha_1}(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon^2} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon).$$

Розглянемо функцію $f(x, y) = \frac{c_1 x^{4\alpha_1}}{\varepsilon^2} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon}\right\}$. Екстремум цієї

$$\text{функції } f(-2\varepsilon \ln \varepsilon) = \frac{c_1 (-2\varepsilon \ln \varepsilon)^{2\alpha_1}}{\varepsilon^2} \exp\left\{-\frac{-2\varepsilon \ln \varepsilon}{\varepsilon}\right\} = c_1 (-2\varepsilon \ln \varepsilon)^{2\alpha_1}.$$

Отже, $\frac{g'^2(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon^2} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \leq c_1 2^{2\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{2\alpha_1}$. Тоді маємо нерівності:

$$\left| \frac{\partial w}{\partial r} \right| = \left| -\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq c_1 (-2\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} \varepsilon,$$

$$\left| \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right| = \left| -\frac{g''(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \frac{g'^2(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon^2} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \right| \leq$$

$$\leq c_2 (-2\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_2} \varepsilon + c_1 2^{2\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{2\alpha_1},$$

$$\left| \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right| \leq c_2 (-2\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_2} \varepsilon + c_1 2^{2\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{2\alpha_1}.$$

Тоді виконується нерівність:

$$\left| \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right| \leq c_1 2^{2\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{2\alpha_1} + c_2 2^{\alpha_2} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_2} \varepsilon +$$

$$+ c_1 2^{\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} \varepsilon / r + (c_1 2^{2\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{2\alpha_1} + c_2 2^{\alpha_2} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_2} \varepsilon) / r^2 =$$

$$= (c_1 2^{2\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{2\alpha_1} + c_2 2^{\alpha_2} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_2} \varepsilon)(1 + 1/r^2) + c_1 2^{\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} \varepsilon / r.$$

Нехай виконується рівність:

$$(\tilde{r}'(t)\psi_u - 2B\psi_\sigma) \frac{\partial^2 \varepsilon_0(z)}{\partial z^2} = 4\pi G \delta(z) \psi_\sigma \varepsilon_0(z). \quad (3.84)$$

Очевидно, що можна підібрати функцію $\varepsilon_0(z)$ так, щоб рівняння (3.84) виконувалось. При цьому логічними є умови:

$$\varepsilon_0'(0) = 0, \varepsilon_0(0) = \varepsilon_0. \quad (3.85)$$

Тоді рівняння (3.84) виконується з точністю, що не перевищує величину

$$\varepsilon_0(z)(\tilde{r}'(t)\psi_u - 2B\psi_\sigma)(c_1 2^{2\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{2\alpha_1} + c_2 2^{\alpha_2} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_2} \varepsilon)(1 + 1/r^2) +$$

$$+ c_1 2^{\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} \varepsilon / r).$$

У області G_ε^α виконується нерівність:

$$\exp\{-2\varepsilon^{\alpha-1}\} \leq \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(t)) + g(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon}\right\} \leq 1.$$

З властивостей функції g випливають наступні нерівності:

$$\left| \frac{g''(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \right| \leq \frac{|c_2 g^{\alpha_2}((r - \tilde{r}(t)))|}{\varepsilon} \leq \frac{c_2 \varepsilon^{\alpha\alpha_2}}{\varepsilon} = c_2 \varepsilon^{\alpha\alpha_2-1},$$

$$\left| \frac{g'^2(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon^2} \right| \leq \frac{c_1^2 g^{2\alpha_1}((r - \tilde{r}(t)))}{\varepsilon^2} \leq \frac{c_1^2 \varepsilon^{2\alpha_1\alpha}}{\varepsilon^2} = c_1^2 \varepsilon^{2(\alpha_1\alpha-1)}.$$

Аналогічні нерівності будуть і для $g''(\varphi - \tilde{\varphi}(t))$ та $g'^2(\varphi - \tilde{\varphi}(t))$. Отже,

$$\left| \varepsilon_0(z)(\tilde{r}'(t)\psi_u - 2B\psi_\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right) \right| \leq \\ \leq \varepsilon_0(\tilde{r}'(t)\psi_u - 2B\psi_\sigma) ((c_2 \varepsilon^{\alpha\alpha_2-1} + c_1^2 \varepsilon^{2(\alpha_1\alpha-1)})(1+1/r^2) + c_1 \varepsilon^{\alpha_1\alpha-1}).$$

Якщо виконується рівняння (3.84), то рівняння (3.83) виконується з точністю, що не перевищує

$$\varepsilon_0(\tilde{r}'(t)\psi_u - 2B\psi_\sigma) ((c_2 \varepsilon^{\alpha\alpha_2-1} + c_1^2 \varepsilon^{2(\alpha_1\alpha-1)})(1+1/r^2) + c_1 \varepsilon^{\alpha_1\alpha-1}).$$

Твердження 7 Нехай збурення гравітаційного потенціалу визначається співвідношенням (3.82), $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(z)$ -функція, що є розв'язком задачі Коші (3.84)-(3.85). Тоді має місце рівняння Пуассона (3.81) з точністю, що не перевищує величину

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_0(z)(\tilde{r}'(t)\psi_u - 2B\psi_\sigma)(c_1 2^{2\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{2\alpha_1} + c_2 2^{\alpha_2} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_2} \varepsilon)(1+1/r^2) + \\ + c_1 2^{\alpha_1} (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{\alpha_1} \varepsilon / r, & (r, \varphi) \in G_\varepsilon^1 \\ \varepsilon_0(\tilde{r}'(t)\psi_u - 2B\psi_\sigma) ((c_2 \varepsilon^{\alpha\alpha_2-1} + c_1^2 \varepsilon^{2(\alpha_1\alpha-1)})(1+1/r^2) + c_1 \varepsilon^{\alpha_1\alpha-1}), \\ & (r, \varphi) \in G_\varepsilon^\alpha \end{cases}$$

де α таке число, що $\alpha\alpha_1 > 1$ та $\alpha\alpha_2 > 1$.

Зауважимо, що при виконання умови $\tilde{r}'(t)\psi_u - 2B\psi_\sigma = 0$ рівняння Пуассона виконується точно. При цьому збурення гравітаційного потенціалу рівне 0. Порівнявши останню рівність з співвідношенням (3.72) маємо: $\tilde{r}'(t) = \sigma_0 \psi_u / \psi_\sigma = 2B\psi_\sigma / \psi_u$. Звідси отримуємо умову для поверхневої щільності:

$$\sigma_0 = 2B\psi_\sigma^2 / \psi_u^2 \quad (3.86)$$

Отже, розглянули можливість знаходження розв'язків системи рівнянь газової динаміки галактик у формі відокремлених структурно-стійких хвиль, які являють собою збурення поверхневої густини та рівноважних компонент швидкостей у формі (3.48). При цьому зауважимо, що збурення гравітаційного потенціалу вважалось нульовим.

Зауважимо, що поверхнева густина у реальних гравітуючих газових дисках веде себе по-різному. Для низки галактик спостерігаються одночасно

як окремі області (кільця) зростання поверхневої густини, так і випадки, коли вона спадає з віддаленням від центру галактики практично по експоненті чи є близькою до константи [393].

У сформульованих вище твердженнях розглянуто лише певні конкретні ситуації. Становить значний інтерес прослідкувати, що відбувається з одиночною хвилею типу δ -солітона, коли вона проходить області максимуму чи мінімуму поверхневої густини, тобто значення змінних, при яких функція $\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r}$ змінює знак.

Аналізуючи рівняння (3.66), можна побачити, що в таких випадках відбуваються пульсації амплітуди – при переході через екстремум щільності одиночна хвиля спочатку зменшує свою амплітуду, але через деякий час при певних умовах вона знову може почати зростати (якщо, наприклад, значення амплітуди хвилі не зменшилось до критично-можливого малого значення, при якому вона вже фізично не може існувати).

3.4 Аналіз траєкторій солітонів

Для дослідження траєкторій солітоноподібних хвиль розглядатимемо випадок довільного параметра γ для системи (3.51)-(3.53).

Оскільки $g'(\varphi - \varphi(t)) = 0$ при $\varphi = \varphi(t)$ та $g'(r - \tilde{r}(t)) = 0$ при $r = \tilde{r}(t)$, то з (3.51) випливає співвідношення:

$$\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) = 0.$$

Тоді

$$\frac{\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{\varepsilon} g'(\varphi - \varphi(t)) \psi_\sigma(t) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r \psi_\sigma(t)} - \frac{2\varepsilon_0}{r} \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) + \frac{\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma(t) (\tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) - 2\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{\varepsilon} g'(\varphi - \varphi(t)) \psi_\sigma(t) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r \psi_\sigma(t)} - \\ & - \frac{2\varepsilon_0}{r} \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) = 0, \\ & \frac{\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{\varepsilon} g'(r - \tilde{r}(t)) \psi_\sigma(t) (\tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) - 2\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) = 0. \end{aligned}$$

Отже, маємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} & \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\ & \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r \psi_\sigma(t)} - \frac{2\varepsilon_0}{r} \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\ & \tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) - 2\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.87)$$

Аналогічно, аналізуючи рівняння (3.52)-(3.53), отримуємо відповідно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = & -\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} B D (\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) + \\ & + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} + B \gamma_s (\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}) - \\ & - \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\tilde{r}'(t) - B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) / \psi_u(t) - \\ & - B \gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \\ & - \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) - \psi_u(t) \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)), \end{aligned}$$

(3.88)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = & -\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} + \\ & + \frac{B \gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi}) - \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_v(t) (\tilde{r}'(t) - \\ & - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) - \\ & - \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \psi_v(t) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{B \gamma_s}{r} \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) / \psi_v(t) - \\ & - \frac{B \gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (3.89)$$

3.4.1 Випадок відсутності збурення гравітаційного потенціалу .

Нехай $\Phi_1 = 0$. Тоді з рівнянь (3.87)-(3.88) отримуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r \psi_\sigma(t)} - \frac{2\varepsilon_0}{r} \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) - 2\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0. \end{array} \right. \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} & \psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) + \\ & + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} + B\gamma_s(\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0, \\ & \tilde{r}'(t) - B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) / \psi_u(t) - B\gamma_s(\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \\ & - \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\ & \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (3.91)$$

У випадку, коли $\psi_u(t) = 0$ (3.88) перетворюється у систему:

$$\begin{aligned} & -\frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} + \\ & + B\gamma_s(\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0, \\ & B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 3} \psi_\sigma(t) (\sigma_0 + (\gamma_s - 2) \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) = 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

З рівняння (3.89) отримуємо:

$$\begin{aligned} & \psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} + \\ & + \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} = 0, \\ & \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\ & \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{B\gamma_s}{r} \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) / \psi_v(t) - \\ & - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (3.93)$$

У випадку, коли $\psi_v(t) = 0$ (3.93) матиме вигляд:

$$0 = -\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} + \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{B\gamma_s}{r} \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t) + \\
& + \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Звідси

$$\left\{ \begin{aligned}
& \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \psi_u(t) \frac{v_0}{r} + \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} = 0, \\
& \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{B\gamma_s}{r} \sigma_0^{\gamma_s-3} \psi_\sigma(t) (\sigma_0 + \\
& + (\gamma_s - 2) \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) = 0.
\end{aligned} \right. \quad (3.94)$$

Зауважимо, що якщо в цьому випадку $\psi_u(t) = 0$, то маємо систему:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} = 0, \\
& \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \frac{B\gamma_s}{r} \sigma_0^{\gamma_s-3} \psi_\sigma(t) (\sigma_0 + \\
& + (\gamma_s - 2) \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) = 0.
\end{aligned} \right. \quad (3.95)$$

Система (3.92) в цьому випадку запишеться у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned}
& -\frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t) + B\gamma_s (\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0 \\
& B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-3} \psi_\sigma(t) (\sigma_0 + (\gamma_s - 2) \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) = 0.
\end{aligned} \right.$$

Аналізуючи дві останні системи, маємо: $\sigma_0 + (\gamma_s - 2) \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0$.

Окрім того, $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0$ при $D = 0$. Отже, ненульове збурення

поверхневої густини може існувати в часі лише в області, де поверхнева густина є константою для ізентропічної моделі. При цьому траєкторії збурень співпадають з траєкторіями руху газу в системі.

Твердження 8 Нехай $\psi_u(t) = 0, \psi_v(t) = 0$. Тоді ненульове збурення поверхневої густини може існувати в часі лише в області, де поверхнева

густина є константою для ізентропічної моделі. При цьому траєкторії збурень співпадають з траєкторіями руху газу в системі та має місце співвідношення

$$\sigma_0 + (\gamma_s - 2)\varepsilon_0\psi_\sigma(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0 \quad (3.96)$$

в області $G_\varepsilon^\alpha = \{(r, \varphi, t) : g(r - \tilde{r}(t)) + g(\varphi - \tilde{\varphi}(t)) < \varepsilon^{1/\alpha_1}, t \in [0, T]\}$.

Зауважимо, що співвідношення (3.96) може бути виконане лише наближено. В області G_ε^α $1 \geq \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 1 - \varepsilon^{1/\alpha_1-1} + O(\varepsilon^{2/\alpha_1-2})$. Отже, (3.96)

матиме вигляд:

$$\sigma_0(\tilde{r}(t)) + (\gamma_s - 2)\varepsilon_0\psi_\sigma(t) = O(\varepsilon^{1/\alpha_1-1}). \quad (3.97)$$

Для неізентропічної моделі отримуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{B\gamma_s}{r}(\gamma_s - 2)\psi_\sigma(t)\sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} = 0, \\ -\frac{3}{2r}BD(\gamma_s - 1)\sigma_0^{\gamma_s-2}\psi_\sigma(t) + B\gamma_s(\gamma_s - 2)\psi_\sigma(t)\sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0, \\ \sigma_0 + (\gamma_s - 2)\varepsilon_0\psi_\sigma(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Звідси $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} = 0$ і отримуємо систему:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2r}D(\gamma_s - 1)\sigma_0 + \gamma_s(\gamma_s - 2) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0, \\ \sigma_0 + (\gamma_s - 2)\varepsilon_0\psi_\sigma(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Нехай $\psi_v(t) \neq 0$, $\psi_u(t) \neq 0$.

Маємо системи (3.90), (3.91), (3.93). Проаналізуємо рівняння, що містять $\tilde{r}'(t)$. Тоді отримуємо умови:

$$\begin{aligned} \psi_u(t)\varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= B\gamma_s\sigma_0^{\gamma_s-2}\psi_\sigma(t) / \psi_u(t) + B\gamma_s(\gamma_s - 2)\sigma_0^{\gamma_s-3}\varepsilon_0\psi_\sigma^2(t) / \\ &/ \psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon_0\psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = \sigma_0\psi_u(t) / \psi_\sigma(t) + 2\varepsilon_0\psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Звідси

$$B\gamma_s\sigma_0^{\gamma_s-2}\psi_\sigma(t) / \psi_u(t) + B\gamma_s(\gamma_s - 2)\sigma_0^{\gamma_s-3}\varepsilon_0\psi_\sigma^2(t) / \psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \quad (3.98)$$

$$\sigma_0 + (\gamma_s - 2)\varepsilon_0\psi_\sigma(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0 .$$

або:

$$\begin{aligned} \sigma_0\psi_u(t)/\psi_\sigma(t) + \varepsilon_0\psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0, \\ \sigma_0 + \varepsilon_0\psi_\sigma(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0 . \end{aligned} \quad (3.99)$$

Порівнюючи (3.98) та (3.99) бачимо, що $\gamma_s = 3$. Крім того, співвідношення (3.99) показує, що збурення поверхневої густини є від'ємним. Проаналізувавши рівняння, що містить $\tilde{\varphi}'(t)$ для систем (3.90),

$$(3.91), (3.93), \text{ отримуємо: } \psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r\psi_\sigma(t)} + \frac{2\varepsilon_0}{r} \psi_v(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon).$$

$$\text{Звідси } \psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r\psi_\sigma(t)} + \frac{\varepsilon_0}{r} \psi_v(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \text{ отримали рівняння (3.99).}$$

Отже, маємо систему для ненульового значення $\psi_v(t)$:

$$\begin{aligned} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial\sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial\sigma_0}{\partial\phi} + \frac{1}{r} \varepsilon_0\psi_\sigma(t)\psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0, \\ \psi_u'(t) - \frac{2v_0\psi_v(t)}{r} - \frac{3}{r} BD\sigma_0\psi_\sigma(t) + \frac{\varepsilon_0\psi_v^2(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} + 3B\psi_\sigma(t) \frac{\partial\sigma_0}{\partial r} &= 0, \\ \psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial v_0}{\partial\phi} + \frac{\psi_u(t)v_0}{r} + \frac{\psi_u(t)\varepsilon_0\psi_v(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} &= 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0, \\ \tilde{r}'(t) - \psi_u(t)\varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0, \\ \sigma_0 + \varepsilon_0\psi_\sigma(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Будемо розглядати систему в області G_ε^α . В цій області мають місце очевидні нерівності:

$$1 \geq \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 1 - \varepsilon^{1/\alpha_1 - 1} + O(\varepsilon^{2/\alpha_1 - 2}), g(r - \tilde{r}(t)) < \varepsilon^{1/\alpha_1} .$$

$$\text{Звідси } |r - \tilde{r}(t)| < g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1}) \text{ або } r = \tilde{r}(t) + \alpha g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1}), \alpha \in (-1, 1).$$

Тоді

$$\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t) + \alpha g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1}))}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \alpha g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1}) \frac{\partial^2 \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r^2} + o(\alpha g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1})).$$

Аналогічно можемо записати і інші розклади. Тоді отримуємо наступну систему, яка виконуватиметься з точністю $O(g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1}))$:

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{\tilde{r}(t)} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) = 0, \\ \psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} - \frac{3}{\tilde{r}(t)} BD \sigma_0 \psi_\sigma(t) + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t)}{\tilde{r}(t)} + 3B \psi_\sigma(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0, \\ \psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{\psi_u(t) v_0}{\tilde{r}(t)} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} = 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{\tilde{r}(t)} - \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = 0, \\ \sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t), t) + \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \tilde{r}'(t) + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} \tilde{\varphi}'(t) + \frac{\partial \sigma_0}{\partial t}\right) / \varepsilon_0 + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{\tilde{r}(t)} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{\sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t))}{\tilde{r}(t)} \psi_u(t) = 0, \end{aligned}$$

$$\psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} + \frac{3}{\tilde{r}(t)} BD \sigma_0^2(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t)}{\tilde{r}(t)} -$$

$$-3B \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0 = 0,$$

$$\psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{\psi_u(t) v_0}{\tilde{r}(t)} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} = 0,$$

$$\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{\tilde{r}(t)} - \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 = 0, \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = 0,$$

$$\psi_\sigma(t) = -\sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t), t) / \varepsilon_0.$$

або

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \psi_u(t) + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} \left(\frac{v_0}{\varepsilon_0 \tilde{r}(t)} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)}\right) + \frac{\partial \sigma_0}{\varepsilon_0 \partial t}\right) + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} = 0, \\
& \psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} + \frac{3}{\tilde{r}(t)} BD \sigma_0^2(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t)}{\tilde{r}(t)} - \\
& -3B \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0 = 0, \\
& \psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{\psi_u(t) v_0}{\tilde{r}(t)} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} = 0, \\
& \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{\tilde{r}(t)} - \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 = 0, \\
& \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = 0, \\
& \psi_\sigma(t) = -\sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} \frac{v_0(\tilde{r}(t))}{\varepsilon_0 \tilde{r}(t)} + \frac{\partial \sigma_0}{\varepsilon_0 \partial t} = 0, \\
& \psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} + \frac{3}{\tilde{r}(t)} BD \sigma_0^2(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t)}{\tilde{r}(t)} - \\
& -3B \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0 = 0, \\
& \psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{\psi_u(t) v_0}{\tilde{r}(t)} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} = 0, \\
& \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{\tilde{r}(t)} - \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 = 0, \\
& \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = 0, \\
& \psi_\sigma(t) = -\sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Перше рівняння описує рівноважні характеристики і виконується. Отже, маємо систему:

$$\begin{aligned}
& \psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} + \frac{3}{\tilde{r}(t)} BD \sigma_0^2(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t)}{\tilde{r}(t)} - \\
& -3B \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \frac{\partial v_0}{\partial \phi} + \frac{\psi_u(t)v_0}{\tilde{r}(t)} + \frac{\psi_u(t)\varepsilon_0\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} &= 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{\tilde{r}(t)} - \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 &= 0, \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\tilde{r}'(t) - \psi_u(t)\varepsilon_0 = 0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} + \frac{v_0 \partial \sigma_0}{r \partial \phi} &= 0, \\ -\frac{v_0^2}{r} &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - B\gamma_s \sigma_0 \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{3}{2r} DB\sigma_0^2, \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \phi} &= -\sigma_0 \frac{3B}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \phi}. \end{aligned} \right. \quad (3.101)$$

Підсумовуючи наведені вище міркування, можемо сформулювати наступне твердження:

Твердження 9 Нехай для неізентропічного випадку $\psi_v(t) \neq 0$, $\psi_u(t) \neq 0$, $\Phi_1(r, \phi, t) = 0$, $\gamma_s = 3$. Тоді траєкторії збурень виду (3.48) визначаються системою рівнянь (3.100) і при цьому мають місце співвідношення (3.101).

Як бачимо, в даному випадку можна говорити про наявність азимутального збурення швидкості солітона лише в деякому граничному випадку, коли $\gamma_s = 3$.

Нехай $\psi_u'(t) = \psi_v'(t) = \psi_\sigma'(t) = 0$. Тоді з системи (3.100) отримуємо:

$$\begin{aligned} -\frac{2v_0\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} + \frac{3}{\tilde{r}(t)} BD\sigma_0^2(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\psi_v^2(t)}{\tilde{r}(t)} - 3B \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0 &= 0, \\ \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \frac{\partial v_0}{\partial \phi} + \frac{\psi_u(t)v_0}{\tilde{r}(t)} + \frac{\psi_u(t)\varepsilon_0\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} &= 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{\tilde{r}(t)} - \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 &= 0, \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\tilde{r}'(t) - \psi_u(t)\varepsilon_0 = 0,$$

$$\psi_\sigma(t) = -\sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) / \varepsilon_0.$$

Звідси

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\
-\frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{r} B D \sigma_0 \psi_\sigma(t) + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} + 3B \psi_\sigma(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0 \\
\psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} = 0, \\
\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\
\tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\
\sigma_0 + \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0.
\end{array} \right. \quad (3.103)$$

Нехай $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} = 0$, $D = 0$. Тоді з (3.103) отримуємо

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_0}{r} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, & -\frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} + 3B \psi_\sigma(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0, \\
\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} + \frac{\varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} = 0, \\
\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, & \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0.
\end{aligned} \quad (3.104)$$

Оскільки $\sigma_0 + \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0$, то з першого рівняння останньої

системи отримуємо $\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0$. Тоді з (3.104) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_0}{r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = 0, & -\frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t)}{r} = 0, \\
\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} + \frac{\varepsilon_0 \psi_v(t)}{r} = 0, \\
\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\varepsilon_0 \psi_v(t)}{r} = 0, \\
\tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = 0.
\end{aligned} \quad (3.105)$$

Звідси отримуємо:

$$-2v_0(r(t)) + \varepsilon_0 \psi_v = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_0(r(t))}{\partial r} + \frac{v_0(r(t))}{r} + \frac{\varepsilon_0 \psi_v}{r} = 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0(r(t))}{r} - \frac{\varepsilon_0 \psi_v}{r} = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \psi_u \varepsilon_0 = 0. \end{array} \right. \quad (3.106)$$

Бачимо, що функція $v_0(r(t))$ повинна бути константою, $v_0(r(t)) = \varepsilon_0 \psi_v / 2$. Зауважимо, що радіальну швидкість можна вважати константою у досить широких областях галактик. Як приклад можемо розглянути інформацію про радіальну швидкість галактики NGC 23 [281], графік якої зображений на рис.3.5.

Нехай $\psi_v(t) = 0$, $\psi_u(t)$ -довільне. Розглядаємо загальну систему (3.87)-(3.89). Тоді, аналізуючи рівняння, що містять $\tilde{r}'(t)$, отримуємо умову:

$$\sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) + \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 3} \psi_\sigma(t) / \psi_u(t) (\sigma_0 + (\gamma_s - 2) \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)).$$

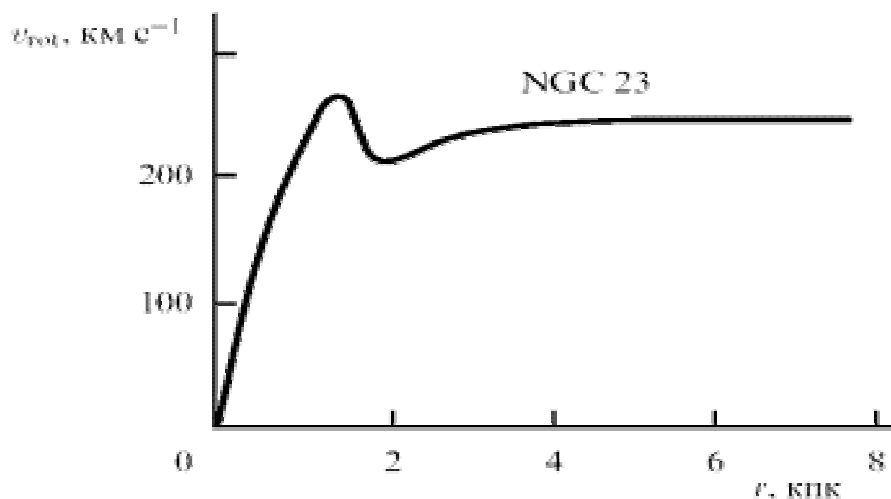


Рис.3.5 Радіальна швидкість галактики NGC 23

Однак, $\sigma_0 + (\gamma_s - 2) \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0$ (при великому значенні r ця умова знімається). Тоді $\sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) + \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0$ або $\sigma_0 + \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0$.

Знову маємо випадок $\gamma_s = 3$ та від'ємного збурення поверхневої густини солітона. Аналізуючи рівняння для $\tilde{\varphi}'(t)$ бачимо, що всі вони виконуються при $\psi_v(t) = 0$. Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0, \\ \psi_u'(t) - \frac{3}{r} B D \sigma_0 \psi_\sigma(t) + 3B \psi_\sigma(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} &= 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} = 0, \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} + \frac{3B}{r} \psi_\sigma(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} &= 0, \\ \sigma_0 + \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Вважаючи, що збурення щільності є малим та великим радіус r

$$\text{маємо: } \frac{\partial v_0(r, \varphi, t)}{\partial r} + \frac{v_0(r, \varphi, t)}{r} = 0, \quad v_0(r) = c e^{-\ln r} = \frac{c}{r} = \frac{c(\varphi, t)}{r}.$$

Будемо розглядати систему (3.107) в області G_ε^α . Тоді

$$1 \geq \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 1 - \varepsilon^{1/\alpha_1 - 1} + O(\varepsilon^{2/\alpha_1 - 2}), \quad g(r - \tilde{r}(t)) < \varepsilon^{1/\alpha_1}. \quad \text{Звідси}$$

$$|r - \tilde{r}(t)| < g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1}) \quad \text{або} \quad r = \tilde{r}(t) + \alpha g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1}), \quad \alpha \in (-1, 1). \quad \text{Тоді}$$

$$\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t) + \alpha g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1}))}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \alpha g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1}) \frac{\partial^2 \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r^2} + o(\alpha g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1})),$$

і маємо систему:

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} = O(g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1})), \\ \psi_u'(t) + 3B \psi_\sigma(t) \frac{\partial \sigma_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} = O(g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1})), \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = O(g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1})), \end{cases} \quad (3.108)$$

$$\tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = O(\varepsilon^{1/\alpha_1 - 1}).$$

Отримана система дозволяє знайти траєкторії відокремленої хвилі а також проаналізувати збурення густини та його динаміку в часі.

Дослідимо, як ведуть себе від'ємні дельта-солітони при переході через деяку область із збільшеною чи зменшеною поверхневою густиною. Для цього

проаналізуємо величину $\frac{\partial \sigma_0}{\partial r}$.

Нехай $\Delta(r, \varphi, t)$ -функція, що характеризує відповідне рухоме збурення,

$$\Delta(r, \varphi, t) = \gamma \exp \left\{ -\frac{g_1(r - \tilde{r}_1(t)) + g_2(\varphi - \tilde{\varphi}_1(t))}{d} \right\}. \quad \text{Тоді}$$

$$\sigma_0(r, \varphi, t) = \tilde{\sigma}_0(r) + \Delta(r, \varphi, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \Delta(r, \varphi, t) = -\gamma \frac{\partial g_1(r - \tilde{r}_1(t))}{\partial r} \exp \left\{ -\frac{g_1(r - \tilde{r}_1(t)) + g_2(\varphi - \tilde{\varphi}_1(t))}{d} \right\} = \mathcal{G}(r, \varphi, t),$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial r} + \mathcal{G}(r, \varphi, t).$$

Нехай функція $g_1(r - \tilde{r}_1(t))$ є такою, що її похідна–непарна функція. В такому випадку при $r < \tilde{r}_1(t)$ та $r > \tilde{r}_1(t)$ функція $\mathcal{G}(r, \varphi, t)$ має різні знаки.

Нехай $\gamma < 0$, при $r < \tilde{r}_1(t)$ $\mathcal{G}(r, \varphi, t) < 0$, а при $r > \tilde{r}_1(t)$ $\mathcal{G}(r, \varphi, t) > 0$ (таку ситуацію матимемо, наприклад, коли функція $g_1(x)$ може бути будь-яка степенева функція з парним цілим степенем- (x^2, x^4, \dots)), $\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} < 0$ у певній області (при віддаленні від центра поверхнева густина спадає). Тоді з (3.108) матимемо систему:

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial \tilde{\sigma}_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \psi_u(t) \mathcal{G}(r, \varphi, t) = O(\alpha g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1})), \\ \psi_u'(t) + 3B \psi_\sigma(t) \frac{\partial \tilde{\sigma}_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + 3B \psi_\sigma(t) \mathcal{G}(r, \varphi, t) = O(\alpha g^{-1}(\varepsilon^{1/\alpha_1})), \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = O(\varepsilon^{1/\alpha_1-1}). \end{cases} \quad (3.109)$$

Зауважимо, що $\psi_\sigma(t) < 0$. Нехай $\psi_u(t) > 0$. З останнього рівняння бачимо, що тоді $\tilde{r}'(t) > 0$, тобто хвиля віддаляється від центру галактики.

Будемо розглядати рух солітона через область збурення поверхневої густини (яка в загальному випадку також є рухомою). Нехай T_d -це час руху в області, на протязі якого збурення впливає суттєво (на іншому часовому інтервалі це збурення вважатимемо нульовим).

Аналізуючи систему (3.109) можемо проаналізувати поведінку траєкторії хвилі. Нехай $\mathcal{G}(r, \varphi, t) < 0$. Тоді $\psi_\sigma(t)\mathcal{G}(r, \varphi, t) > 0$. Отже, $\psi_u'(t)$ набуває від'ємного приросту. Звідси випливає, що значення $\psi_u(t)$ повільніше зростає. Тоді з останнього рівняння випливає, що з часом $\tilde{r}'(t)$ набуває від'ємного приросту у порівнянні з випадком, коли $\mathcal{G}(r, \varphi, t) = 0$. А це означає, що хвиля віддаляється в радіальному напрямку, при незмінній азимутальній швидкості матимемо знос в азимутальному напрямку у порівнянні з випадком $\mathcal{G}(r, \varphi, t) = 0$. Аналогічно при $\mathcal{G}(r, \varphi, t) > 0$ отримуємо додатній приріст $\tilde{r}'(t)$. Таким чином, рухаючись в області $r < \tilde{r}_1(t)$, хвиля відхиляється в сторону центра, а в області $r > \tilde{r}_1(t)$ -в протилежному напрямку. Отже, проходячи через область від'ємного збурення, антисолітони відхиляються. Якщо розглянути випадок $\gamma > 0$, то отримуємо ефект фокусування антисолітонів.

У випадку, коли $\tilde{\sigma}_0(r) = const$ можемо знайти точні розв'язки. Тоді з системи (3.108) отримаємо :

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) = 0, \\ \psi_u'(t) = 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \psi_u(t)\varepsilon_0 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Тоді } \tilde{\varphi}(t) = \int \frac{c}{(\psi_u \varepsilon_0 t + r_0)^2} dt = \frac{c}{\psi_u \varepsilon_0} \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{c}{\psi_u \varepsilon_0} \frac{1}{\psi_u \varepsilon_0 t + r_0} + \varphi.$$

Отримуємо рівняння кривої в полярній системі координат:

$$\tilde{\varphi}(t) = -\frac{c}{\psi_u \varepsilon_0} \frac{1}{\tilde{r}(t)} + \varphi$$

або

$$\tilde{r}(t) = \frac{c}{\psi_u \varepsilon_0} \frac{1}{\frac{c}{\psi_u \varepsilon_0 r_0} - \tilde{\varphi}(t)} = \frac{c r_0}{c - \psi_u \varepsilon_0 r_0 \tilde{\varphi}(t)}.$$

У випадку ізентропічної моделі та $\gamma_s = 3$ збурення поверхневої густини може не бути малим. Розглянемо випадок, коли r не є малим. Тоді з системи (3.107) з врахуванням області G_ε^α маємо систему:

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{\tilde{r}(t)} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) = 0, \\ \psi_u'(t) + 3B \psi_\sigma(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = 0, \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = 0. \end{cases} \quad (3.110)$$

Нехай, наприклад, $\sigma_0(r) = const$. Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{\tilde{r}(t)} + \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) = 0, \\ \psi_u'(t) = 0, \tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = 0. \end{cases} \quad (3.111)$$

Звідси

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) + \frac{\sigma_0 \psi_u}{\psi_u \varepsilon_0 t + r_0} + \frac{\varepsilon_0 \psi_u}{\psi_u \varepsilon_0 t + r_0} \psi_\sigma(t) = 0, \\ \psi_u(t) = \psi_u = const, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = 0, \\ \tilde{r}(t) = \psi_u \varepsilon_0 t + r_0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi_\sigma(t) &= e^{-\int \frac{\varepsilon_0 \psi_u}{\psi_u \varepsilon_0 t + r_0} dt} \left(C + \int \frac{\sigma_0 \psi_u}{\psi_u \varepsilon_0 t + r_0} e^{\int \frac{\varepsilon_0 \psi_u}{\psi_u \varepsilon_0 t + r_0} dt} dt \right) = 1 / (t + r_0 / \psi_u \varepsilon_0) (C + \\ &+ \int \frac{\sigma_0 \psi_u}{\psi_u \varepsilon_0 t + r_0} (t + r_0 / \psi_u \varepsilon_0) dt) = 1 / (t + r_0 / \psi_u \varepsilon_0) (C + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} t) = \frac{\psi_u (C \varepsilon_0 + \sigma_0 t)}{\psi_u \varepsilon_0 t + r_0}. \end{aligned}$$

3.4.2 Випадок наявності збурення гравітаційного потенціалу.

Розглянемо збурення у вигляді $\Phi_1 = -B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 2} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)$. Тоді аналізуючи систему (3.64)-(3.66) можемо отримати наступне твердження (усі викладки аналогічні випадку нульового збурення гравітаційного потенціалу і наведені в Додатку Б).

Твердження 10 Нехай $\Phi_1 = -B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 2} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)$, $\psi_v(t) \neq 0$, $\psi_u(t) \neq 0$ Тоді має місце локалізоване збурення поверхневої густини виду (3.44) для випадку $\gamma_s = 2$ та має місце система (3.120).

Нехай $\psi_v(t) = 0$. Тоді з (3.120) маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0, \\ \psi_u'(t) - \frac{3}{2r} B D \psi_\sigma(t) &= 0, \\ \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} &= 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} &= 0, \\ \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \tag{3.112}$$

$$\text{Звідси } \frac{\partial v_0(r)}{\partial r} + \frac{v_0(r)}{r} = 0, v_0(r) = c e^{-\ln r} = \frac{c}{r}.$$

Вважаючи, що збурення щільності є малим та великим радіус r отримуємо:

$$\begin{aligned} \psi_\sigma'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} &= 0, \\ \psi_u'(t) &= 0, \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} = 0,$$

$$\tilde{r}'(t) - \psi_u(t)\varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0.$$

Звідси

$$\psi_\sigma'(t) + \psi_u \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0, \tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = 0, \tilde{r}'(t) - \psi_u \varepsilon_0 = 0.$$

Бачимо, що $\psi_u(t) = \psi_u = const$. Нехай, наприклад, $\sigma_0(r) = const$. Тоді

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) = 0, \psi_u(t) = \psi_u = const, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = 0, \tilde{r}'(t) = \psi_u \varepsilon_0 t + r_0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \tilde{\varphi}(t) = \int \frac{c}{(\psi_u \varepsilon_0 t + r_0)^2} dt = \frac{c}{\psi_u \varepsilon_0} \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{c}{\psi_u \varepsilon_0} \frac{1}{\psi_u \varepsilon_0 t + r_0} + \varphi.$$

Отримали рівняння кривої в полярній системі координат:

$$\tilde{\varphi}(t) = -\frac{c}{\psi_u \varepsilon_0} \frac{1}{\tilde{r}(t)} + \varphi$$

або

$$\tilde{r}(t) = \frac{c}{\psi_u \varepsilon_0} \frac{1}{\frac{c}{\psi_u \varepsilon_0 r_0} - \tilde{\varphi}(t)} = \frac{cr_0}{c - \psi_u \varepsilon_0 r_0 \tilde{\varphi}(t)}.$$

Якщо $\sigma_0(r) \neq const$, то з першого рівняння системи бачимо, що величина збурення поверхневої густини веде себе нестійко - зростає або спадає.

Причому, якщо $\psi_u > 0$, то вона зростає у області, де $\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} < 0$ і спадає, коли

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} > 0.$$

$$\text{Маємо систему (3.121). Звідси } \frac{\partial v_0(r)}{\partial r} + \frac{v_0(r)}{r} = 0, v_0(r) = ce^{-\ln r} = \frac{c}{r}.$$

Нехай $D=0$. Тоді отримуємо систему:

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u}{r} + \psi_u \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\ \psi_u'(t) = 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \psi_u \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

або

$$\psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u}{\tilde{r}(t)} + \psi_u \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = 0,$$

$$\tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = 0,$$

$$\tilde{r}(t) = \psi_u \varepsilon_0 t + r_0.$$

Тоді для того, щоб амплітуда не змінювалась, має виконуватись умова:

$$\sigma_0 \frac{\psi_u}{\tilde{r}(t)} + \psi_u \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = 0,$$

$$\psi_u \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1 - \psi_u}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = -\frac{1 - \psi_u}{\psi_u \tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t).$$

В протилежному випадку будемо мати зміну амплітуди. Матимемо:

$$\psi_\sigma'(t) = -\sigma_0 \frac{\psi_u}{\tilde{r}(t)} - \psi_u \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} - \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t)$$

$$= -\sigma_0 \frac{\psi_u}{\tilde{r}(t)} - \psi_u \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} - \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t)$$

$$\text{Якщо } \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = 0 \text{ то}$$

$$\psi_\sigma'(t) = -\sigma_0 \frac{\psi_u}{\tilde{r}(t)} - \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \frac{\psi_u}{\tilde{r}(t)} - \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \frac{\psi_u - 1}{\tilde{r}(t)}.$$

Якщо $\psi_\sigma(t) < 0$, то амплітуда зростатиме при $\psi_u < 1$. При великих збуреннях радіальної складової швидкості матимемо затухання збурення поверхневої

густини.

Маємо систему рівнянь (3.121). Нехай $\Delta(r, \varphi, t)$ -функція, що характеризує відповідне рухоме збурення:

$$\Delta(r, \varphi, t) = \gamma \exp\left\{-\frac{g_1(r - \tilde{r}_1(t)) + g_2(\varphi - \tilde{\varphi}_1(t))}{d}\right\}. \text{ Тобто}$$

$$\sigma_0(r, \varphi, t) = \tilde{\sigma}_0(r) + \Delta(r, \varphi, t).$$

$$\text{Тоді } \frac{\partial}{\partial r} \Delta(r, \varphi, t) = -\gamma \frac{\partial g_1(r - \tilde{r}_1(t))}{\partial r} \exp\left\{-\frac{g_1(r - \tilde{r}_1(t)) + g_2(\varphi - \tilde{\varphi}_1(t))}{d}\right\} = \mathcal{G}(r, \varphi, t),$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_0}{\partial r} + \mathcal{G}(r, \varphi, t).$$

Нехай функція $g_1(r - \tilde{r}_1(t))$ є такою, що її похідна-непарна функція.

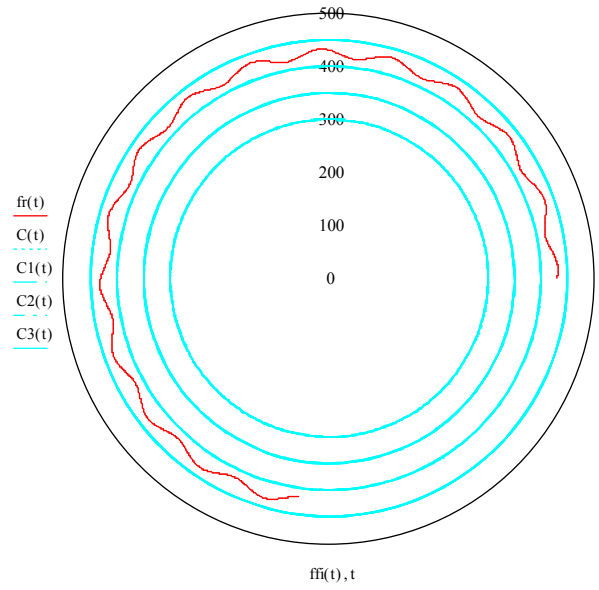
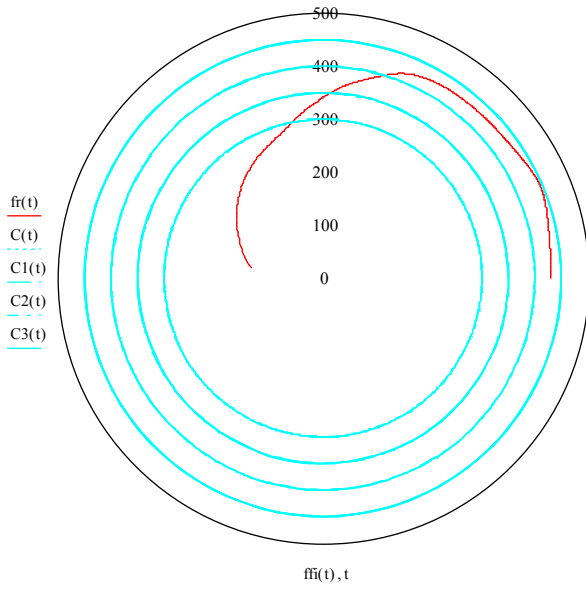
В такому випадку при $r < \tilde{r}_1(t)$ та $r > \tilde{r}_1(t)$ $\mathcal{G}(r, \varphi, t)$ має різні знаки. Нехай $\gamma < 0$ (маємо справу з від'ємним збуренням поверхневої густини). Нехай при $r < \tilde{r}_1(t)$ $\mathcal{G}(r, \varphi, t) < 0$, а при $r > \tilde{r}_1(t)$ $\mathcal{G}(r, \varphi, t) > 0$. Таку ситуацію матимемо, наприклад, коли функція $g_1(x)$ – будь-яка степенева функція з парним цілим степенем. Тоді отримуємо систему рівнянь:

$$\psi_\sigma'(t) + (\tilde{\sigma}_0(r) + \Delta(r, \varphi, t)) \frac{\psi_u(t)}{\tilde{r}(t)} + \psi_u(t) \frac{\partial \tilde{\sigma}_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \psi_u(t) \mathcal{G}(r, \varphi, t) + \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = 0,$$

$$\psi_u'(t) - \frac{3}{2\tilde{r}(t)} BD \psi_\sigma(t) = 0, \quad \tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = 0, \quad \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = 0.$$

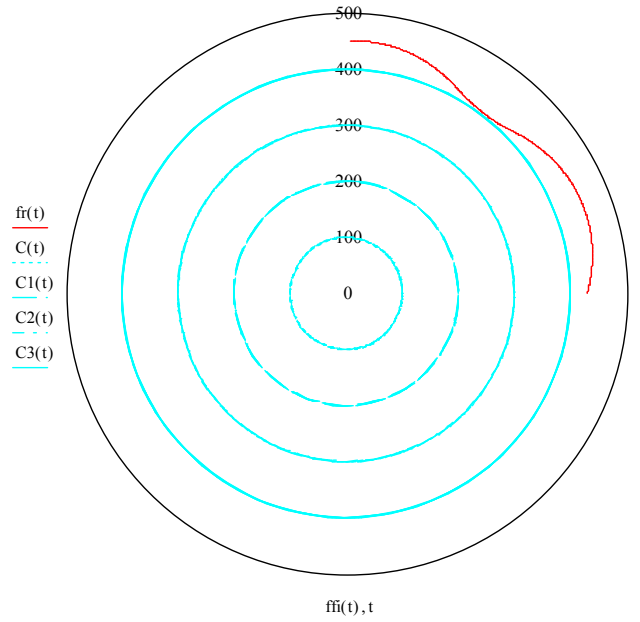
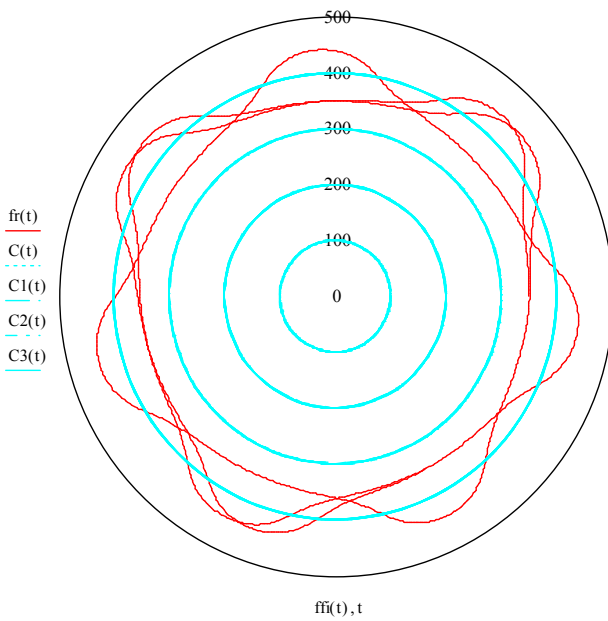
Тоді отримуємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_\sigma'(t) + (\tilde{\sigma}_0(r) + \Delta(r, \varphi, t)) \frac{\psi_u(t)}{\tilde{r}(t)} + \psi_u(t) \frac{\partial \tilde{\sigma}_0(\tilde{r}(t))}{\partial r} + \\ + \psi_u(t) \mathcal{G}(r, \varphi, t) + \frac{1}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) = 0, \\ \psi_u'(t) - \frac{3}{2\tilde{r}(t)} BD \psi_\sigma(t) = 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{c}{\tilde{r}^2(t)} = 0, \quad \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 = 0. \end{array} \right.$$



а) $a=-9, \mu = 0.01, \psi_u^0 = 4, \psi_v^0 = 150$

б) $a=-9, \mu = 0.01, \psi_u^0 = 44, \psi_v^0 = 150$



в) $a=-1, \mu = 0.01, \psi_u^0 = 44, \psi_v^0 = 150$

г) $a=4, \mu = 0.01, \psi_u^0 = 4, \psi_v^0 = 70$

Рис.3.6 Траекторії відокремленої хвилі для різних початкових швидкостей та функцій поверхневої густини

Наявність відповідних доданків змінює характер розв'язків. Якщо $\mathcal{G}(r, \varphi, t) < 0$, то при $\psi_u(t) > 0$ похідна $\psi_\sigma'(t)$ зростатиме при $\frac{\Delta(r, \varphi, t)}{\tilde{r}(t)} + \mathcal{G}(r, \varphi, t) < 0$. Тоді $\psi_u'(t)$ спадає, отже зменшується значення $\psi_u(t)$. Тоді зменшується $\tilde{r}'(t)$, маємо відхилення до центру галактики. Якщо ж $\frac{\Delta(r, \varphi, t)}{\tilde{r}(t)} + \mathcal{G}(r, \varphi, t) > 0$, то матимемо відхилення від центру.

$$\text{Нехай } \Phi_1 = (\tilde{r}'(t)\psi_u(t) - B\gamma_s\sigma_0^{\gamma_s-2}\psi_\sigma(t))\varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon). \quad (3.122)$$

Аналізуючи системи (3.87)-(3.89) можемо сформулювати твердження (відповідні викладки наведені в Додатку Б):

Твердження 11 Нехай $\psi_v(t) \neq 0$, $\psi_u(t) \neq 0$,

$\Phi_1 = (\tilde{r}'(t)\psi_u(t) - B\gamma_s\sigma_0^{\gamma_s-2}\psi_\sigma(t))\varepsilon_0\omega$. Тоді існує збурення поверхневої густини (3.47) для випадку $1 < \gamma_s < 2$ та виконується система рівнянь:

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0 \\ \psi_u'(t) - \frac{2v_0\psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1)\sigma_0^{\gamma_s-2}\psi_\sigma(t) + \frac{\varepsilon_0\psi_v^2(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} = 0 \end{cases} \quad (3.113)$$

$$\psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t)v_0}{r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{\psi_u(t)\varepsilon_0\psi_v(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} = 0,$$

$$\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \tilde{r}'(t) - \varepsilon_0\psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0,$$

$$B\gamma_s(\gamma_s - 2)\sigma_0^{\gamma_s-3}\psi_\sigma^2(t) + \psi_u^2(t) = 0.$$

Розглянемо, як веде себе хвиля при проходженні через області змінної густини.

$$\text{Нехай } \sigma_0(r, \varphi, t) = \tilde{\sigma}_0(r) + \Delta(r, \varphi, t), \tilde{\sigma}_0(r) = e^{-\mu r},$$

$$\Delta(r, \varphi, t) = a(e^{-(r-R)^2/H} + e^{-(r-R_1)^2/H} + e^{-(r-R_2)^2/H} + e^{-(r-R_3)^2/H}).$$

Результати моделювання представлені на Рис.3.6 при різних значеннях початкових швидкостей. Як бачимо, в залежності від значення початкових радіальних та азимутальних складових швидкостей та збурень поверхневої

густини хвиля може вести себе по-різному. На рис.3.6 а) бачимо, як хвиля, віддаляючись від центру, відбивається від області більшої густини і далі рухається до центру. На рис. 3.6 б) досягаємо ефекту серії відбивань від двох колових ущільнень так, що хвиля знаходиться у деякому кільці.

На рис.3.6 в) хвиля рухається до центру, однак відбивається від колового ущільнення. На рис.3.6 г) хвиля проходить ущільнення, однак далі знову “притягується” до центру.

3.5 Висновки

Таким чином, в цьому розділі застосовано метод Т-представлень для знаходження розв’язків рівнянь типу мілкої води. Запропоновано метод знаходження аналітичних розв’язків системи рівнянь мілкої води, що ґрунтується на використанні представлень для профілю хвилі спеціального виду та отриманні відповідних співвідношень для швидкості. При цьому отримується результуюче диференціальне рівняння, яке дозволяє проводити аналіз поведінки відокремленої кругової хвилі в залежності від поверхні дна.

Досліджено випадки, при яких існують локалізовані кругові хвилі незмінного профілю а також випадки, коли профіль змінюється. У випадку змінного профілю запропоновано метод, який дозволяє знаходити точні розв’язки на множині, що являє собою і систему кривих спеціального виду.

Для рівнянь газової динаміки гравітуючого газового диску галактик розглядається двохвимірне збурення поверхневої густини, що має характер відокремленої хвилі. В п.3.2 розглянуто низку тверджень, які доводять існування розв’язку відповідних рівнянь у формі відповідного локалізованого збурення. Розглянуто траєкторії відокремлених хвиль для різних випадків збурень гравітаційного потенціалу а також в ізентропічному та неізентропічному випадках. Показано, що в області сталої густини збурення поверхневої густини газового диску може бути лише від’ємним, локалізовані додатні збурення не існують.

Досліджено характер траєкторій локалізованих збурень в областях змінної густини. При цьому теоретично проаналізовані явища відхилення траєкторій від'ємних збурень при їх взаємодії з обмеженими нерухомими областями збурення густини середовища (хвиля відхиляється в напрямку, де густина середовища більша, та у протилежному напрямку, якщо збурення густини відповідної області від'ємне).

Досліджено характер траєкторій відокремлених хвиль при різних початкових значеннях їх швидкостей та у випадку області змінної густини, що має характер кілець. При цьому показано, що хвиля веде себе аналогічно до променя світла, відбиваючись від границі чи проходячи через неї в залежності від величини початкових швидкостей.

РОЗДІЛ 4 МЕТОД ОПЕРАТОРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ МОДЕЛЮВАННЯ ТОЧОК ПЕРЕТИНУ ТРАЄКТОРІЙ ВІДОКРЕМЛЕНИХ ХВИЛЬ ТА ОБЛАСТЕЙ КОНТРАСТНОСТІ ГУСТИНИ

Одним з відомих методів дослідження неперервних динамічних систем є метод перетинів Пуанкаре, суть якого полягає у побудові множин точок перетину фазової траєкторії системи з деякою поверхнею (у найпростішому випадку – площиною) [341]. Відповідний підхід має важливе практичне значення, оскільки у багатьох задачах, пов'язаних з дослідженням фазових траєкторій динамічних систем, відомими є лише певні дискретні “прояви” траєкторій, спостереження їх на деяких умовних поверхнях, коли фіксувати всю траєкторію неможливо.

Так, наприклад, можна досліджувати траєкторії солітоноподібних хвиль, що рухаються в глибині Землі лише через їх взаємодію з областями накопичення сейсмічної енергії, яка призводить до сейсмічних поштовхів, що фіксуються сейсмічними станціями. В такому випадку області, де накопичується сейсмічна енергія (так звані сейсмоактивні зони) логічно вибирати як поверхні Пуанкаре.

Аналогічно ведуть себе космічні тіла, проходячи через рукави спіральних галактик – вони зменшують швидкість, інтенсивніше взаємодіють з складовими рукава, що дозволяє з більшою ймовірністю їх зафіксувати. В цьому випадку спіральні рукави логічно вибрати як поверхні Пуанкаре. Солітони в газових дисках галактик інтенсивно взаємодіють з областями підвищеної щільності газу, які у галактиках часто являють собою послідовності кіл певного радіусу. Ці кола – криві Пуанкаре.

Фіксуючи окремі точки траєкторій можна моделювати, наприклад, поведінку фотона у деякому анізотропному середовищі, де мають місце ефекти переломлення-відбивання [171]. Тоді траєкторію фотона можна досліджувати, аналізуючи точки її суттєвої зміни, «зламу».

В даному розділі розглянемо підхід, на основі якого можна

досліджувати характер траєкторій відокремлених хвиль а також ефекти, пов'язані з їх взаємодією за допомогою операторів певного класу, що описують взаємодію солітоноподібних хвиль з іншими об'єктами, зокрема областями підвищеної густини.

4.1 Моделюючі оператори та їх властивості

Нижче будемо розглядати не самі поверхні Пуанкаре, а деякий оператор A , що визначає послідовності точок перетину солітоноподібних хвиль з поверхням Пуанкаре. Якщо x – деяка точка взаємодії (в заданий момент часу) солітоноподібної хвилі з деякою поверхнею Пуанкаре, то точку взаємодії хвилі з наступною поверхнею визначатимемо як Ax . Враховуючи можливість сторонніх впливів, можемо розглянути послідовність:

$$x_n = x_{n-1} + \lambda(Ax_{n-1} - x_{n-1}) + \xi(x_{n-1}) \quad (4.1)$$

де $\xi(m, x_{n-1})$ - деяка випадкова вектор-функція, що визначає можливе відхилення хвилі в результаті зіткнень та інших зовнішніх впливів, де λ - деякий параметр, $\lambda \in [0,1]$. В даній роботі розглядається випадок:

$$x_n = Ax_{n-1} + \xi(m, x_{n-1}) \quad (4.2)$$

Параметр λ у співвідношенні (4.1) може бути не обов'язково малим. Зауважимо, що при малому значення параметра λ та $M\xi(x) = 0$ (4.1) є різницевою схемою для розв'язку системи диференціальних рівнянь виду:

$$x'(t) = Ax(t) - x(t) \quad (4.3)$$

Будемо розглядати оператори виду:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - z^2 - g^2 + c_x \\ 2xy + c_y \\ 2xz + c_z \\ 2xg + c_g \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

де c_x, c_y, c_z, c_g - деякі параметри. Отримати саме такий оператор можна,

якщо узагальнити ітераційний процес, що використовується при побудові множини Мандельброта [94], на простір R^4 , тобто, якщо побудувати ітераційну послідовність $r_{n+1} = r_n^2 + c$, де $r_n = x_n + iy_n + jz_n + kg_n$, $c = c_x + ic_y + jc_z + kc_g$ - гіперкомплексні числа. Зауважимо, що координата x при перетворенні (4.4) є зміщеним на константу квадратом відстані в просторі-часі Мінковського між точками-подіями $(0,0,0,0)$ та (x, y, z, g) , якщо вважати, що $x = ct$, де c -швидкість світла у вакуумі, t - час. Інтерпретація цієї координати як часу дозволяє отримати низку цікавих результатів в процесі моделювання. Тоді природнім є введення до розгляду позитивних напівтраєкторії Жюліа на основі оператора (4.4):

$$Or^+(x_0) = \{x_n : x_n = A(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots, x_0 \in R^4\} \text{ (див. Додаток В2)}.$$

Очевидно, що кожна позитивна напівтраєкторія буде збігатись до нерухомої точки операторного рівняння виду: $x = Ax$.

Для спрощення викладок надалі розглянемо аналог оператора (4.4) для простору R^2 (для простору R^4 легко отримати аналогічні результати):

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + c_x \\ 2xy + c_y \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Також для зручності введемо новий оператор, нерухома точка якого є початком координат і який має аналогічні властивості з оператором A .

Нехай \tilde{x}_c -притягуюча нерухома точка оператора A , $O_A^+(x)$ - деяка позитивна напівтраєкторія, $x \in B(\tilde{x}_c)$ (басейну притягання). Тоді побудуємо такий оператор \tilde{A} , для якого виконується співвідношення :

$$O_{\tilde{A}}^+(x - \tilde{x}_c) = O_A^+(x) - \tilde{x}_c. \quad (4.6)$$

В цьому випадку будь-яка позитивна напівтраєкторія оператора A , зсунута на вектор \tilde{x}_c , є позитивною напівтраєкторією оператора \tilde{A} . Легко бачити, що оператор, який задовольняє властивості (4.6), має вигляд:

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+x_c)^2 - (y+y_c)^2 + c_x - x_c \\ 2(x+x_c)(y+y_c) + c_y - y_c \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Нехай $\bar{x} = x + iy$ - точка в комплексній площині. Запишемо (4.7) у вигляді:

$$\tilde{A}(\bar{x}) = \bar{x}^2 + 2\bar{x}\tilde{x}_c, \text{ де } \tilde{x}_c \text{ -притягуюча нерухома точка оператора } A.$$

Лема 1. Для оператора \tilde{A} та довільної точки $\bar{x} = x + iy \in C$ виконується співвідношення:

$$|\tilde{A}^n \bar{x}| = |\bar{x}| |\bar{x} + 2\tilde{x}_c| |\tilde{A} \bar{x} + 2\tilde{x}_c| |\tilde{A}^2 \bar{x} + 2\tilde{x}_c| \dots |\tilde{A}^{n-1} \bar{x} + 2\tilde{x}_c|, \quad (4.8)$$

де \tilde{x}_c -нерухома точка оператора A .

Доведення

Маємо:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (x+x_c)^2 - (y+y_c)^2 + c_x - x_c \\ 2(x+x_c)(y+y_c) + c_y - y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x+2x_c) - y(y+2y_c) \\ x(y+2y_c) + y(x+2x_c) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} xx^+ - yy^+ \\ xy^+ + yx^+ \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де $x^+ = x + 2x_c$, $y^+ = y + 2y_c$.

Тоді :

$$\begin{aligned} |\tilde{A}\bar{x}|^2 &= (xx^+ - yy^+)^2 + (xy^+ + yx^+)^2 = x^2(x^+)^2 + y^2(y^+)^2 + x^2(y^+)^2 + y^2(x^+)^2 = \\ &= (x^2 + y^2)((x^+)^2 + (y^+)^2) = |\bar{x}|^2 |\bar{x} + 2\tilde{x}_c|^2, \end{aligned}$$

$$\tilde{A}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (xx^+ - yy^+)(xx^+ - yy^+ + 2x_c) - (xy^+ + yx^+)(xy^+ + yx^+ + 2y_c) \\ (xx^+ - yy^+)(xy^+ + yx^+ + 2y_c) + (xy^+ + yx^+)(xx^+ - yy^+ + 2x_c) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} |\tilde{A}^2 \bar{x}|^2 &= ((xx^+ - yy^+)(xx^+ - yy^+ + 2x_c) - (xy^+ + yx^+)(xy^+ + yx^+ + 2y_c))^2 + \\ &+ ((xx^+ - yy^+)(xy^+ + yx^+ + 2y_c) + (xy^+ + yx^+)(xx^+ - yy^+ + 2x_c))^2 = \\ &= (xx^+ - yy^+)^2 (xx^+ - yy^+ + 2x_c)^2 + (xy^+ + yx^+)^2 (xy^+ + yx^+ + 2y_c)^2 + \\ &+ (xx^+ - yy^+)^2 (xy^+ + yx^+ + 2y_c)^2 + (xy^+ + yx^+)^2 (xx^+ - yy^+ + 2x_c)^2 = \\ &= ((xx^+ - yy^+)^2 + (xy^+ + yx^+)^2)((xx^+ - yy^+ + 2x_c)^2 + (xy^+ + yx^+ + 2y_c)^2) = \\ &= |\tilde{A}\bar{x}|^2 ((xx^+ - yy^+ + 2x_c)^2 + (xy^+ + yx^+ + 2y_c)^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((xx^+ - yy^+ + 2x_c)^2 + (xy^+ + yx^+ + 2y_c)^2) = (xx^+ - yy^+)^2 + \\
& + 4x_c(xx^+ - yy^+) + 4x_c^2 + (xy^+ + yx^+)^2 + 4y_c(xy^+ + yx^+) + 4y_c^2 = \\
& = |\tilde{A}\bar{x}|^2 + 2(2\tilde{x}_c, \tilde{A}\bar{x}) + |2\tilde{x}_c|^2 = |\tilde{A}\bar{x} + 2\tilde{x}_c|^2.
\end{aligned}$$

Отже, $|\tilde{A}^2\bar{x}|^2 = |\tilde{A}\bar{x}|^2 ((xx^+ - yy^+ + 2x_c)^2 + (xy^+ + yx^+ + 2y_c)^2) = |\tilde{A}\bar{x}|^2 |\tilde{A}\bar{x} + 2\tilde{x}_c|^2$.

Враховуючи, що у співвідношенні (4.8) \bar{x} - довільна точка та вибираючи її як $\tilde{A}^{n-1}\bar{x}$ маємо:

$$\begin{aligned}
|\tilde{A}^n\bar{x}| &= |\tilde{A}^{n-1}\bar{x}| |\tilde{A}^{n-1}\bar{x} + 2\tilde{x}_c| = |\tilde{A}^{n-2}\bar{x}| |\tilde{A}^{n-2}\bar{x} + 2\tilde{x}_c| |\tilde{A}^{n-1}\bar{x} + 2\tilde{x}_c| = \dots = \\
&= |\tilde{A}\bar{x}| |\tilde{A}\bar{x} + 2\tilde{x}_c| |\tilde{A}^2\bar{x} + 2\tilde{x}_c| \dots |\tilde{A}^{n-1}\bar{x} + 2\tilde{x}_c|.
\end{aligned}$$

Тоді з врахуванням співвідношення (4.8) отримуємо:

$$|\tilde{A}^n\bar{x}| = |\bar{x}| |\bar{x} + 2\tilde{x}_c| |\tilde{A}\bar{x} + 2\tilde{x}_c| |\tilde{A}^2\bar{x} + 2\tilde{x}_c| \dots |\tilde{A}^{n-1}\bar{x} + 2\tilde{x}_c|. \text{ Лема доведена.}$$

З співвідношення (4.8) можемо отримати співвідношення виду:

$$|\tilde{A}^n\bar{x}| = 2^n |\bar{x}| |\tilde{x}_c|^n \left| 1 + \frac{\bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \left| 1 + \frac{\tilde{A}\bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \left| 1 + \frac{\tilde{A}^2\bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \dots \left| 1 + \frac{\tilde{A}^{n-1}\bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right|.$$

Лема 2. Для оператора \tilde{A} та довільної точки \bar{x} , що належить басейну притягання його нерухомої точки $(0,0)$ (множині $B_{\tilde{A}}(0,0)$), існують такі константи c_1, c_2 , $0 < c_1 < c_2 < \infty$, що $\forall n \geq 1$ виконується співвідношення:

$$c_1 \leq \prod_{i=1}^n \left| 1 + \frac{\tilde{A}^i\bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \leq c_2, \quad (4.9)$$

де \tilde{x}_c - нерухома точка оператора A .

Доведення

Розглянемо добуток, що фігурує у співвідношенні (4.9). Маємо очевидну нерівність:

$$\prod_{i=1}^n \left| 1 + \frac{\tilde{A}^i\bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \leq \prod_{i=1}^n \left(1 + \left| \frac{\tilde{A}^i\bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right). \text{ Покажемо, що добуток } \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \left| \frac{\tilde{A}^i\bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right) \text{ збігається. Як}$$

відомо, такий добуток збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$\prod_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right|$. Іншими словами, це умова абсолютної збіжності добутку

$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right)$. Розглянемо границю відношення виду:

$$\frac{\left| \frac{\tilde{A}^{n+1} \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right|}{\left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right|} = \frac{|\tilde{A}^{n+1} \bar{x}|}{|\tilde{A}^n \bar{x}|} = \frac{|\tilde{A}^n \bar{x}| |\tilde{A}^n \bar{x} + 2\tilde{x}_c|}{|\tilde{A}^n \bar{x}|} = |\tilde{A}^n \bar{x} + 2\tilde{x}_c|.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}^n \bar{x} = (0,0)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{A}^n \bar{x} + 2\tilde{x}_c| = |2\tilde{x}_c| < 1$, адже точка $(0,0)$ є

притягуючою і похідна функції $\tilde{A}'(0,0) = 2\tilde{x}_c$ за модулем повинна бути

меншою за 1. З іншого боку, $\prod_{i=1}^n \left| 1 + \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \geq \prod_{i=1}^n \left(1 - \left| \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right)$. Покажемо, що добуток

$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \left| \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right)$ збігається. Для цього розглядатимемо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 - \left| \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right)$.

Розглянемо наступне відношення:

$$\begin{aligned} & \frac{\ln \left(1 - \left| \frac{\tilde{A}^{n+1} \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right)}{\ln \left(1 - \left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right)} = \frac{-\left| \frac{\tilde{A}^{n+1} \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| + o\left(\left| \frac{\tilde{A}^{n+1} \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right)}{-\left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| + o\left(\left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right)} = \frac{-\left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| |\tilde{A}^n \bar{x} + 2\tilde{x}_c| + o\left(\left| \frac{\tilde{A}^{n+1} \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right)}{-\left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| + o\left(\left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right)} = \\ & = \frac{|\tilde{A}^n \bar{x} + 2\tilde{x}_c| - o\left(\left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| |\tilde{A}^n \bar{x} + 2\tilde{x}_c| \right) / \left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right|}{1 - o\left(\left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right) / \left| \frac{\tilde{A}^n \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right|} = |\tilde{A}^n \bar{x} + 2\tilde{x}_c| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |2\tilde{x}_c| < 1. \end{aligned}$$

Отже, ряд збігається і збігається відповідний нескінченний добуток.

Відмітимо, що збіжність останнього нескінченного добутку можна довести, аналізуючи його часткові добутки і використовуючи методику доведення, аналогічну доведенню відомої теореми про те, що з абсолютної збіжності нескінченного добутку випливає його збіжність. Отже, існує така

константа $c_1, 0 < c_1 < \infty$, що $\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \left| \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right) = c_1$. З іншої сторони, існує така

константа $c_2, 0 < c_2 < \infty$, що $\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \left| \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right) = c_2$. Отже, виконується нерівність:

$$c_1 = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \left| \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right) \leq \prod_{i=1}^n \left(1 - \left| \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right) \leq \prod_{i=1}^n \left| 1 + \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \leq \prod_{i=1}^n \left(1 + \left| \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right) \leq \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \left| \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \right) = c_2.$$

Лема доведена.

Відмітимо, що нерівність, яка визначена у Лемі, ще не означає збіжності нескінченного добутку $\prod_{i=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{\tilde{A}^i \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right|$. Адже може просто не бути збіжності відповідної послідовності часткових добутків. З Леми 1 та Леми 2 випливає наступне твердження:

Твердження 1. Для оператора \tilde{A} та довільної точки \bar{x} , що належить басейну притягання його нерухомої точки $(0,0)$ (множині $B_{\tilde{\lambda}}(0,0)$), виконується співвідношення:

$$\left| \tilde{A}^n \bar{x} \right| = O(e^{n \ln(|2\tilde{x}_c|)}), \quad (4.10)$$

де \tilde{x}_c -нерухома точка оператора A .

Останнє твердження говорить про те, що величина $\left| \tilde{A}^n \bar{x} \right|$ має експоненційний характер збіжності до нуля, а саме, існує така логарифмічна спіраль, що орбіта динамічної системи належить деякому околу цієї спіралі. Розглянемо це питання детальніше. Припустимо, що існує границя послідовності величин кутів, утворених двома послідовними точками позитивної напівтраєкторії та нерухомою точкою оператора: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \tilde{\varphi}$ (див. Рис.4.1). В такому випадку, можемо записати наближену рівність: $\tilde{A}^n \bar{x} \approx e^{n \ln(|2\tilde{x}_c|)} e^{i(n\tilde{\varphi} + \varphi_0)}$, де φ_0 -це кутова координата в полярній системі точки \bar{x} . Розглянемо криву, рівняння якої в полярній системі координат має вигляд:

$r = e^{(\varphi - \varphi_0) \ln(|2\tilde{x}_c|/\tilde{\varphi})}$. Це є логарифмічна спіраль. Очевидно, що точки, які утворюють орбіту динамічної системи для оператора \tilde{A} , належать деякому околу цієї кривої. Адже $e^{(n\tilde{\varphi} + \varphi_0 - \varphi_0) \ln(|2\tilde{x}_c|/\tilde{\varphi})} = e^{n \ln(|2\tilde{x}_c|)}$.

Отже, можемо апроксимувати рукави спіральних структур, отриманих як орбіти відповідних динамічних систем, логарифмічними спіралями (відповідні твердження та їх доведення наведені далі). Отримані результати добре корелюються з багатьма статистичними дослідженнями природних об'єктів. Так, наприклад, Данвер [195] показав, що рукави спіральних галактик добре апроксимуються логарифмічними спіралями.

Розглянемо детальніше властивість кутів, утворених двома послідовними точками динамічної системи та нерухомою точкою відповідного оператора. Нехай $\bar{x} = x + iy$ - точка в комплексній площині. Запишемо (4.3) у вигляді деякої раціональної функції: $\tilde{A}(\bar{x}) = \bar{x}^2 + 2\bar{x}\tilde{x}_c$, де \tilde{x}_c - притягуюча нерухома точка оператора A . Будемо розглядати послідовність $O_A^+(c_x, c_y)$. Нашим завданням є знаходження границі косинуса кута, що характеризує кривизну рукава (див. рис.4.1.), а саме величини виду:

$$\cos \psi_n = \frac{(-\tilde{A}^{1+nm} c, \tilde{A}^{1+(n+1)m} c - \tilde{A}^{1+nm} c)}{\left| \tilde{A}^{1+nm} c \right| \left| \tilde{A}^{1+(n+1)m} c - \tilde{A}^{1+nm} c \right|}, \text{ де } m\text{-кількість рукавів.}$$

Використовуючи структуру оператора \tilde{A} , можемо побудувати наступну послідовність :

$$\tilde{A}x = x^2 + 2x\tilde{x}_c, \quad (4.11)$$

$$\tilde{A}^2 x = (x^2 + 2x\tilde{x}_c)^2 + 2(x^2 + 2x\tilde{x}_c)\tilde{x}_c = x^4 + 4x^3\tilde{x}_c + 4x^2\tilde{x}_c^2 + 2x^2\tilde{x}_c + 4x\tilde{x}_c^2,$$

...

$$\tilde{A}^n x = x^{2^n} + a_{2^n-1}^n x^{2^n-1} + \dots + a_1^n x,$$

$$\tilde{A}^{n+1} x = (\tilde{A}^n x)^2 + 2\tilde{A}^n x \tilde{x}_c = x^{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}-1}^{n+1} x^{2^{n+1}-1} + \dots + a_1^{n+1} x.$$

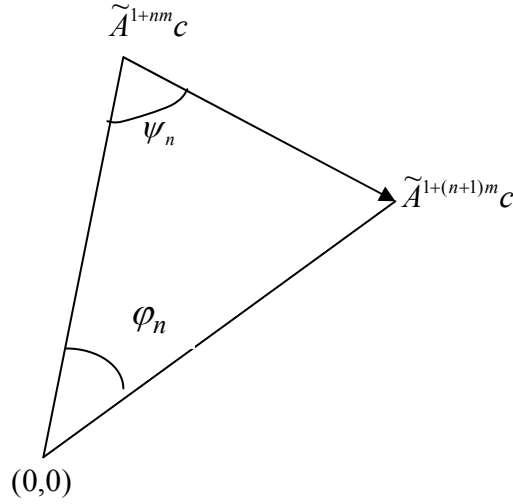


Рис.4.1 Ілюстрація операторних перетворень

Тоді легко отримати співвідношення між коефіцієнтами представлень (4.11):

$$\begin{aligned}
 a_{2^{n+1}-1}^{n+1} &= 2a_{2^n-1}^n, \\
 a_{2^{n+1}-2}^{n+1} &= 2a_{2^n-2}^n + (a_{2^n-1}^n)^2, \\
 a_{2^{n+1}-3}^{n+1} &= 2a_{2^n-3}^n + 2a_{2^n-1}^n a_{2^n-2}^n, \\
 &\dots\dots \\
 a_{2^{n+1}-k}^{n+1} &= \sum_{i,j=0, i+j=k}^k a_{2^n-i}^n a_{2^n-j}^n, \quad k < 2^n, \\
 a_{2^{n+1}-k}^{n+1} &= \sum_{i,j=1, i+j=2^{n+1}-k}^{2^{n+1}-k-1} a_i^n a_j^n + 2\tilde{x}_c a_{2^{n+1}-k}^n, \quad 2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 2, \\
 a_{2^{n+1}-k}^{n+1} &= 2\tilde{x}_c a_{2^{n+1}-k}^n, \quad k = 2^{n+1} - 1.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Останнє з співвідношень (4.12) запишемо у вигляді:

$$a_1^{n+1} = 2\tilde{x}_c a_1^n = 2^n (\tilde{x}_c)^n. \tag{4.13}$$

Нехай $\tilde{A}^{1+nm}c = x + iy = \tilde{x}_{1+nm}$. Тоді

$$\tilde{A}^{1+(n+1)m}c = \tilde{A}^m (\tilde{A}^{1+nm}c) = \tilde{x}^{2^m} + a_{2^m-1}^m \tilde{x}^{2^m-1} + \dots + a_1^m \tilde{x}.$$

$$\text{Позначимо } \cos \psi_n = \frac{(-\tilde{A}^{1+nm}c, \tilde{A}^{1+(n+1)m}c - \tilde{A}^{1+nm}c)}{\|\tilde{A}^{1+nm}c\| \|\tilde{A}^{1+(n+1)m}c - \tilde{A}^{1+nm}c\|} = \beta(\text{Re}(\tilde{x}_{1+nm}), \text{Im}(\tilde{x}_{1+nm})).$$

Оскільки ми розглядаємо початкові точки з басейну притягання точки $(0,0)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}^{1+nm} c = (0,0)$. Якщо існує границя $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \beta(x, y)$, то, очевидно, існує

границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(\operatorname{Re}(\tilde{x}_{1+nm}), \operatorname{Im}(\tilde{x}_{1+nm}))$ і при цьому виконується співвідношення:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \beta(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(\operatorname{Re}(\tilde{x}_{1+nm}), \operatorname{Im}(\tilde{x}_{1+nm})).$$

Для доведення сумісної збіжності будемо розглядати відповідні послідовні границі: $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \beta(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \beta(x, y)$.

Нехай $f(\tilde{x}) = \tilde{x}^{2^m} + a_{2^m-1}^m \tilde{x}^{2^m-1} + \dots + (a_1^m - 1)\tilde{x}$. Можемо сформулювати наступні властивості.

$$\text{Лема 3 } \lim_{y \rightarrow 0} f(\tilde{x}) = x^{2^m} + a_{2^m-1}^m x^{2^m-1} + \dots + (a_1^m - 1)x.$$

Ця лема впливає безпосередньо з властивості операції множення комплексних чисел.

$$\text{Лема 4 } \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{Re}(f(\tilde{x})) = \operatorname{Re}(f(x)); \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{Im}(f(\tilde{x})) = \operatorname{Im}(f(x)).$$

Ця властивість безпосередньо впливає з Лема 1. Очевидними є і наступні леми:

$$\text{Лема 5 } \lim_{x \rightarrow 0} f(\tilde{x}) = \operatorname{Im}(f(iy)).$$

$$\text{Лема 6 } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Re}(f(\tilde{x})) = \operatorname{Re}(f(iy)), \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Im}(f(\tilde{x})) = \operatorname{Im}(f(iy)).$$

Тоді мають місце співвідношення:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\langle \tilde{x}, f(\tilde{x}) \rangle}{\|\tilde{x}\| \sqrt{(\operatorname{Re} f(\tilde{x}))^2 + (\operatorname{Im} f(\tilde{x}))^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \operatorname{Im}(f(x))}{\sqrt{x^2} \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Re} f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} f(x)}{x}\right)^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{Re}(f(x))}{\sqrt{\left(\frac{\operatorname{Re} f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} f(x)}{x}\right)^2}} = \frac{-\operatorname{Re}(a_1^m - 1)}{\sqrt{(\operatorname{Re}(a_1^m - 1))^2 + (\operatorname{Im}(a_1^m - 1))^2}} = \\ &= \frac{-\operatorname{Re}(2^m \tilde{x}_c^m - 1)}{\sqrt{(\operatorname{Re}(2^{m-1} \tilde{x}_c^{m-1} - 1))^2 + (\operatorname{Im}(2^{m-1} \tilde{x}_c^{m-1} - 1))^2}}. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо іншу послідовну границю:

$$\begin{aligned}
\limlim_{y \rightarrow 0, x \rightarrow 0} \frac{-(\tilde{x}, f(\tilde{x}))}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(\operatorname{Re} f(\tilde{x}))^2 + (\operatorname{Im} f(\tilde{x}))^2}} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y \operatorname{Im}(f(iy))}{\sqrt{y^2} \sqrt{(\operatorname{Re} f(iy))^2 + (\operatorname{Im} f(iy))^2}} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{Im}(f(iy)/y)}{\sqrt{(\operatorname{Re} f(iy)/y)^2 + (\operatorname{Im} f(iy)/y)^2}} = \frac{-\operatorname{Im}(i(a_1^m - 1))}{\sqrt{(\operatorname{Re}(i(a_1^m - 1)))^2 + (\operatorname{Im}(i(a_1^m - 1)))^2}} = \\
&= \frac{-\operatorname{Re}(a_1^m - 1)}{\sqrt{(\operatorname{Im}(a_1^m - 1))^2 + (\operatorname{Re}(a_1^m - 1))^2}} = \frac{-\operatorname{Re}(2^{m-1} \tilde{x}_c^{m-1} - 1)}{\sqrt{(\operatorname{Re}(2^{m-1} \tilde{x}_c^{m-1} - 1))^2 + (\operatorname{Im}(2^{m-1} \tilde{x}_c^{m-1} - 1))^2}}.
\end{aligned}$$

Отже, можемо сформулювати наступне твердження:

Твердження 2 Нехай \tilde{x}_c -нерухома точка оператора (4.5). Тоді для довільної точки x , що належить басейну притягання точки \tilde{x}_c існують границі виду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-\tilde{A}^{1+nm} x, \tilde{A}^{1+(n+1)m} x - \tilde{A}^{1+nm} x)}{\|\tilde{A}^{1+nm} x\| \|\tilde{A}^{1+(n+1)m} x - \tilde{A}^{1+nm} x\|} = \frac{-\operatorname{Re}(2^m \tilde{x}_c^m - 1)}{\sqrt{(\operatorname{Re}(2^m \tilde{x}_c^m - 1))^2 + (\operatorname{Im}(2^m \tilde{x}_c^m - 1))^2}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\tilde{A}^{1+nm} x, \tilde{A}^{1+(n+1)m} x)}{\|\tilde{A}^{1+nm} x\| \|\tilde{A}^{1+(n+1)m} x\|} = \frac{\operatorname{Re}(2^{m-1} \tilde{x}_c^{m-1})}{\sqrt{(\operatorname{Re}(2^{m-1} \tilde{x}_c^{m-1}))^2 + (\operatorname{Im}(2^{m-1} \tilde{x}_c^{m-1}))^2}}.$$

Останнє твердження безпосередньо випливає з наведених вище лем а також збіжності величини $\tilde{A}^{1+nm} x$ до $\tilde{A}^{1+nm} (c_x, c_y)$.

Отримані в роботі результати становлять теоретичну основу для моделювання відображень Пуанкаре за допомогою операторів виду (4.5) у випадку, коли фазова траєкторія системи має спіральну структуру.

Надалі будемо інтерпретувати оператор A як функцію в комплексній площині: $A(x) = x^2 + c$, $x \in \mathbb{C}$. Відмітимо, що область збіжності позитивної напівтраєкторії для оператора (4.5) є множиною точок, границею якої є множина Жюліа J_A . Дійсно, розглянемо нерухому точку функції $A(x_c, y_c, z_c)$. Вона утворює притягуючий цикл при певних значеннях параметрів. Знайдемо похідну функції A : $A'(\tilde{x}_c) = 2\tilde{x}_c$. Тоді

$$|2\tilde{x}_c| = 2\sqrt{x_c^2 + y_c^2} =$$

$$= 2 \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1/2 - 2c_x + \sqrt{(2c_x - 1/2)^2 + 4c_y^2}} \right)^2 + \left(\frac{c_y}{\sqrt{1/2 - 2c_x + \sqrt{(2c_x - 1/2)^2 + 4c_y^2}}} \right)^2} =$$

$$\sqrt{1 - 2\alpha + \alpha^2 + \frac{4c_y^2}{\alpha^2}}, \text{ де } \alpha = \sqrt{1/2 - 2c_x + \sqrt{(2c_x - 1/2)^2 + 4c_y^2}}.$$

Як бачимо, для різних параметрів отримуємо різні значення норми. Наприклад, при $c_x = c_y = 0$ відповідна норма є 0. Тоді можна стверджувати, що басейн притягання цієї точки є множиною Жюліа.

Відмітимо, що множина значень параметрів, при яких нерухома точка оператора A є притягуючою, утворює область, обмежену кривою, що

$$\text{задається рівнянням: } \sqrt{1 - 2\alpha + \alpha^2 + \frac{4c_y^2}{\alpha^2}} = 1, \text{ де}$$

$$\alpha = \sqrt{1/2 - 2c_x + \sqrt{(2c_x - 1/2)^2 + 4c_y^2}}.$$

Припустимо, що при певних значеннях параметрів нерухома точка оператора A не є притягуючою. Але тоді може існувати інший притягуючий цикл. А це означає, що басейн його притягання є об'єднання басейнів притягання окремих точок.

Розглянемо детальніше характер збіжності у відповідних басейнах притягання. Проаналізуємо множину параметрів оператора A з точки зору кількості рукавів. При цьому будемо враховувати всі цикли притягання. Відповідна множина зображена на Рис.4.2. Тут відтінком позначено кількість рукавів. Як бачимо, область обмеженості послідовності $Or^+(c_x, c_y)$ утворює відому множину Мандельброта, у якій ми виділяємо підобласті за характером збіжності по кількості рукавів. Як показують дослідження, існують області, де не можна визначити рукавності структури, незважаючи на наявність збіжності до притягуючої нерухомої точки. Ці області на малюнку позначені відповідним кольором.

Відмітимо, що точки, які зосереджуються в околі початку координат, наближаються до точок послідовності $O_A^+(c_x, c_y)$ при подальшій дії на них

оператора .

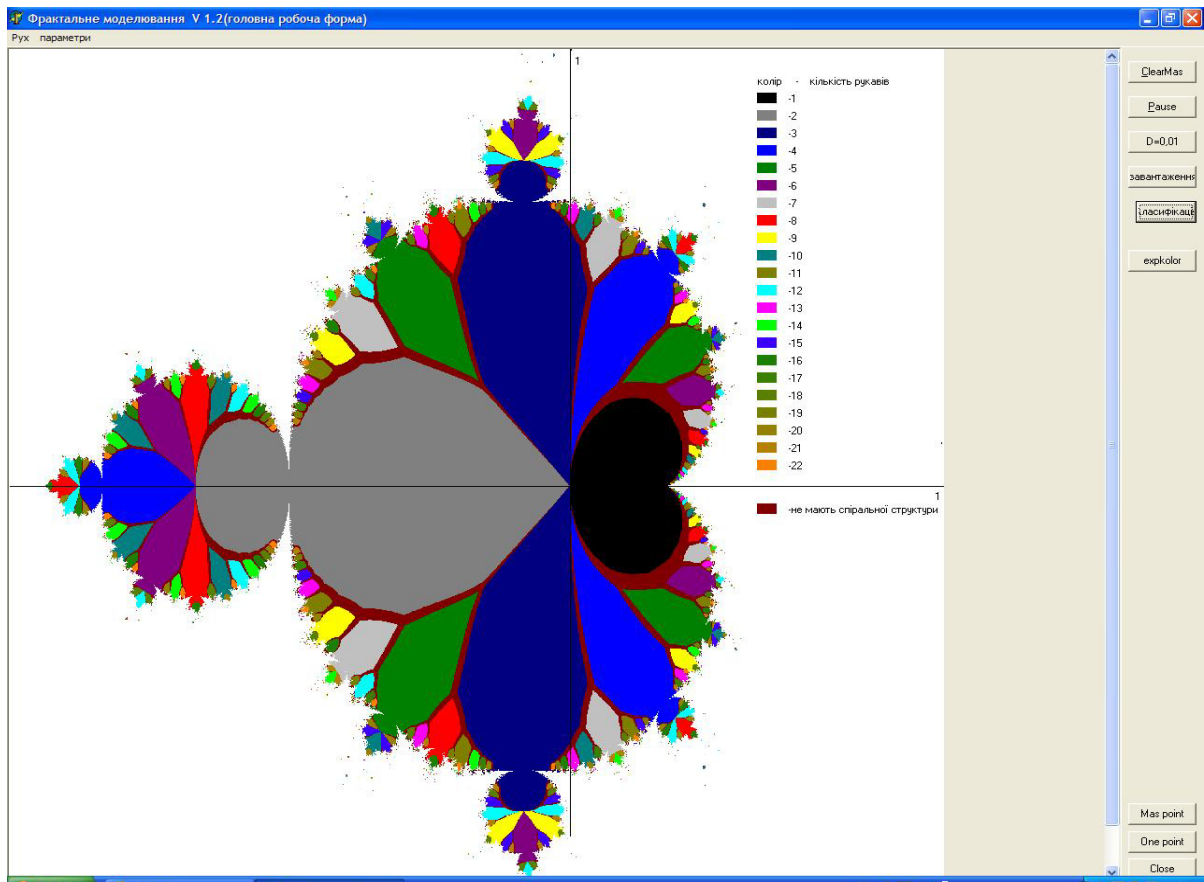


Рис.4.2. Діаграма збіжності для множини $Or^+(c_x, c_y)$

Іншими словами, має місце властивість: \forall точки $x: \min_{y \in Or^+(c_x, c_y)} |x - y| < \varepsilon$ та

$\forall n \in N$ виконується співвідношення: $\min_{z \in Or^+(c_x, c_y)} |A^n y - z| < \varepsilon$.

Розглянемо цю властивість детальніше. Дійсно, аналізуючи послідовність перетворень (4.11) бачимо, що

$$A^n x_0 = A^{n-1} c + 2^{n-1} x_0^2 c A c A^2 c \dots A^{n-2} c + o(x_0^2).$$

Нехай $|Ax_0 - c| = |x_0^2| < \varepsilon$. Тоді

$$|A^n x_0 - A^{n-1} c| \leq 2^{n-1} |x_0^2| |c| |Ac| |A^2 c| \dots |A^{n-2} c| + O(\varepsilon^2).$$

Отже, при невеликому n будь-яка точка, що знаходиться в околі початку координат при подальших її перетвореннях за допомогою оператора A знаходиться в околі точок $Or^+(c_x, c_y)$. Більше того, очевидно, що оператор

A є стискаючим в деякій області, наприклад, в крузі радіуса $1/2$. Відмітимо, що $Or^+(c_x, c_y)$ прямує до точки (x_c, y_c) . Як вже вказувалось вище, при виконанні умови $|\tilde{x}_c| < 1/2$ ця точка є притягуючим циклом. Тобто, точка збіжності належить області, де оператор A є стискаючим. Отже, можемо вибрати таке значення m , щоб $A^m c$ та x_0 належали області, де оператор A є стискаючим. Тоді $\forall n > m$ існує така константа $\alpha < 1$, що $|A^n x_0 - A^{n-1} c| \leq \alpha^{n-1} |Ax_0 - c|$. Останнє співвідношення говорить про те, що при будь-якому n точка, що знаходиться в околі початку координат, знаходиться в околі точок послідовності $Or^+(c_x, c_y)$ при будь-яких її подальших перетвореннях за допомогою оператора A .

Аналогічне твердження справедливе, очевидно, і для околу будь-якої точки $Or^+(c_x, c_y)$, такої, що знаходиться в області стискання оператора A . Адже якщо $|x_0 - A^m c| < \varepsilon$, то $|A^n x_0 - A^{n+m} c| < \alpha^n |x_0 - A^m c| < \alpha^n \varepsilon$. Під ε -околом множини $Or^+(c_x, c_y)$ будемо розуміти об'єднання ε -околів всіх точок множини $Or^+(c_x, c_y)$ і позначати $Or_\varepsilon^+(c_x, c_y)$. Проведені вище міркування показують, що точки, які знаходяться в ε -околі множини $Or^+(c_x, c_y)$ ніколи з нього “не виходять” в процесі дії оператора A . Можемо сформулювати наступні твердження:

Твердження 3 $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \ A^n x \in Or_\varepsilon^+(c_x, c_y)$ якщо $x \in Or_\varepsilon^+(c_x, c_y)$.

Твердження 4 Для того, щоб оператор A моделював спіральну структуру достатньо, щоб існували така точка c , $\varepsilon_1 > 0$: такі що, $\forall \varepsilon < \varepsilon_1$, $\forall x \in O_{A\varepsilon}^+(c_x, c_y)$ та $\forall n \ A^n x \in Or_\varepsilon^+(c_x, c_y)$.

Відмітимо, що в басейні притягання точки \tilde{x}_c оператор не є стискаючим. Більше того, послідовність $O_A^+(x_0)$ збігається так, що відстань точок цієї послідовності до точки \tilde{x}_c не являється монотонно спадною

послідовністю. Дійсно, якщо оператор A є стискаючим у якійсь області, то виконується співвідношення : $|Ax - Ay| \leq \alpha|x - y|, 0 < \alpha < 1$. Враховуючи, що $A(x) = x^2 + c$, маємо: $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq \alpha|x - y|, 0 < \alpha < 1$. Отже, для будь-яких двох точок x, y з області стискання оператора A виконується співвідношення :

$$|x + y| \leq \alpha, 0 < \alpha < 1 \quad (4.14)$$

Однак, якщо розглянути множину $B(\tilde{x}_c)$ для деяких значень c , то легко побачити, що в цій множині співвідношення (4.14) не виконується. Розглянемо множини, обмежені множинами Жюліа при різних значеннях параметра c . Нехай, наприклад, $c = (-0.43, 0.12)$. Відповідна множина зображена на рис.4.3.

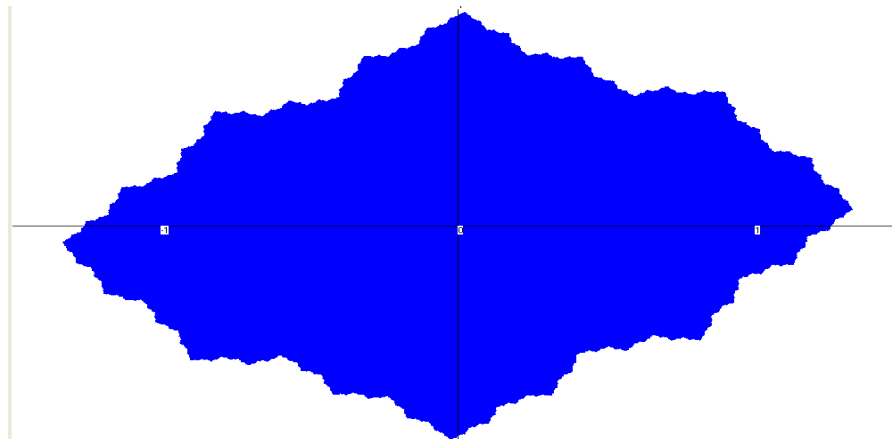


Рис.4.3 Басейн притягання при $c = (-0.43, 0.12)$

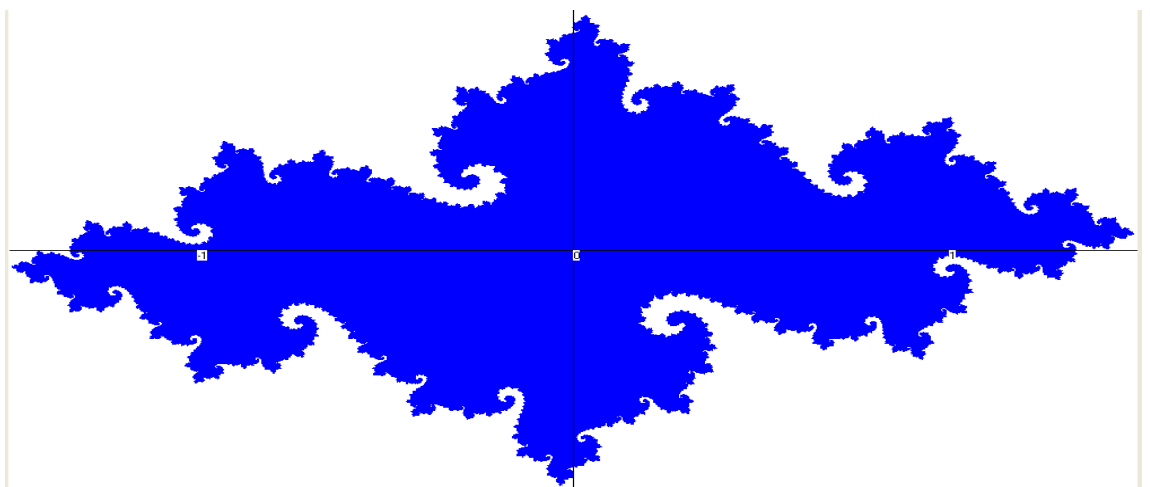


Рис.4.4 Басейн притягання при $c = (-0.73, 0.12)$

Легко бачити, що можемо вибрати точки $x=(-1,0)$ та $y=(-1,-0.2)$, де не виконується співвідношення (4.14). На рис.4.4 зображена множина точок (x,y) , коли послідовність $O_A^+(x,y)$ є обмеженою, однак відповідна нерухома точка не є притягуючою, в цьому випадку є притягуючим деякий цикл. Басейн його притягання при $c=(-0.73,0.12)$ зображено на рис.4.4.

4.2 Проблема апроксимації “рукавів” орбіт динамічних систем логарифмічними спіралями

Означення 1 Будемо говорити, що крива $r = f(\varphi)$ здійснює апроксимацію орбіти динамічної системи $O_A^+(x_0)$ за першим наближенням якщо цій кривій належать усі точки множини $O_{A_1}^+(x_0)$, де $A_1 = \frac{\partial A}{\partial x} x_c$ - якобіан перетворення, що задається оператором A , визначений в точці x_c, x_c - притягуюча нерухома точка оператора A .

Означення 2 Будемо говорити, що крива $r = f(\varphi)$ здійснює δ -апроксимацію орбіти динамічної системи $O_A^+(x_0)$ якщо вона здійснює апроксимацію за першим наближенням і для будь-яких значень n виконується умова:

$$\frac{|A_1^{n-1} \varepsilon(x_0) + A_1^{n-2} \varepsilon(Ax_0) + \dots + \varepsilon(A^{n-1}x_0)|}{|A_1^n x_0|} \leq \delta$$

де $A_1 = \frac{\partial A}{\partial x} x_c$ -якобіан перетворення, що задається оператором A , визначений в точці x_c, x_c -притягуюча нерухома точка оператора A .

Твердження 5 Для того, щоб логарифмічна спіраль здійснювала δ -апроксимацію орбіти динамічної системи $O_A^+(x_0)$ необхідно і достатньо, щоб якобіан оператора \tilde{A} можна було представити як композицію оператора

стиску та оператора повороту : $\frac{\partial \tilde{A}x_c}{\partial x} = \lambda P$, де $\lambda < 1$, P -матриця повороту та

виконувалась умова:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\varepsilon(\tilde{A}^i x)|}{\lambda^{i+1}|x|} \leq \delta, \quad (4.15)$$

$$\tilde{A}x = \frac{\partial \tilde{A}x_c}{\partial x} x + \varepsilon(x),$$

$$\frac{\varepsilon(x)}{|x|} \rightarrow 0, \text{ при } |x| \rightarrow 0.$$

Доведення

Враховуючи формулу Тейлора для вектор-функцій векторного аргументу, маємо:

$$Ax = Ax_c + \frac{\partial Ax_c}{\partial x}(x - x_c) + \varepsilon(x, x_c) = x_c + \frac{\partial Ax_c}{\partial x}(x - x_c) + \varepsilon(x, x_c),$$

де $\frac{\varepsilon(x, x_c)}{|x - x_c|} \rightarrow 0$, при $|x - x_c| \rightarrow 0$. Тоді для оператора \tilde{A} можемо записати: $x_c = 0$

і $\tilde{A}x = \frac{\partial \tilde{A}x_c}{\partial x} x + \varepsilon(x)$. Надалі в усіх міркуваннях позначення \sim над оператором

A будемо опускати для простоти запису. Отже, можемо записати:

$$A^2x = A\left(\frac{\partial Ax_c}{\partial x} x + \varepsilon(x)\right) = \frac{\partial Ax_c}{\partial x} \left(\frac{\partial Ax_c}{\partial x} x + \varepsilon(x)\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial Ax_c}{\partial x} x + \varepsilon(x)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial Ax_c}{\partial x}\right)^2 x + \frac{\partial Ax_c}{\partial x} \varepsilon(x) + \varepsilon(Ax),$$

$$A^3x = A\left(\left(\frac{\partial Ax_c}{\partial x}\right)^2 x + \frac{\partial Ax_c}{\partial x} \varepsilon(x) + \varepsilon(Ax)\right) =$$

$$= \frac{\partial Ax_c}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial Ax_c}{\partial x}\right)^2 x + \frac{\partial Ax_c}{\partial x} \varepsilon(x) + \varepsilon(Ax)\right) +$$

$$+ \varepsilon(A^2x) = \left(\frac{\partial Ax_c}{\partial x}\right)^3 x + \left(\frac{\partial Ax_c}{\partial x}\right)^2 \varepsilon(x) + \frac{\partial Ax_c}{\partial x} \varepsilon(Ax) + \varepsilon(A^2x),$$

...

$$A^n x = \left(\frac{\partial A x_c}{\partial x} \right)^n x + \left(\frac{\partial A x_c}{\partial x} \right)^{n-1} \varepsilon(x) + \left(\frac{\partial A x_c}{\partial x} \right)^{n-2} \varepsilon(Ax) + \dots + \varepsilon(A^{n-1}x).$$

Нехай $A_1 = \frac{\partial A x_c}{\partial x} = \lambda P$, де P -матриця повороту на деякий кут φ :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Тоді $A_1 x = \lambda P x = \lambda e^{i\varphi} x = \lambda e^{i\varphi} r_0 e^{i\varphi_0} = \lambda |x| e^{i(\varphi+\varphi_0)}$,

$$|A_1 x| = |\lambda P x| = e^{\ln \lambda} |x|,$$

$$|A_1^2 x| = |A_1 A_1 x| = |\lambda e^{i\varphi} \lambda e^{i\varphi} x| = e^{2 \ln \lambda} |x|,$$

...

$$|A_1^n x| = |A_1 \dots A_1 x| = e^{n \ln \lambda} |x|.$$

Розглянемо криву $r = |x| e^{\ln \lambda (s - \varphi_0) / \varphi}$, де φ_0 - відповідна полярна координата точки x , φ - кут, що визначається матрицею повороту P . Очевидно, що точки динамічної системи, що визначається оператором $\frac{\partial A}{\partial x} x_c$ знаходяться

точно на цій кривій. Крім того,

$$\begin{aligned} & \frac{|A_1^{n-1} \varepsilon(x_0) + A_1^{n-2} \varepsilon(Ax_0) + \dots + \varepsilon(A^{n-1}x_0)|}{|A_1^n x_0|} = \\ & = \frac{|(\lambda P)^{n-1} \varepsilon(x) + (\lambda P)^{n-2} \varepsilon(Ax) + \dots + \varepsilon(A^{n-1}x)|}{|(\lambda P)^n x|} \leq \frac{(\lambda)^{n-1} |\varepsilon(x)| + (\lambda)^{n-2} |\varepsilon(Ax)| + \dots + |\varepsilon(A^{n-1}x)|}{\lambda^n |x|} \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|\varepsilon(A^i x)|}{\lambda^{i+1} |x|} \leq \delta \end{aligned}$$

Достатність доведена. Доведемо необхідність.

Нехай оператор A такий, що логарифмічна спіраль здійснює δ -апроксимацію орбіти динамічної системи $O_A^+(x_0)$ та виконується співвідношення:

$$\left| \left(\frac{\partial A x_c}{\partial x} \right)^{n-1} \varepsilon(x) + \left(\frac{\partial A x_c}{\partial x} \right)^{n-2} \varepsilon(Ax) + \dots + \varepsilon(A^{n-1}x) \right| \leq \delta \left| \left(\frac{\partial A x_c}{\partial x} \right)^n x \right|.$$

Як відомо, має місце спектральний розклад довільної матриці $B: B = QSR^*$, де Q, R -ортогональні матриці, S -діагональна. Ортогональне перетворення – це поворот чи дзеркальне відображення відносно деякої прямої, що проходить через початок координат. Ортогональні перетворення зберігають довжину, власна ортогональна матриця у евклідовій площині є матриця повороту. Отже, для доведення необхідного результату необхідно розглянути композицію поворотів та розтягу.

Нехай $\bar{x} = (x, y)$ – деяка точка з басейну притягання початку координат.

Розглянемо перетворення $B(x, y)^T = QSR^*(x, y)^T$. Нехай $S = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$, Q, R^* -

матриці повороту на кути φ_1, φ_2 чи дзеркального відображення відносно деякої прямої, що проходить через початок координат відповідно. У випадку дзеркального відображення ортогональна матриця матиме вигляд

$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$. Таке відображення можна представити як композицію

дзеркального відображення відносно осі OX та деякої матриці повороту:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що відображення, яке визначається матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, також

можна представити через матрицю повороту, однак кут повороту залежатиме від координат точки. Відповідний кут повороту можемо представити наступним чином (тут не будемо враховувати поправку при переході від полярної до декартової системи координат):

$\varphi = -2 \arctg \frac{y}{x}$. Нехай $P(\varphi)$ -матриця повороту на кут φ . Тоді

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P(-2\text{arctg } \frac{y}{x}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Отже, можемо записати:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y \\ -\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y \end{pmatrix} = P(-2\text{arctg } \frac{-\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y}{\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y}) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y \\ -\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y \end{pmatrix} = P(-2\text{arctg } \frac{-\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y}{\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y}) P(-\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= P(-2\text{arctg } \frac{-\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y}{\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y} - \varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P(\varphi_1(x, y)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\varphi_1(x, y) = -2\text{arctg } \frac{-\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y}{\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y} - \varphi.$$

Отже, $R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P(\varphi_1(x, y)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Зауважимо, що якщо R - перетворення

повороту, то $\varphi_1(x, y) = \varphi_1 = \text{const}$. Аналогічно $Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P(\varphi_2(x, y)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, де

$$\varphi_3(x, y) = -2\text{arctg } \frac{-\sin(\theta)x + \cos(\theta)y}{\cos(\theta)x + \sin(\theta)y} - \theta.$$

Нехай $B(x, y)^T = QSR^*(x, y)^T = (x_1, y_1)$. Діючи послідовно на деяку точку $(x, y)^T$ операторами R^*, S, Q отримаємо наступні відображення:

$$(x, y) \rightarrow (x_1^1, y_1^1) \rightarrow (x_1^2, y_1^2) \rightarrow (x_1^3, y_1^3) = (x_1, y_1).$$

Аналогічно, якщо $B(x_1, y_1)^T = QSR^*(x_1, y_1)^T = (x_2, y_2)$ то

$$(x_1, y_1) \rightarrow (x_2^1, y_2^1) \rightarrow (x_2^2, y_2^2) \rightarrow (x_2^3, y_2^3) = (x_2, y_2).$$

Нехай $\frac{\partial Ax_c}{\partial x} = QSR^*$. Припустимо, що можемо побудувати логарифмічну

спіраль, яка проходить через всі точки $O_{QSR^*}^+(x, y)$. Нехай $x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} e^{i\varphi_0}$.

Тоді рівняння відповідної логарифмічної спіралі має вигляд:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\lambda(s-\varphi_0)}$$

Нехай $R^*(x, y)^T = (x_1^1, y_1^1)$, $|R^*(x, y)^T| = |(x_1^1, y_1^1)| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тоді $SR^*(x, y)^T = (\mu_1 x_1^1, \mu_2 y_1^1)$. Представимо перетворення S у вигляді:

$S(x_1^1, y_1^1) = (\mu_1 x_1^1, \mu_2 y_1^1) = \mu(x_1^1, y_1^1)P(\varphi_2(x_1^1, y_1^1))(x_1^1, y_1^1)$, де $P(\cdot)$ - матриця

повороту на кут, що визначається співвідношенням:

$$\varphi_2(x_1^1, y_1^1) = z \arccos \frac{\mu_1(x_1^1)^2 + \mu_2(y_1^1)^2}{|(\mu_1 x_1^1, \mu_2 y_1^1)| |(x_1^1, y_1^1)|}, \text{ де } z = \text{sign}(x_1^1 \mu_2 y_1^1 - y_1^1 \mu_1 x_1^1),$$

$$\mu(x_1^1, y_1^1) = \frac{|(\mu_1 x_1^1, \mu_2 y_1^1)|}{|(x_1^1, y_1^1)|}.$$

Виходячи з припущення про існування відповідної логарифмічної спіралі та з врахуванням того, що оператор Q не змінює норму, очевидним є співвідношення:

$$|(\mu_1 x_1^1, \mu_2 y_1^1)| = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\lambda(\varphi_1(x_0, y_0) + \varphi_2(x_1^1, y_1^1) + \varphi_3(x_1^2, y_1^2))}.$$

Аналогічно

$$|(\mu_1 x_2^1, \mu_2 y_2^1)| = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\lambda(\varphi_1(x_0, y_0) + \varphi_2(x_1^1, y_1^1) + \varphi_3(x_1^2, y_1^2) + \varphi_1(x_1, y_1) + \varphi_2(x_2^1, y_2^1) + \varphi_3(x_2^2, y_2^2))},$$

...

$$|(\mu_1 x_n^1, \mu_2 y_n^1)| = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n (\varphi_1(x_{i-1}, y_{i-1}) + \varphi_2(x_i^1, y_i^1) + \varphi_3(x_i^2, y_i^2)))}.$$

(тут $x_0 = x, y_0 = y$).

Маємо нескінченну кількість трансцендентних рівнянь, невідомими у яких є μ_1, μ_2, λ та x, y . Така система в загальному випадку є несумісною в силу специфічного трансцендентного характеру цих рівнянь.

Визначимо, при яких умовах система може бути сумісною. Нехай

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_1 = \text{const}, \varphi_2(x, y) = \varphi_2 = \text{const}, \varphi_3(x, y) = \varphi_3 = \text{const}.$$

Перші дві умови означають, що матриці Q та R можуть бути лише матрицями повороту. Співвідношення

$$\varphi_3(x_1^1, y_1^1) = z \arccos \frac{\mu_1(x_1^1)^2 + \mu_2(y_1^1)^2}{|(\mu_1 x_1^1, \mu_2 y_1^1)| |(x_1^1, y_1^1)|}$$

стає константою, якщо $\mu_1 = \mu_2$, причому $\varphi_3 = 0$.

Тоді система матиме вигляд:

$$\mu |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\lambda(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)},$$

$$\mu^2 |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\lambda(2\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3)},$$

...

$$\mu^n |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\lambda(n\varphi_1 + n\varphi_2 + n\varphi_3)}.$$

або

$$\mu = e^{-\lambda(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}, \mu^2 = e^{-\lambda(2\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3)},$$

...

$$\mu^n = e^{-\lambda(n\varphi_1 + n\varphi_2 + n\varphi_3)},$$

...

Очевидно, що така система є сумісною і може бути розв'язана відносно параметра λ . Твердження доведене.

Розглянемо як приклад оператор (4.6):

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x + x_c)^2 - (y + y_c)^2 + c_x - x_c \\ 2(x + x_c)(y + y_c) + c_y - y_c \end{pmatrix}.$$

Тоді за визначенням Якобіана, маємо:

$$A_1(x, y) = \frac{\partial A}{\partial \bar{x}}(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x + x_c) & -2(y_c + y) \\ 2(y + y_c) & 2(x_c + x) \end{pmatrix},$$

$$A_1(0, 0) = \begin{pmatrix} 2x_c & -2y_c \\ 2y_c & 2x_c \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}\bar{x} = \frac{\partial \tilde{A}\bar{0}}{\partial \bar{x}} \bar{x} + \varepsilon(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2x_c & -2y_c \\ 2y_c & 2x_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\varepsilon(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, |\varepsilon(\bar{x})| = |\bar{x}|^2, |\varepsilon(A^i x)| = |A^i x|^2.$$

Враховуючи співвідношення (4.8), маємо:

$$|\tilde{A}^n \bar{x}| = 2^n |\bar{x}| |\tilde{x}_c|^n \left| 1 + \frac{\bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \left| 1 + \frac{\tilde{A} \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \left| 1 + \frac{\tilde{A}^2 \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right| \dots \left| 1 + \frac{\tilde{A}^{n-1} \bar{x}}{2\tilde{x}_c} \right|.$$

Тоді можемо проаналізувати збіжність ряду:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\varepsilon(\tilde{A}^i x)|}{\lambda^{i+1} |x|} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\tilde{A}^i x|^2}{2^{i+1} |\tilde{x}_c|^{i+1} |x|} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{2i} |x|^2 |\tilde{x}_c|^{2i} C}{2^{i+1} |\tilde{x}_c|^{i+1} |x|} = |x| C \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i-1} |\tilde{x}_c|^{i-1}.$$

Очевидно, що ряд збігається, якщо $|\tilde{x}_c| < \frac{1}{2}$. Тоді завжди можемо вибрати таке значення $|x|$, що матиме місце співвідношення (4.16).

4.3 Моделювання колективних ефектів солітонної взаємодії

Зауважимо, що хвильові процеси існують у різноманітних середовищах, при цьому солітоноподібні хвилі виникають як правило у випадках, коли має місце деякий рух, середовище є динамічним. Саме в динамічних середовищах як правило виконуються умови генерації таких хвиль. Наприклад, рухомі заряджені частинки випромінюють електромагнітні хвилі, максимум випромінювання яких поширюється в напрямку вектора швидкості. Таким чином, для математичного моделювання середовища, де існують хвильові процеси, необхідно розглядати об'єкти двох видів—саме середовище та хвилі. При цьому середовище можна моделювати у рамках різноманітних наближень – корпускулярного підходу, структурно-феноменологічного підходу чи виходячи з поняття суцільного середовища, де дискретність будови ігнорується. В нашому випадку розглядатимемо лише відокремлені хвилі, які характеризуються обмеженістю області локалізації. Тоді будемо моделювати поширення у відповідному просторі точок максимуму відповідних збурень.

4.3.1 Моделювання колективних ефектів солітонної взаємодії на основі енергетичних функцій

Будемо розглядати динамічну систему виду:

$$\Sigma = \{T, G, G_0, X, A, I, E\} \quad (4.16)$$

де $T = [0, t_1] \subset R$ - часовий інтервал дослідження ; $G \subset R^n$ - множина станів (фазовий простір); G_0 - множина, $G_0 \subset G$, що визначає початкові положення точок в яких генеруються відокремлені хвилі; $X : T \times T \times G \rightarrow G$ - оператор, що визначає траєкторії точок системи (базовий закон руху) ($X(t, s, x_0) = X(t, s)x_0$ визначає положення деякої точки системи в момент часу t , $t \geq s$, яка в момент часу s знаходилась в положенні x_0); $A : T \times T \times G \rightarrow G$ - оператор, що визначає поширення випромінювання (відокремлених хвиль) в просторі-часі (тобто $A(t, s, x_0)$ визначає положення у фазовому просторі точки максимального збурення, що виникла в точці x_0 в момент часу s ; I - закон виникнення нових локалізованих збурень; $E : T \times G \rightarrow R^+$ - енергетична функція .

Нехай G_0 - це деяка скінчена множина випадкових векторів, що мають рівномірний розподіл в області G . Будемо вважати, що система є відкритою, тобто в області $G \subset R^n$ в процесі дослідження з'являються нові локалізовані збурення. Нехай дисципліна виникнення нових точок локалізованих збурень така, що виконується умова:

$$\exists \varepsilon_{\min} > 0 : \forall \varepsilon \geq \varepsilon_{\min}, \forall S_\varepsilon : \mu(S_\varepsilon) = \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, T] : P\{S_\varepsilon \cap G_t \neq \emptyset\} = 1. \quad (4.17)$$

Будемо вважати, що кожна точка системи $x_i \in G_t$ в кожен момент часу t породжує відокремлену хвилю, яка рухається в напрямку вектора

$$A_{\parallel}(x_i) = (\tilde{A}x_i - x_i) / \|\tilde{A}x_i - x_i\| \text{ з деякою швидкістю, де } \tilde{A}x = f(x) + x.$$

Визначимо деяку скалярну функцію $p(x, t)$, яку будемо інтерпретувати як модуль вектора швидкості хвилі, $\|v(x, t)\| = p(x, t)$. Тоді сам вектор

швидкості в точці x буде мати вигляд: $v(x, s) = p(x, s)A_{\parallel}(x)$.

Нехай $r(t, s, x, A)$ - функція, яка описує координату хвилі, що породжена в точці x в момент часу s і рухається в напрямку відповідного вектора. Легко показати, що ця функція задовольняє рівняння:

$$r(t, s, x, A) = \int_s^t p(r(\tau, s, x, A)A_{\parallel}(x))d\tau + x. \quad (4.18)$$

Введемо функції, що описують вплив локалізованих збурень. Нехай ε_E - це мінімальна відстань, за межами якої вплив відокремленої хвилі на довільну точку системи можна вважати нульовим. Нехай $p(x, t) = c|\tilde{A}x - x|$. Тоді при $c = 1$ можемо визначити енергетичну функцію так:

$$E(z, t) = C \int_0^{t-t_0} \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\tilde{\xi}(t-t_0-s)}(x) dx ds, \quad (4.19)$$

де $\tilde{\xi}(t - t_0 - s) = X(t - t_0 - s)\xi_{t_0}$, $S_{\varepsilon_E}(z) = \{x : |x - z| \leq \varepsilon_E\}$, C -деяка константа. В такому випадку при $s \rightarrow t - t_0$ $\tilde{\xi}(t - t_0 - s) = X(0)\xi_0 = \xi_0$. Очевидно, що при $t = t_0 + \Delta$ та малому Δ

$$\tilde{\xi}(t - t_0 - s) = \tilde{\xi}(\Delta - s) = X(\Delta - s)\xi_0 \approx \xi_0.$$

Тоді $E(z, t) = C \int_0^{t-t_0} \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx ds$ або

$$E(z, t) = \int_0^{t-t_0} \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx ds. \quad (4.20)$$

Зауважимо, що при моделюванні колективних процесів взаємодії відокремлених хвиль, коли $c \gg 1$, представляє також інтерес вивчення енергетичної функції виду:

$$E(z, t) = C \int_0^{t-t_0} \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(cs)\xi_{t_0}}(x) dx ds = \frac{C}{c} \int_0^{c(t-t_0)} \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx ds. \quad (4.21)$$

Виходячи, наприклад, з моделі тонкого гравітуючого газового диску, логічно розглянути такий базовий закон руху, при якому всі точки, що породжують солітоноподібні хвилі, рухаються до центру і характер зміни їх щільності не впливає на можливі екстремуми енергетичної функції (зростання щільності, наприклад, в центрі призводить до рівномірного поширення хвиль у всі сторони, енергія розсіюється). Іншими словами ми вважаємо, що в кожен момент часу загальний розподіл виходячи з базового закону руху є таким, що всі точки, які породжують солітоноподібні хвилі, є рівномірно розподіленими. Враховуючи описані вище міркування, розглянемо енергетичну функцію виду:

$$E(z, t) = \int_0^t \int_{S_{\varepsilon E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_0}(x) |AA^{-1}(s)x|^2 \psi(s, AA^{-1}(s)x) dx ds, \quad (4.22)$$

де $f_{\tilde{A}(t)\xi_0}(z)$ -щільність вектора $\tilde{A}(t)\xi_0$. Функцію $\psi(.,.)$ виберемо у вигляді:

$$\psi(s, (A - I)A^{-1}(s)x) = e^{-\alpha s / |(A - I)A^{-1}(s)x|}.$$

Приклад 1 Розглянемо ситуаційний стан системи, коли всі елементи рухаються по колу у площині. Тоді закон руху визначатиметься системою рівнянь:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$$

Запишемо енергетичну функцію для такого руху. Маємо:

$$E(z, t) = \int_0^t \int_{S_{\varepsilon E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_0}(x) |(A - I)A^{-1}(s)x|^2 \psi(s, (A - I)A^{-1}(s)x) dx ds.$$

Відзначимо, що $f_{\tilde{A}(s)\xi_0}(x)$ є щільністю рівномірного розподілу в крузі відповідного радіусу.

Адже перетворення $Ax - x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$ є перетворенням повороту. Тоді

$$A(t)x = x + t(Ax - x) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix} x = \sqrt{1+t^2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+t^2} & -t/\sqrt{1+t^2} \\ t/\sqrt{1+t^2} & 1/\sqrt{1+t^2} \end{pmatrix} x. \text{ Отже,}$$

вектор $A(t)\xi$ має рівномірний розподіл в крузі радіуса $\sqrt{1+t^2}$. Знайдемо

$AA^{-1}(s)x$ Маємо:

$$A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1/(1+t^2) & t/(1+t^2) \\ -t/(1+t^2) & 1/(1+t^2) \end{pmatrix},$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x,$$

$$\begin{aligned} (A-I)A^{-1}(t)x &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/(1+t^2) & t/(1+t^2) \\ -t/(1+t^2) & 1/(1+t^2) \end{pmatrix} x = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} x = \\ &= \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} tx_1 - x_2 \\ x_1 + tx_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } |(A-I)A^{-1}(s)x|^2 = \frac{1}{(1+s^2)}(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\begin{aligned} E(z,t) &= \int_0^t \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) |(A-I)A^{-1}(s)x|^2 e^{-\alpha s |(A-I)A^{-1}(s)x|} dx ds = \\ &= \int_0^t \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} \frac{1}{\pi(1+s^2)} \frac{1}{(1+s^2)} (x_1^2 + x_2^2) e^{-\alpha s \sqrt{1+s^2}/\sqrt{x_1^2+x_2^2}} dx ds = \\ &= \int_0^t \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} \frac{x_1^2 + x_2^2}{\pi(1+s^2)^2} e^{-\alpha s \sqrt{1+s^2}/\sqrt{x_1^2+x_2^2}} dx ds. \end{aligned}$$

Легко бачити, що функція $E(z,t)$ є монотонно спадною по z . Це означає, що максимальна енергія випромінювання зосереджується на границі круга.

Приклад 2 При моделюванні процесу руху частинок, що породжують солітоноподібні хвилі, коли дотична до траєкторії визначається оператором (4.5), закон руху описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - y^2(t) - x(t) + c_x, \\ y'(t) = 2x(t)y(t) - y(t) + c_y. \end{cases}$$

Вектори (x, Ax) утворюють деяке векторне поле. Наприклад, для випадку R^2 та значень параметрів $c_x = -0.02, c_y = 0.26$ відповідне поле зображено на Рис.4.5-4.6. Безумовно, що для моделювання просторових об'єктів представляє інтерес тривимірний аналог оператора (4.4):

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - z^2 + c_x \\ 2xy + c_y \\ 2xz + c_z \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

де c_x, c_y, c_z - деякі параметри.

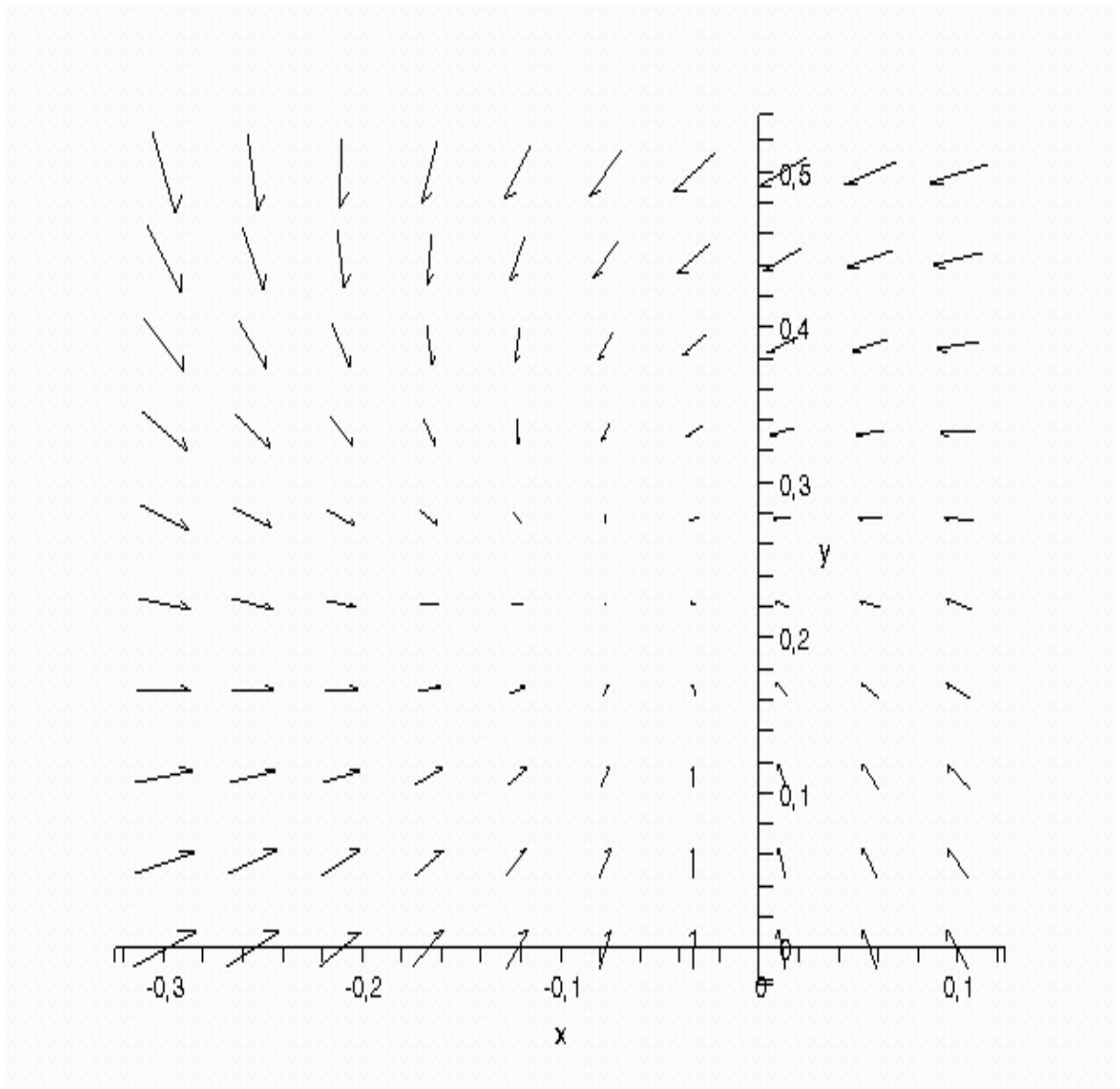


Рис.4.5 Векторне поле оператора (4.5)

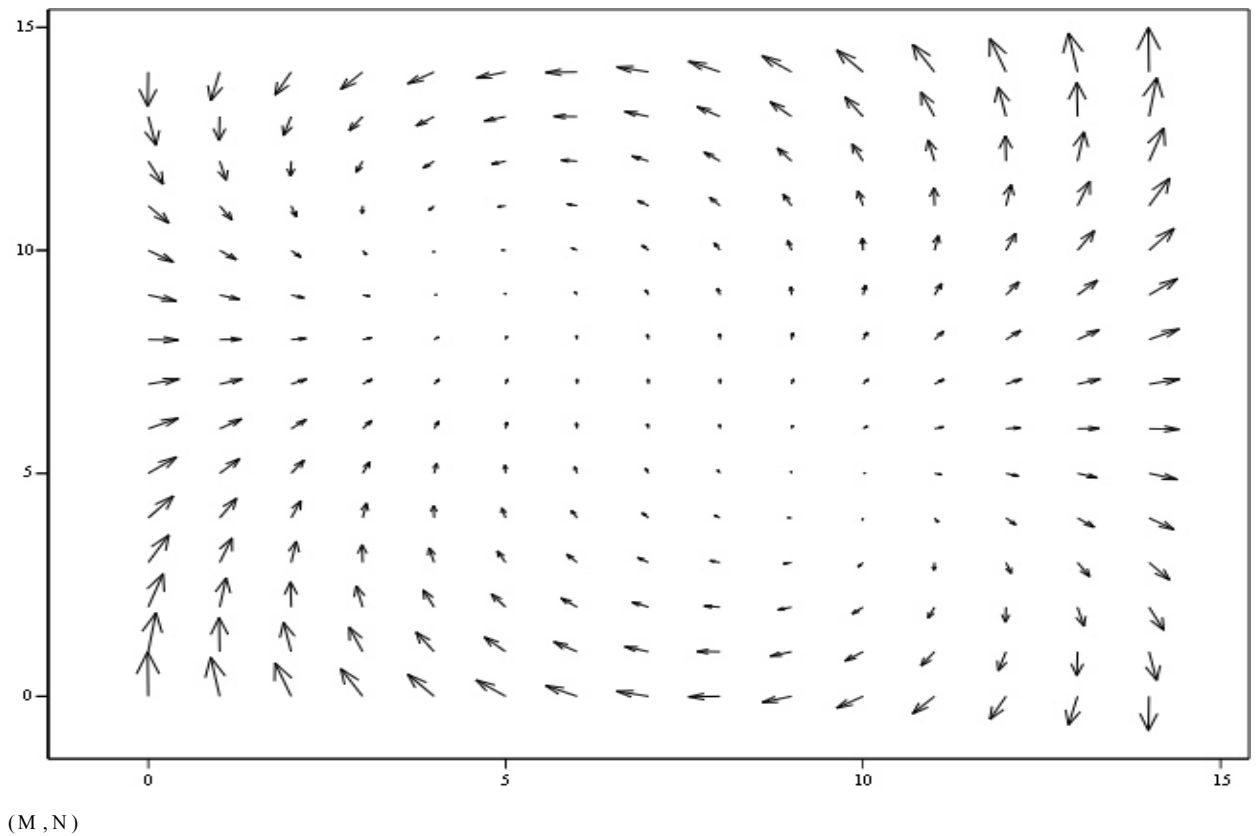


Рис.4.6 Векторне поле оператора (4.5) при зміні масштабу

Будемо розглядати деяку множину солітоноподібних хвиль, рівномірно-розподілену в певній області, взаємодія яких з поверхнями Пуанкаре задаватиметься оператором (4.23).

Якщо відокремлена хвиля рухається по дотичній до неперервної траєкторії породжувача її об'єкту, то рівняння руху матиме вигляд:

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - y^2(t) - z^2(t) - x(t) + c_x \\ y'(t) = 2x(t)y(t) - y(t) + c_y \\ z'(t) = 2x(t)z(t) - z(t) + c_z \end{cases} \quad (4.24)$$

Тут враховано той факт, що $(x'(t), y'(t), z'(t))$ задає дотичну до кривої, що проходить через точку $(x(t), y(t), z(t))$. Запишемо (4.24) у вигляді:

$$\bar{x}'(t) = \tilde{A}\bar{x}(t) - \bar{x}(t) \quad (4.25)$$

де $\bar{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, \tilde{A} - відповідний оператор.

Будемо розв'язувати систему (4.25) при різних початкових значеннях. Для зручності можемо взяти в якості початкових значень 8 точок послідовності ітераційного процесу (4.11), стартуючи, наприклад, з точки $(0, -0.34, 0.23)$.

Тоді отримуємо траєкторії, зображені на рис. 4.7.

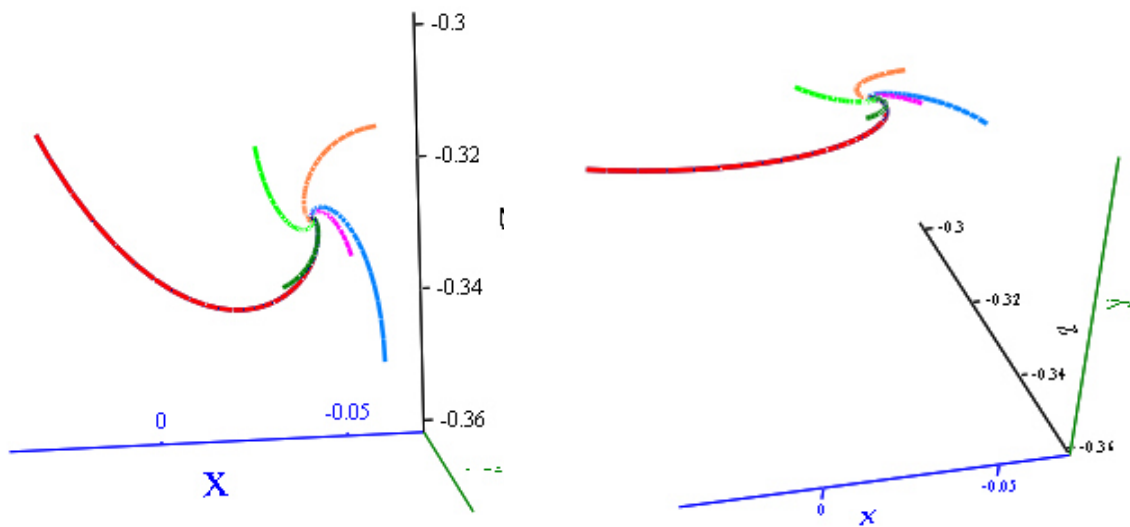
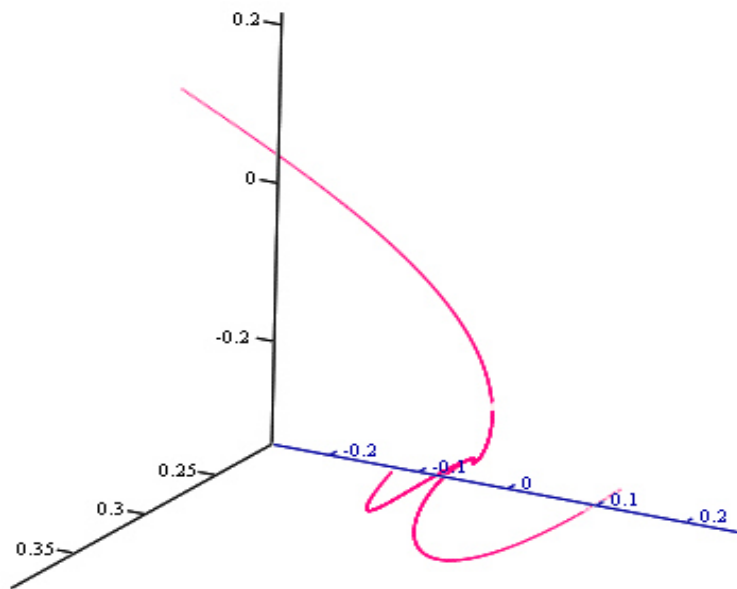


Рис. 4.7 Приклад характеристичних кривих



(R, S, T)

Рис. 4.8 Характеристичні криві при $cx=0.12$, $cy=0.24$, $cz=-0.34$.

На Рис. 4.8 зображені розв'язки (4.25) при інших значеннях початкових точок: $c_x=0.12$, $c_y=0.24$, $c_z=-0.34$. Аналіз розв'язку відповідних систем показує, що він при $t \rightarrow \infty$ (біжуча точка відповідної кривої) завжди збігається до нерухомої точки операторат A . Можна показати, що оператор (4.25) має дві нерухомі точки, одна з яких є асимптотично стійкою за Ляпуновим а інша-нестійкою (див. Додаток Б3).

4.3.2 Функції щільності розподілу солітоноподібних хвиль в динамічних системах з випромінюванням

Розглядатимемо систему (4.24). В подальшому нам будуть необхідні наступні допоміжні результати:

1. Система рівнянь $\tilde{A}\bar{x} = c$, $\bar{x} = (x, y, z)$ $c = (c_x, c_y, c_z)$ має єдиний розв'язок $(0,0,0)$.

2. Система $\tilde{A}\bar{x} = \bar{z}$, $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)$ має два розв'язки:

$$p = \pm \sqrt{c_x - z_1 + \sqrt{(c_x - z_1)^2 + \frac{1}{4}(c_y - z_2)^2 + \frac{1}{4}(c_z - z_3)^2}},$$

$$(p, (z_2 - c_y) / 2p, (z_3 - c_z) / 2p).$$

3. Система $\bar{x} + t(\tilde{A}\bar{x} - \bar{x}) = ct$ має два розв'язки:

$$(0,0,0) \text{ та } ((t-1)/t, 0, 0).$$

4. Система $\bar{x} + t(\tilde{A}\bar{x} - \bar{x}) = \bar{z}$ має розв'язки:

а) при $1 - t + 2xt \neq 0$: $(p, (z_2 - tc_y) / (1 - t + 2tp), (z_3 - tc_z) / (1 - t + 2tp))$,

$$p = \frac{t - 1 \pm \sqrt{\sqrt{16t^2 \alpha(t) - 8t(tc_x - z_1)(t-1)^2 + (t-1)^4 (c_x - z_1)^2 - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2}}}{2t},$$

$$\alpha(t) = (tc_x - z_1)^2 + (tc_y - z_2)^2 + (tc_z - z_3)^2.$$

б) при $1 - t + 2xt = 0$ та $z_2 = tc_y$, $z_3 = tc_z$ будемо мати безліч розв'язків виду

$$\left(\frac{t-1}{2t}, y, z\right), y^2 + z^2 = tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}.$$

Лема 7 Система рівнянь $\bar{x} + t(\tilde{A}\bar{x} - \bar{x}) = \bar{z}$ при $1-t+2xt \neq 0$ має дійсні розв'язки виду:

$(p_{\pm}(t, z_1, z_2, z_3), (z_2 - tc_y) / (1-t+2tp_{\pm}(t, z_1, z_2, z_3)), (z_3 - tc_z) / (1-t+2tp_{\pm}(t, z_1, z_2, z_3)))$, де

$$p_{\pm}(t, z_1, z_2, z_3) = \frac{t-1}{2t} \pm \frac{1}{\sqrt{2t}} \sqrt{\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - \beta(t, z_1)},$$

$$\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3) = (tc_y - z_2)^2 + (tc_z - z_3)^2 + \left(tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1\right)^2,$$

$$\beta(t, z_1) = tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{z} = (z_1, z_2, z_3).$$

Доведення

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + t(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + c_x - x_1), \\ z_2 = x_2 + t(2x_1x_2 + c_y - x_2), \\ z_3 = x_3 + t(2x_1x_3 + c_z - x_3). \end{cases} \quad (4.26)$$

З другого та третього рівнянь системи (4.26) знаходимо: $x_2 = \frac{z_2 - tc_y}{1-t+2x_1t}$,

$x_3 = \frac{z_3 - tc_z}{1-t+2x_1t}$. Підставляючи ці співвідношення у перше рівняння та

зробивши заміну змінних $x_1 = \frac{s+t-1}{2t}$, можна отримати алгебраїчне рівняння

четвертого порядку відносно змінної s , яке легко може бути зведене до квадратного заміною $s^2 = \gamma$. Це рівняння має вигляд:

$$s^4 + (4t(tc_x - z_1) - (t-1)^2)s^2 - 4t^2((z_2 - tc_y)^2 + (z_3 - tc_z)^2) = 0.$$

Звідси

$$s = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{16t^2\alpha(t) - 8t(tc_x - z_1)(t-1)^2 + (t-1)^4} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2}.$$

Зауважимо, що мають місце очевидні співвідношення:

$$8t^2\alpha(t, z_1, z_2, z_3) - 4t(tc_x - z_1)(t-1)^2 + \frac{1}{2}(t-1)^4 = 8t^2\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3), \quad (4.27)$$

$$\sqrt{16t^2\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3) - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2} = 4t(\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - \beta(t, z_1)).$$

Тоді, враховуючи відповідну заміну змінних та наведені вище співвідношення (4)-(5), безпосередньо знаходимо розв'язки системи у вигляді, записаному в формулюванні леми.

Лема 8 Нехай ξ - випадковий вектор, сумісна щільність якого описується функцією $f_\xi(z_1, z_2, z_3)$ у деякій області G та рівна 0 за межами цієї області. Тоді щільність випадкового вектора $\eta = \xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) = \tilde{A}(t)\xi$ при

$z_1 \neq \frac{t-1}{2t}$ має вигляд:

$$f_{\tilde{A}(t)\xi}(z) = \begin{cases} \frac{f_\xi(\tilde{A}_+^{-1}(t)z) + f_\xi(\tilde{A}_-^{-1}(t)z)}{4\sqrt{2}t^{3/2}\gamma(t, z_1, z_2, z_3)}, & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}_+^{-1}(t)z \in G \\ \frac{f_\xi(\tilde{A}_+^{-1}(t)z)}{4\sqrt{2}t^{3/2}\gamma(t, z_1, z_2, z_3)}, & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}_+^{-1}(t)z \in G, \tilde{A}_-^{-1}(t)z \notin G \\ \frac{f_\xi(\tilde{A}_-^{-1}(t)z)}{4\sqrt{2}t^{3/2}\gamma(t, z_1, z_2, z_3)}, & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}_+^{-1}(t)z \notin G, \tilde{A}_-^{-1}(t)z \in G \\ 0, & z \notin \tilde{A}(t)G \end{cases} \quad (4.28)$$

де $\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)$, $p_\pm(t, z_1, z_2, z_3)$, $\beta(t, z_1)$ – визначені в лемі 1,

$$\tilde{A}_\pm^{-1}(t)(z_1, z_2, z_3)^T = (p_\pm(t, z_1, z_2, z_3),$$

$$(z_2 - tc_y) / (1 - t + 2tp_\pm(t, z_1, z_2, z_3)), (z_3 - tc_z) / (1 - t + 2tp_\pm(t, z_1, z_2, z_3))),$$

$$\gamma(t, z_1, z_2, z_3) = \sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)(\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - \beta(t, z_1))}.$$

Доведення

Під дією оператора $\tilde{A}(t)$ випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ відображається у вектор $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, де $\eta_1 = \xi_1 + t(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + c_x - \xi_1)$, $\eta_2 = \xi_2 + t(2\xi_1\xi_2 + c_y - \xi_2)$, $\eta_3 = \xi_3 + t(2\xi_1\xi_3 + c_z - \xi_3)$.

Нехай $\tilde{A}^{-1}(t)$ - оператор, що визначає прообраз. Розглядаючи записані

вище співвідношення як систему рівнянь відносно невідомих ξ_1, ξ_2, ξ_3 , можемо її розв'язати при умові, що $\xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}$ і отримати (див. Лему 7) два дійсних розв'язки (у відповідності до цього вище і було введено позначення $-\tilde{A}_{\pm}^{-1}(t)(z_1, z_2, z_3)^T$). Оскільки, за умовою леми, вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ має щільність (тобто його розподіл не є сингулярним), то справедливі наступні прості міркування:

$$\begin{aligned} P\{\xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) \in dz\} &= P\{\xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) \in dz / \xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\} P\{\xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\} + \\ &+ P\{\xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) \in dz / \xi_1 = \frac{t-1}{2t}\} P\{\xi_1 = \frac{t-1}{2t}\} = \\ &= P\{\xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) \in dz / \xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\} P\{\xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\} = \\ &= P\{\xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) \in dz / \xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\}. \end{aligned}$$

Нехай $\eta = \Phi(\xi)$, $\Phi(Y) = \tilde{A}(t)Y$. Як відомо [184], має місце співвідношення:

$$f_{\eta}(Y) = f_{\xi}(\Phi^{-1}(Y)) / \left| \frac{\partial \Phi(\Phi^{-1}(Y))}{\partial X} \right|, \quad (4.29)$$

де $\left| \frac{\partial \Phi(\Phi^{-1}(Y))}{\partial X} \right|$ - модуль Якобіана відповідного перетворення, f_{ξ}, f_{η} -

щільності відповідних векторів. В нашому випадку обернене перетворення до Φ визначається неоднозначно. Отже, співвідношення (4.29) не може бути використане безпосередньо. Модифікуємо співвідношення (4.29):

$$\begin{aligned} P\{\xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) \in dz / \xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\} &= P\{\tilde{A}(t)\xi \in dz / \xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\} = \\ &= P\{\xi \in dA_+^{-1}(t)z / \xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\} + P\{\xi \in dA_-^{-1}(t)z / \xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\} = \\ &= f_{\xi}(\Phi_+^{-1}(Y)) / \left| \frac{\partial \Phi(\Phi_+^{-1}(Y))}{\partial X} \right| + f_{\xi}(\Phi_-^{-1}(Y)) / \left| \frac{\partial \Phi(\Phi_-^{-1}(Y))}{\partial X} \right|. \end{aligned}$$

Знайдемо Якобіан, записаний у останньому співвідношенні.

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \begin{vmatrix} 1 + 2tx - t & -2ty & -2tz \\ 2ty & 1 + 2tx - t & 0 \\ 2tz & 0 & 1 + 2tx - t \end{vmatrix} = (1 - t + 2tx)^3 + (1 - t + 2tx)4t^2(y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial \Phi(\Phi_+^{-1}(z))}{\partial x} = \left| s^3 + \frac{4t^2}{s}(z_2 - tc_y)^2 + \frac{4t^2}{s}(z_3 - tc_z)^2 \right| = \frac{\partial \Phi(\Phi_-^{-1}(z))}{\partial x},$$

$$\text{де } s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2}, \tau = 8t^2\alpha - 4t(tc_x - z_1)(t-1)^2 + \frac{1}{2}(t-1)^4,$$

$$\alpha = (tc_x - z_1)^2 + (tc_y - z_2)^2 + (tc_z - z_3)^2.$$

Легко показати, що має місце рівність:

$$(s^4 + 4t^2(z_2 - tc_y)^2 + 4t^2(z_3 - tc_z)^2) = (\tau - (4t(tc_x - z_1) - (t-1)^2)\sqrt{\tau})/\sqrt{2}.$$

$$\text{Звідси } s/(s^4 + 4t^2(z_2 - tc_y)^2 + 4t^2(z_3 - tc_z)^2) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2} / \sqrt{2}}{\tau - (4t(tc_x - z_1) - (t-1)^2)\sqrt{\tau} / \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2}}{\sqrt{\tau}(\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau}\sqrt{\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2}}. \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи, що ξ має розподіл з щільністю $f_\xi(z_1, z_2, z_3)$ в G а також специфіку $\tilde{A}^{-1}(t)$, отримуємо функцію щільності у вигляді:

$$f_{\tilde{A}(t)\xi}(z) = \begin{cases} \frac{f_\xi(\Phi_+^{-1}(z)) + f_\xi(\Phi_-^{-1}(z))}{\sqrt{\tau}(\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2)}, & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}^{-1}(t)z \in G, \\ \frac{f_\xi(\Phi_+^{-1}(z))}{\sqrt{\tau}(\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2)}, & z \in \tilde{A}(t)G, (\tilde{A}^{-1}(t)z)_+ \in G, (\tilde{A}^{-1}(t)z)_- \notin G \\ \frac{f_\xi(\Phi_-^{-1}(z))}{\sqrt{\tau}(\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2)}, & z \in \tilde{A}(t)G, (\tilde{A}^{-1}(t)z)_+ \notin G, (\tilde{A}^{-1}(t)z)_- \in G \\ 0, & z \notin \tilde{A}(t)G \end{cases}$$

Враховуючи співвідношення

$\tau(\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2) = 32t^3 \tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)(\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - \beta(t, z_1))$ та умову $z_1 \neq \frac{t-1}{2t}$, отримуємо відповідний вираз для функції щільності. Лема доведена.

Наслідок Нехай функція $f_\xi(z_1, z_2, z_3)$ відмінна від 0 у області G . Тоді область, де функція щільності (4.6) рівна ∞ (не визначена) має вигляд:

$$\Omega_\infty = \bigcup_{t>0} \Omega_\infty^t \text{ де } \Omega_\infty^t = \{(z_1, z_2, z_3) : z_1 \leq tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}, z_2 = tc_y, z_3 = tc_z\} \cap G.$$

Таку область легко отримати, якщо прирівняти до 0 вирази, що стоять у знаменнику дробу в співвідношенні (4.40) та проаналізувати рівняння виду:

$$\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3) = 0, \sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1) = 0.$$

Лема 9 $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \Omega_\infty^t$ її прообразом $\tilde{A}^{-1}(t)\Omega_\infty^t$ є множина виду:

$$\{(\frac{t-1}{2t}, y, z) \in G : y^2 + z^2 = \frac{1}{t}(tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1)\}$$

Доведення

Розглянемо $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \Omega_\infty^t$. Припустимо, що $1 - t + 2xt \neq 0$.

Тоді прообраз точки має вигляд:

$$(p, (z_2 - tc_y) / (1 - t + 2tp), (z_3 - tc_z) / (1 - t + 2tp)),$$

$$p = \frac{t-1 \pm \sqrt{\sqrt{16t^2 \alpha(t) - 8t(tc_x - z_1)(t-1)^2 + (t-1)^4 (c_x - z_1)^2 - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2}}}{2t}.$$

А, оскільки $z_2 = tc_y, z_3 = tc_z$, то $p = \frac{t-1}{2t}$. Отримали протиріччя. Отже, область

Ω_∞^t є такою, де виконується умова: $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \Omega_\infty^t$ її прообраз має вигляд:

$$\{(\frac{t-1}{2t}, y, z) \in G : y^2 + z^2 = \frac{1}{t}(tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1)\}.$$

Лема доведена.

Лема 10 Щільність випадкового вектора $\eta = \xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) = \tilde{A}(t)\xi$, де ξ рівномірно розподілена в G , має вигляд:

$$f_{\tilde{A}(t)\xi}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(G)2\sqrt{2}t^{3/2} \sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)(\sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)} - (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1))}}, & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}^{-1}(t)z \in G, z_1 \neq \frac{t-1}{2t} \\ \frac{1}{\mu(G)4\sqrt{2}t^{3/2} \sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)(\sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)} - (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1))}}, & z \in \tilde{A}(t)G, z_1 \neq \frac{t-1}{2t} \text{ і } (\tilde{A}^{-1}(t)z)_+ \in G, \\ & (\tilde{A}^{-1}(t)z)_- \notin G, \text{ або } (\tilde{A}^{-1}(t)z)_+ \notin G, (\tilde{A}^{-1}(t)z)_- \in G \\ & 0, z \notin \tilde{A}(t)G, \end{cases} \quad (4.30)$$

де $\alpha(z_1, z_2, z_3) = (tc_y - z_2)^2 + (tc_z - z_3)^2 + (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1)^2$, $\mu(G)$ - міра Лебега області G .

Ця лема випливає з Лемми 8. Повне її доведення наведено в додатку Б3.

4.3.3 Локальні екстремуми енергетичних функцій

Твердження 6 Нехай $p(x, t) = c|\tilde{A}x - x|$,

$$\tilde{t} = \min\{t > 0 : B_t = (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}, tc_y, tc_z) \in G\}$$

та виконуються умови:

$$\forall z \in G : \rho(B_s, z) \geq \rho(B_s, B_{\tilde{t}}), \quad (4.31)$$

$$z_1 \geq \tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t}-1)^2}{4\tilde{t}}. \quad (4.32)$$

Тоді існує такий моменти часу t_{\min} , що $\forall t_{\min} < t < \tilde{t}$ екстремум енергетичних функцій (4.20) досягається в точці $B_{\tilde{t}}$.

Доведення

Покажемо, що $\forall z \in G, \forall s < \tilde{t} : \int_{S_{\varepsilon E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx \leq \int_{S_{\varepsilon E}(B_{\tilde{t}})} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx$.

Розглянемо функцію (4.30). За наслідком з Лема 8 екстремум цієї функції на інтервалі $[t_0, \tilde{t}]$ досягається за межами області G в точці

$B_s = (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s}, sc_y, sc_z)$, $s \in [t_0, \tilde{t}]$. Розглянемо довільну точку $z \in G$ та

момент часу $s \in [t_0, \tilde{t}]$, $f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z)$ та $f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(B_{\tilde{t}})$. Покажемо, що $f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z) \leq f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(B_{\tilde{t}})$. Зауважимо, що $\alpha(s, z) = \rho^2(B_s, z)$, $\alpha(\tilde{t}, B_{\tilde{t}}) = 0$. В силу умов

твердження: $\forall z \in G \quad \rho^2(B_s, z) \geq \rho^2(B_s, B_{\tilde{t}})$ або $\alpha(s, z_1, z_2, z_3) \geq \alpha(s, B_{\tilde{t}})$. Окрім

того, $z_1 \geq \tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t}-1)^2}{4\tilde{t}}$. Тоді

$$\sqrt{\alpha(s, z_1, z_2, z_3)} - (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s} - z_1) \geq \sqrt{\alpha(s, B_{\tilde{t}})} - (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s} - (\tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t}-1)^2}{4\tilde{t}})).$$

Звідси маємо нерівності: $f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z) \leq f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(B_{\tilde{t}})$,

$$\forall z \in G, \forall s < \tilde{t} : \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx \leq \int_{S_{\varepsilon_E}(B)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx,$$

$$\forall z \in G, \forall s < \tilde{t} : \int_0^{\tilde{t}} \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx ds \leq \int_0^{\tilde{t}} \int_{S_{\varepsilon_E}(B_{\tilde{t}})} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx ds.$$

Отже, $E(z, \tilde{t}) \leq E(B_{\tilde{t}}, \tilde{t})$.

Твердження доведене.

В подальшому нам знадобляться наступні позначення:

$$z^1 = (\tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t}-1)^2}{4\tilde{t}} + \varepsilon_1, \tilde{t}c_y + \varepsilon_2, \tilde{t}c_z + \varepsilon_3),$$

$$z^2 = (s_2c_x - \frac{(s_2-1)^2}{4s_2} - \Delta + \varepsilon_1, s_2c_y + \varepsilon_2, s_2c_z + \varepsilon_3),$$

$\tilde{t} \leq s_2 < T$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - деякі достатньо малі числа, такі що

$$z^2 \in S_{\varepsilon_E}(s_2c_x - \frac{(s_2-1)^2}{4s_2} - \Delta(s_2), s_2c_y, s_2c_z), z^1 \in S_{\varepsilon_E}(\tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t}-1)^2}{4\tilde{t}}, \tilde{t}c_y, \tilde{t}c_z),$$

$\Delta(s_2)$ - таке додатне число, що $z^2 \in G$,

$$\tilde{t} = \min \{ t > 0 : B_t = (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}, tc_y, tc_z) \in G \},$$

$$\alpha(t, z_1, z_2, z_3) = (t^2 c_y - tz_2)^2 + (t^2 c_z - tz_3)^2 + (t^2 c_x - \frac{(t-1)^2}{4} - tz_1)^2,$$

$$\beta(t, z_1, z_2, z_3) = \sqrt{\alpha(t, z_1, z_2, z_3)} - (t^2 c_x - \frac{(t-1)^2}{4} - tz_1),$$

$$\beta(t, z_1) = (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1).$$

Твердження 7 Нехай швидкість поширення випромінювання в просторі

$v(x) = c|\tilde{A}x - x|$, та виконуються умови:

$$\forall z \in G \quad \rho(B_s, z) \geq \rho(B_s, B_{\tilde{t}}), \quad (4.33)$$

$$z_1 \geq \tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t}-1)^2}{4\tilde{t}}, \quad (4.34)$$

$$\forall t > 0 : \forall s_2 > \tilde{t}$$

$$g(t, s_2) = \frac{\alpha(\tilde{t} + t, z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(\tilde{t} + t, z_1^1, z_2^1, z_3^1)}{\alpha(s_2 + t, z_1^2, z_2^2, z_3^2)\beta(s_2 + t, z_1^2, z_2^2, z_3^2)} \leq 1. \quad (4.35)$$

Тоді локальний екстремум енергетичної функцій (4.20) досягається в точці $B_{\tilde{t}}$ при будь-яких значеннях $t \in [0, T]$, де $T = \min\{T_1, T_2\}$,

$$T_1 = \max \{ t : |\tilde{A}^{-1}(t)B_{\tilde{t}} \cap G| \geq |\tilde{A}^{-1}(t)B_s \cap G|, s \geq \tilde{t} \}, \quad (4.36)$$

(тут $|\cdot|$ -потужність множини)

$$T_2 = \max \{ t : \forall s \geq \tilde{t} : g(t, s) \leq 1 \}.$$

Доведення

Покажемо, що $\forall z \in G, \forall T$ таких, що виконуються (4.33-4.36), має місце

$$\text{нерівність: } \int_0^T \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx ds \leq \int_0^T \int_{S_{\varepsilon_E}(B_{\tilde{t}})} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx ds.$$

Без обмеження загальності можемо розглянути точки, що належить площині $P = \{(x, y, z) : z = c_z y / c_y\}$. В силу специфіки функції (4.35), її значення в будь-якій точці z області G в момент часу t більше від її значення в точці, що є проекцією точки z на цю площину. Значення функції $\beta(t, z_1)$ для точки $z = (z_1, z_2, z_3)$ та її проекції на площину однакові, а значення функції $\alpha(t, z_1, z_2, z_3)$ в точці $z = (z_1, z_2, z_3)$ менше, ніж у її проекції на відповідну площину. Дійсно, розглянемо вираз $(tc_y - z_2)^2 + (t^2 c_z - z_3)^2$. Він являє собою квадрат відстані між точками (tc_y, tc_z) та (z_2, z_3) . Але ж (tc_y, tc_z) - це і є параметричне рівняння відповідної площини. Отже, екстремум енергетичної функції досягається у площині $P = \{(x, y, z) : z = c_z y / c_y\}$. В силу аналогічних міркувань можемо стверджувати, що екстремум досягається у області

$$\{(x, y, z) : x \leq tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}, y = tc_y, z = tc_z, t > 0\} \text{ при } c_y > 0.$$

Покажемо, що має місце нерівність: $\int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^2) ds \leq \int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^1) ds$.

Зауважимо, що при досить великих значеннях s може виконатись умова $z^1 \notin \tilde{A}(s)G$ і тоді $f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^1) = 0$. Це стосується і значення $f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^2)$. В цьому випадку без обмеження загальності можемо вважати, що T - таке максимальне значення, при якому $f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^1) \neq 0$. Розглянемо $\int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^1) ds$.

В інтегралі зробимо заміну змінних $s = s(y)$ так, щоб виконувалась умова:

$$f_{\tilde{A}(s(y))\xi_{t_0}}(z^1) s'(y) = f_{\tilde{A}(y)\xi_{t_0}}(z^2).$$

Тоді для функції $s(y)$ отримаємо співвідношення:

$$s'(y) = \frac{|\tilde{A}^{-1}(y)z^2 \cap G| \sqrt{\alpha(s(y), z_1^1, z_2^1, z_3^1) \beta(s(y), z_1^1, z_2^1, z_3^1)}}{|\tilde{A}^{-1}(s(y))z^1 \cap G| \sqrt{\alpha(y, z_1^2, z_2^2, z_3^2) \beta(y, z_1^2, z_2^2, z_3^2)}} \quad (4.37)$$

Маємо:

$$\int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^1) ds = \int_{s^{-1}(0)}^{s^{-1}(T)} f_{\tilde{A}(s(y))\xi_{t_0}}(z^1) s'(y) dy.$$

Нехай $s(0) = 0$ і, крім того, $|s'(y)| < \infty$ (можна навести приклади таких значень параметрів системи, коли відповідні умови дійсно виконуються).

Відмітимо, що $s^{-1}(0) = 0$. Тоді для порівняння інтегралів $\int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^2) ds$ та

$\int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^1) ds$ досить оцінити лише величину $s^{-1}(T)$. Покажемо, що

$s^{-1}(T) \geq T$. Відмітимо, що $s'(t) \geq 0$ - це впливає з співвідношення (4.49).

Отже, необхідно показати, що виконується нерівність:

$$T \geq s(T). \quad (4.38)$$

Розглянемо величину $s(s_2)$. Відмітимо, що

$$\alpha(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2) = s_2^2((\varepsilon_1 - \Delta)^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2),$$

$$\beta(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2) = \sqrt{s_2^2((\varepsilon_1 - \Delta)^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)} + s_2(\varepsilon_1 - \Delta).$$

$$\text{Тоді } \alpha(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2) \beta(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2) \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \varepsilon_3 \rightarrow 0} 0.$$

А, оскільки, за припущенням, похідна є обмеженою, то повинна виконуватись

$$\text{умова: } \alpha(s(s_2), z_1^1, z_2^1, z_3^1) \beta(s(s_2), z_1^1, z_2^1, z_3^1) \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \varepsilon_3 \rightarrow 0} 0. \quad \text{Аналізуючи вигляд}$$

функцій $\alpha(s(s_2), z_1^1, z_2^1, z_3^1)$ та $\beta(s(s_2), z_1^1, z_2^1, z_3^1)$ легко бачити, що остання

умова може виконуватись лише у випадку, коли $s(s_2) = \tilde{t}$. Отже, при $T = s_2$

$s(s_2) = \tilde{t} \leq s_2$. Нерівність (4.50) виконується. Тоді з врахуванням умови

$|\tilde{A}^{-1}(\tilde{t})z^1 \cap G| \geq |\tilde{A}^{-1}(s_2)z^2 \cap G|$ маємо:

$$s'(s_2) = \frac{|\tilde{A}^{-1}(s_2)z^2 \cap G| \sqrt{\alpha(\tilde{t}, z_1^1, z_2^1, z_3^1) \beta(\tilde{t}, z_1^1, z_2^1, z_3^1)}}{|\tilde{A}^{-1}(\tilde{t})z^1 \cap G| \sqrt{\alpha(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2) \beta(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2)}} < 1.$$

Покажемо, що $\forall t \ s(s_2 + t) \leq \tilde{t} + t$. В силу виконання останньої нерівності маємо: $\exists \Delta > 0 : s(s_2 + \Delta) \leq s(s_2) + \Delta = \tilde{t} + \Delta$. Припустимо, що існує

$y > 0 : s(s_2 + y) > \tilde{t} + y$. Нехай $t_{\max} = \sup\{t : t < y, s(s_2 + t) \leq \tilde{t} + t\}$. Очевидно, що $s(s_2 + t_{\max}) = \tilde{t} + t_{\max}$. Тоді

$$s'(s_2 + t_{\max}) = \frac{|\tilde{A}^{-1}(s_2 + t_{\max})z^2 \cap G| \sqrt{\alpha(\tilde{t} + t_{\max}, z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(\tilde{t} + t_{\max}, z_1^1, z_2^1, z_3^1)}}{|\tilde{A}^{-1}(\tilde{t} + t_{\max})z^1 \cap G| \sqrt{\alpha(s_2 + t_{\max}, z_1^2, z_2^2, z_3^2)\beta(s_2 + t_{\max}, z_1^2, z_2^2, z_3^2)}} < 1.$$

Отже, $\exists \Delta_1 > t_{\max} : s(s_2 + \Delta_1) \leq s(s_2) + \Delta_1 = \tilde{t} + \Delta_1$. Отримали протиріччя. Отже, $\forall t \ s(s_2 + t) \leq \tilde{t} + t$.

Розглянемо $s(t)$ при довільному значенні t . Оскільки ця функція монотонно зростаюча і $s(s_2) = \tilde{t}$, то $s(t) \leq t$ при $t \geq \tilde{t}$. В противному випадку отримаємо протиріччя з тим, що $s(s_2) = \tilde{t}$.

Розглянемо випадок $t < \tilde{t}$. В силу умови (4.45) : $\forall z \in G \ \rho^2(B_s, z) \geq \rho^2(B_s, B_{\tilde{t}})$ або $\alpha(s, z_1, z_2, z_3) / s^2 \geq \alpha(s, B_{\tilde{t}}) / s^2$. В силу умов теорем:

$$z_1 \geq \tilde{t} c_x - \frac{(\tilde{t} - 1)^2}{4\tilde{t}}. \text{Тоді}$$

$$\sqrt{\alpha(s, z_1, z_2, z_3)} - (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s} - z_1) \geq \sqrt{\alpha(s, B_{\tilde{t}})} - (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s} - (\tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t}-1)^2}{4\tilde{t}})).$$

Звідси маємо нерівності: $f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z) \leq f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(B_{\tilde{t}})$,

$$\forall z \in G, \forall s < \tilde{t} : \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx \leq \int_{S_{\varepsilon_E}(B_{\tilde{t}})} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx,$$

$$\forall z \in G : \int_0^{\tilde{t}} \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx ds \leq \int_0^{\tilde{t}} \int_{S_{\varepsilon_E}(B_{\tilde{t}})} f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(x) dx ds.$$

Отже, $E(z, \tilde{t}) \leq E(B_{\tilde{t}}, \tilde{t})$. Твердження доведено.

Розглянемо ще декілька варіантів останнього твердження.

$$\text{Нехай} \quad g(t, s_2, \Delta) = \frac{\alpha(\tilde{t} + t, z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(\tilde{t} + t, z_1^1, z_2^1, z_3^1)}{\alpha(s_2 + t, z_1^2, z_2^2, z_3^2)\beta(s_2 + t, z_1^2, z_2^2, z_3^2)};$$

$s(y)$ - функція, що є розв'язком задачі Коші виду:

$$s'(y) = \frac{\sqrt{\alpha(s(y), z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(s(y), z_1^1, z_2^1, z_3^1)}}{\sqrt{\alpha(y, z_1^2, z_2^2, z_3^2)\beta(y, z_1^2, z_2^2, z_3^2)}},$$

$$s(0) = 0, \tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3) = t\alpha(t, z_1, z_2, z_3), \tilde{\beta}(t, z_1, z_2, z_3) = \sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - t\beta(t, z_1).$$

Твердження 7.1 Нехай швидкість поширення хвилі, що генерується в точці x фазового простору, є постійною і визначається співвідношенням $v(x) = c|\tilde{A}x - x|$, та виконуються умови:

$$\forall z \in G \quad \rho(B_s, z) \geq \rho(B_s, B_{\tilde{t}}), \quad (4.39)$$

$$z_1 \geq \tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t} - 1)^2}{4\tilde{t}}, \quad (4.40)$$

$$|s'(y)| < \infty. \quad (4.41)$$

Тоді локальний екстремум енергетичної функцій (4.20) досягається в точці $B_{\tilde{t}}$ при будь-яких значеннях $t \in [0, T]$, де $T = \min\{T_1, T_2\}$,

$$T_1 = \max\{t : |\tilde{A}^{-1}(t)B_{\tilde{t}}| \geq |\tilde{A}^{-1}(t)B_s|, s \geq \tilde{t}\}, \quad (4.42)$$

(тут $|\cdot|$ -потужність множини)

$$T_2 = \max\{t : \forall s_2 \geq \tilde{t} : g(t, s_2, \Delta) \leq 1\}.$$

Доведення цього твердження аналогічне доведенню попереднього.

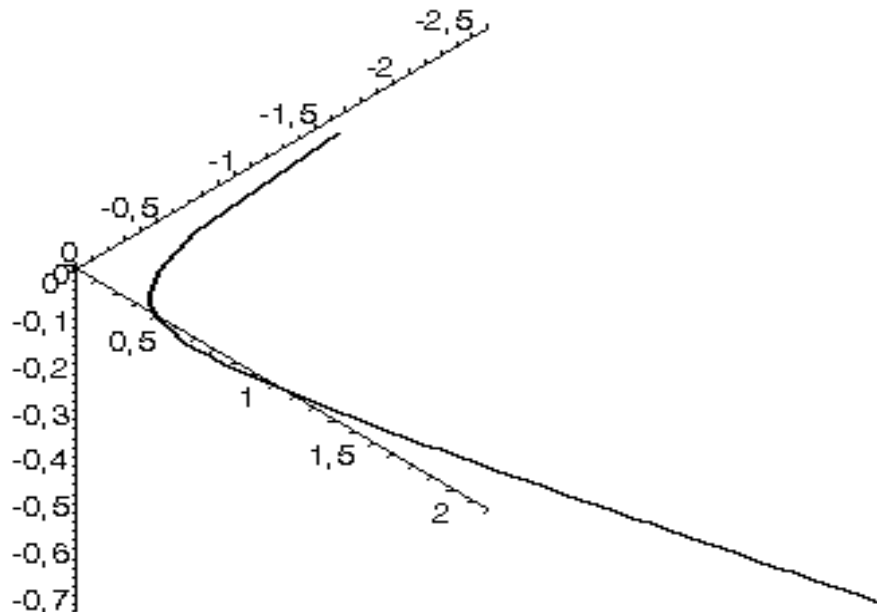


Рис.4.9 Крива $H = \{B_t = (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}, tc_y, tc_z), t > 0\}$

Відзначимо, що умови (4.39)-(4.41) є досить сильними і накладають суттєві обмеження на область G . Звичайно, можна провести детальніший аналіз областей і отримати більш компактні умови. Однак, при цьому доведення твердження дещо ускладниться. Розглянемо детальніше область, яка задається співвідношеннями (4.39)-(4.41). Нехай, наприклад, $c_x = -0.25$, $c_y = 0.24, c_z = -0.12$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.00001$, $\tilde{t} = 0.4$.

Розглянемо криву $H = \{B_t = (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}, tc_y, tc_z), t > 0\}$, що знаходиться у площині $z = c_z y / c_y$. Для згаданих значень параметрів вона зображена на рис. 4.9.

Бачимо, що при малих значеннях t точка B_t прямує до $-\infty$. Із зростанням значення t крива H наближається до початку координат, досягнувши мінімальної відстані при деякому значенні t_0 , після чого віддаляється з часом від початку координат, прямуючи до $+\infty$. Розглянувши функцію $tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}$ бачимо, що її екстремум досягається в точці $\frac{1}{\sqrt{-4c_x + 1}}$.

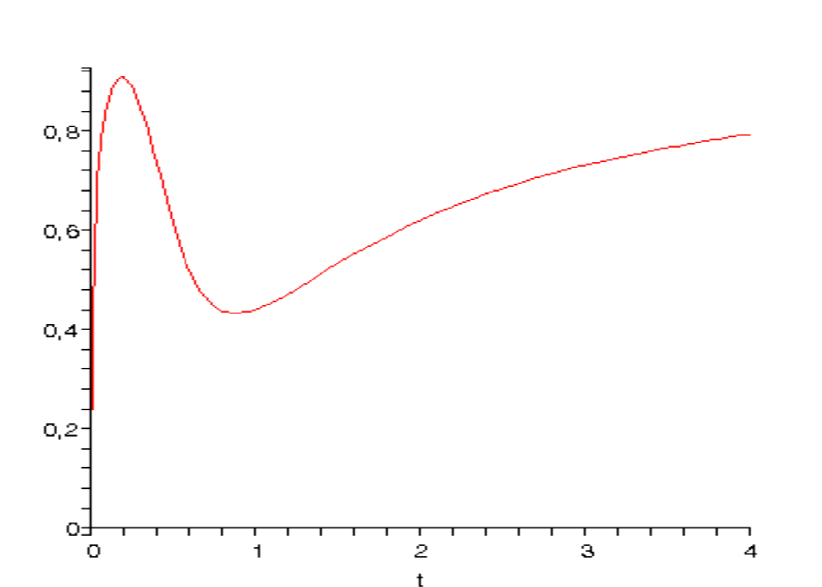


Рис.4.10 Графік функції $g(t, s_2)$

При $c_x = 0.25$ відповідне значення рівне $\frac{1}{\sqrt{-4c_x + 1}} = 0.70710$. При цьому спостерігаємо наступну поведінку функції $g(t, s_2)$ (див. рис.4.10, тут $s_2 = 0.5$).

Дослідження показують, що із зростанням параметра s_2 значення функції на відповідному інтервалі стає все меншим. Отже, при такому значенні параметра c_x існує така область G , що виконується умова обмеженості функції $g(t, s_2, \Delta)$ одиницею. При цьому виконання умов (4.40) та (4.41) очевидне.

Окремо слід розглянути і множини $\tilde{A}^{-1}(t)B_{\tilde{t}}$ та $\tilde{A}^{-1}(t)B_s$. При деяких значеннях t (починаючи з 0) потужність множин $\tilde{A}^{-1}(t)B_{\tilde{t}}$ та $\tilde{A}^{-1}(t)B_s$ однакова і рівна 1. Отже, існують такі значення параметрів c_x, c_y, c_z , та область G , при яких виконуються умови твердження.

Твердження 7.2 Нехай швидкість поширення відокремлених хвиль в просторі $v(x) = c|\tilde{A}x - x|$, $\tilde{t} = \min\{t > 0 : B_t = (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}, tc_y, tc_z) \in G\}$,

та виконуються умови:

$$\forall z \in G \quad \rho(B_s, z) \geq \rho(B_s, B_{\tilde{t}}) \quad (4.43)$$

$$z_1 \geq \tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t}-1)^2}{4\tilde{t}} \quad (4.44)$$

$$f_2(t, s) < 0 \quad \forall s \geq \tilde{t} \quad (4.45)$$

$$c_x < 0 \quad (4.46)$$

Тоді екстремум енергетичної функцій (4.35) досягається в точці $B_{\tilde{t}}$ при будь-яких значеннях $t \in [0, T]$, де

$$T = \max\{t : |\tilde{A}^{-1}(t)B_{\tilde{t}} \cap G| \geq |\tilde{A}^{-1}(t)B_s \cap G|, s \geq \tilde{t}\}, \quad (4.56)$$

(тут $|\cdot|$ -потужність множини).

Доведення цього твердження аналогічне доведенню твердження 8 (див. додаток Б3).

Розглянемо детальніше щільність (4.30). Маємо довільну точку $z \in G$.

Проаналізуємо $\tilde{A}^{-1}(t)z = \{\tilde{A}_-^{-1}(t)z, \tilde{A}_+^{-1}(t)z\}$. Маємо:

$$\tilde{A}_\pm^{-1}(t)(z_1, z_2, z_3)^T = (p_\pm(t, z_1, z_2, z_3), (z_2 - tc_y)/(1 - t + 2tp_\pm(t, z_1, z_2, z_3)), (z_3 - tc_z)/(1 - t + 2tp_\pm(t, z_1, z_2, z_3))) ,$$

$$p_\pm(t, z_1, z_2, z_3) = \frac{t-1}{2t} \pm \frac{1}{\sqrt{2t}} \sqrt{\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - \beta(t, z_1)},$$

$$\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3) = (tc_y - z_2)^2 + (tc_z - z_3)^2 + (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1)^2,$$

$$\beta(t, z_1) = tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1.$$

Легко бачити, що $\lim_{t \rightarrow 0} p_-(t, z_1, z_2, z_3) = -\infty$. Це означає, що $\tilde{A}_-^{-1}(t)z \notin G$ при

малому значенні $t \forall z \in G$.

Розглянемо величину $\lim_{t \rightarrow 0} p_+(t, z_1, z_2, z_3)$.

Маємо:

$$p_+(t, z_1, z_2, z_3) = \frac{t-1}{2t} + \frac{1}{t\sqrt{2}} \sqrt{t\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - t\beta(t, z_1)} =$$

$$= \frac{t-1 + \sqrt{2}\sqrt{t\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - t\beta(t, z_1)}}{2t},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t\beta(t, z_1) = \lim_{t \rightarrow 0} t(tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1) = -\frac{1}{4},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^2 \tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 ((tc_y - z_2)^2 + (tc_z - z_3)^2 + (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1)^2) = \frac{1}{16}.$$

Нехай $\gamma(t, z_1, z_2, z_3) = \sqrt{t\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - t\beta(t, z_1)}$.

$$\text{Тоді } \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t, z_1, z_2, z_3) = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - t\beta(t, z_1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(t^2 \tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)) &= 2(t^2 c_y - z_2 t)(2t c_y - z_2) + 2(t^2 c_z - z_3 t)(2t c_z - z_3) \\ &+ 2(t^2 c_x - \frac{(t-1)^2}{4} - z_1 t)(2t c_x - \frac{(t-1)}{2} - z_1). \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t}(t^2 \tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)) = \frac{1}{2} z_1 + \frac{1}{4}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, z_1, z_2, z_3) = \frac{\frac{\partial}{\partial t}(t^2 \tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3))}{2\sqrt{t^2 \tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)}} - \frac{\partial}{\partial t}(t\beta(t, z_1))}{2\sqrt{t\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - t\beta(t, z_1)}},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t}(t\beta(t, z_1)) = \lim_{t \rightarrow 0} 2t c_x - \frac{(t-1)}{2} - z_1 = \frac{1}{2} - z_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, z_1, z_2, z_3) = \frac{\frac{1}{2} z_1 + \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - z_1)}{2 \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} z_1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} p_+(t, z_1, z_2, z_3) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-1 + \sqrt{2} \sqrt{t\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - t\beta(t, z_1)}}{2t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-1 + \sqrt{2} \gamma(t, z_1, z_2, z_3)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{2} \gamma'(t, z_1, z_2, z_3)}{2} = z_1 + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{A}_+^{-1}(t)(z_1, z_2, z_3)^T = (z_1 + \frac{1}{2}, z_2, z_3)^T.$$

Отже, для того, щоб функція щільності була відмінна від 0 в точці

$$(z_1, z_2, z_3) \in \tilde{A}(t)G \text{ при } t \rightarrow 0, \text{ необхідно, щоб } (z_1 + \frac{1}{2}, z_2, z_3) \in G.$$

В такому випадку функція щільності визначається співвідношенням:

$$f_{\tilde{A}(0)\xi}(z) = f_{\xi}(z_1 + \frac{1}{2}, z_2, z_3).$$

Отже, маємо умову, якій повинна задовольняти область $G: B_{\tilde{\gamma}} + (\frac{1}{2}, 0, 0) \in G$.

Розглянемо детальніше, який характер області, де щільність ненульова. Вигляд щільності залежить від того, яка потужність множини $\tilde{A}^{-1}(t)z \cap G$. Позначимо через G_1 -область, де $|\tilde{A}^{-1}(t)z \cap G|=2$, G_2 - $|\tilde{A}^{-1}(t)z \cap G|=1$. На границі відповідних областей буде мати місце розрив функції щільності. Відмітимо, що $\forall t \exists$ така область G , що області G_1 та G_2 є непорожніми. Дійсно, розглянемо деяке значення t та точку B_t , що належить кривій H

$$H = \{B_t = (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}, tc_y, tc_z), t > 0\}.$$

Нехай, $P_t = \{(x, y, z) : x = \frac{t-1}{2t}\}$ та виконується умова $G \cap P_t \neq \emptyset$,

$(\frac{t-1}{2t}, 0, 0) \in G$. В такому випадку існує таке значення $z = (z_1, z_2, z_3)$ що

$\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - \beta(t, z_1)$ буде достатньо малим і точки

$$(p_{\pm}(t, z_1, z_2, z_3), (z_2 - tc_y)/(1-t + 2tp_{\pm}(t, z_1, z_2, z_3)), (z_3 - tc_z)/(1-t + 2tp_{\pm}(t, z_1, z_2, z_3))) \quad (4.47)$$

будуть обидві належати області G , отже, область $G_1 \neq \emptyset$. В той же час, віддаляючи точку $z = (z_1, z_2, z_3)$ від точки B_t будемо мати зростання відповідних виразів у представленні (4.47) і легко уявити область, коли одна з точок (4.47) вийде з неї, а інша ще залишатиметься в ній.

Розглянемо наступний алгоритм конструювання області G_1 . Починаємо з околу точки $(\frac{t-1}{2t}, 0, 0) \in G$ (виключаючи саму цю точку, де щільність не визначена). Тоді розглядаємо лише ті точки $z = (z_1, z_2, z_3)$ з цього околу, для яких обидва прообрази належать G . Отже, при фіксованому значенні t існує область, для якої $G_2 = \emptyset$.

Нехай значення t таке, що $(\frac{t-1}{2t}, 0, 0) \notin G$, $t < 1$. Тоді можемо підібрати таке значення $z = (z_1, z_2, z_3)$, що $(p_+(t, z_1, z_2, z_3), 0, 0) \in G$, вибираючи великим лише значення z_1 ,

$$p_{\pm}(t, z_1, z_2, z_3) = \frac{t-1}{2t} \pm \frac{1}{t\sqrt{2}} \sqrt{t\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - t\beta(t, z_1)} =$$

$$= \frac{t-1 + \sqrt{2}\sqrt{t\sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - t\beta(t, z_1)}}{2t}.$$

Однак, при цьому $(p_-(t, z_1, z_2, z_3), *, *) \notin G$. Отже, в цьому випадку можемо збудувати таку область G , що $G_1 = \emptyset$. Іншими словами, якщо $G \cap P_t = \emptyset$, причому $t < 1$, то щільність записується у вигляді (2). Тоді умова, що стосується потужностей областей прообразу в Твердженнях 7.1, 7.2, та 8.1, 8.2 з Додатку БЗ може не враховуватись.

4.3.4 Моделювання природних об'єктів спіральної структури

Спіральні структури зустрічаються в природі дуже часто. Форму спіралі мають галактики, туманності, хмарність в циклонах-антициклонах, низка структур в живій природі, спіральні структури утворюються у відомій хімічній реакції Білоусова-Жаботинського. Зауважимо, що траєкторії низки об'єктів самі часто є просторовими спіралями, а поверхні, з якими вони взаємодіють - сферами. В таких випадках відповідні поверхні можемо вважати поверхнями Пуанкаре а відображення Пуанкаре добре апроксимуються операторами спеціального виду. Далі розглядатимемо конфігурацію множини взаємодій солітоноподібних хвиль з поверхнями Пуанкаре як послідовність операторних перетворень вихідної множини.

Виходячи з специфіки підходу, описаного вище, в процесі моделювання будемо на кожній ітерації здійснювати перетворення координат усіх хвиль оператором A . При цьому вважатимемо, що локалізовані хвилі на початковій ітерації розміщені рівномірно у деякій області. Іншими словами, положення хвилі описуватимемо випадковим вектором $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, що є рівномірно-розподіленим в області $G_0 = \{(x, y, z) \in R^3, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$. Під

дією оператора A цей випадковий вектор відображається у вектор $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, де

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + cx, \\ \eta_2 &= 2\xi_1 \xi_2 + cy, \\ \eta_3 &= 2\xi_1 \xi_3 + cz.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Знайдемо сумісну щільність цього вектора. Нехай $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T = \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Як відомо [184], виконується співвідношення:

$$f_\eta(Y) = f_\xi(\Phi^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi^{-1}(Y)),$$

де $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $f_\xi(Y)$ - сумісна щільність вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , $f_\eta(Y)$ - сумісна щільність вектора (η_1, η_2, η_3) , $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ - якобіан відповідного перетворення,

$\Phi^{-1}(Y)$ -обернене перетворення. Однак, в нашому випадку $\Phi^{-1}(Y)$ є неоднозначним і, отже, формула (4.5) не може бути використана для знаходження щільності. Розглянемо співвідношення (4.48). Маємо:

$$\xi_2 = (\eta_2 - cy) / 2\xi_1, \quad \xi_3 = (\eta_3 - cz) / 2\xi_1, \quad \eta_1 = \xi_1^2 - (\eta_2 - cy)^2 / 4\xi_1^2 - (\eta_3 - cz)^2 / 4\xi_1^2 + cx.$$

Звідси

$$4\xi_1^4 + 4\xi_1^2(cx - \eta_1) - (\eta_2 - cy)^2 - (\eta_3 - cz)^2 = 0,$$

$$\xi_1 = \pm \sqrt{\eta_1 - cx + \sqrt{(\eta_1 - cx)^2 + (\eta_2 - cy)^2 + (\eta_3 - cz)^2}} / \sqrt{2}.$$

Як бачимо, отримали 2 різних значення (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , що відрізняються лише знаком. Позначимо

$$d\tau = \sqrt{dy_1 - cx + \sqrt{(dy_1 - cx)^2 + (dy_2 - cy)^2 + (dy_3 - cz)^2}} / \sqrt{2}.$$

Тоді,

$$\begin{aligned}P\{\eta_1 \in dy_1, \eta_2 \in dy_2, \eta_3 \in dy_3\} &= P\{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + cx \in dy_1, 2\xi_1 \xi_2 + cy \in dy_2, 2\xi_1 \xi_3 + cz \in dy_3\} = \\ &= P\{\xi_1 \in d\tau, \xi_2 \in dy_2 - cy / 2d\tau, \xi_3 \in dy_3 - cz / 2d\tau\} + \\ &+ P\{\xi_1 \in -d\tau, \xi_2 \in cy - dy_2 / 2d\tau, \xi_3 \in cz - dy_3 / 2d\tau\}.\end{aligned}$$

Враховуючи перетворення масштабу, що описується модулем відповідного якобіана та відому сумісну щільність вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) можемо отримати :

$$f_\eta(Y) = f_\xi(\Phi_+^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_+^{-1}(Y)) + f_\xi(\Phi_-^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_-^{-1}(Y)), \quad (4.49)$$

де

$$\Phi_+^{-1}(Y) = \begin{pmatrix} \tau \\ (y_2 - cy) / 2\tau \\ (y_2 - cy) / 2\tau \end{pmatrix}, \quad \Phi_-^{-1}(Y) = \begin{pmatrix} -\tau \\ -(y_2 - cy) / 2\tau \\ -(y_2 - cy) / 2\tau \end{pmatrix},$$

$$\tau = \frac{(y_1 - cx + ((y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2)^{1/2})^{1/2}}{2^{1/2}}.$$

Відмітимо, що при перетворенні вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , компоненти якого мають рівномірний розподіл на інтервалі $[-1, 1]$, формула (4.24) перетворюється у наступну:

$$f_\eta(Y) = 2f_\xi(\Phi_+^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_+^{-1}(Y)). \quad (4.50)$$

Проводячи прості операції диференціювання, які опустимо через громіздкість викладок, отримуємо:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_+^{-1}(Y)) = \frac{8\sqrt{\alpha}\sqrt{y_1 - cx + \sqrt{\alpha}}}{\sqrt{2}}, \text{ де } \alpha = (y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2.$$

Тоді, за співвідношенням (4.50),

$$\begin{aligned} f_\eta(Y) &= 2f_\xi(\Phi_+^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_+^{-1}(Y)) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32\sqrt{(y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2} \sqrt{y_1 - cx + \sqrt{(y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2}}}. \end{aligned}$$

Аналізуючи (4.50), отримуємо співвідношення для щільності вектора $A^n \bar{\xi}$ у вигляді :

$$\begin{aligned} f_{A\eta}(y_1, y_2, y_3) &= 4f_\eta(y_1, y_2, y_3)(f_\eta(\tau, (y_2 - cy) / 2\tau, (y_3 - cz) / 2\tau) + \\ &+ f_\eta(-\tau, -(y_2 - cy) / 2\tau, -(y_3 - cz) / 2\tau)), \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$f_{A^{n+1}\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3) = 4f_{A\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3)(f_{A^n\bar{\xi}}(\tau, (y_2 - cy) / 2\tau, (y_3 - cz) / 2\tau) + f_{A^n\bar{\xi}}(-\tau, -(y_2 - cy) / 2\tau, -(y_3 - cz) / 2\tau)).$$

При цьому необхідно визначити область, у якій щільність визначається за співвідношенням (4.51) і область, де щільність є 0.

Щільність вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) є ненульовою на множині $G_0 = \{(x, y, z) \in R^3, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$, щільність вектора $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ – у області

$$G_1 = \{(x^2 - y^2 - z^2 + cx, 2xy + cy, 2xz + cz), (x, y, z) \in G_0 / (cx, cy, cz)\}.$$

Аналогічно, щільність вектора $A^n\bar{\xi}$ є ненульовою у області $G_n = \{(x^2 - y^2 - z^2 + cx, 2xy + cy, 2xz + cz), (x, y, z) \in G_{n-1}\}$.

Отже, отримуємо щільність у вигляді:

$$f_{\bar{\eta}}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{32\sqrt{(y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2} \sqrt{y_1 - cx + \sqrt{(y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2}}}, & (y_1, y_2, y_3) \in G_1, \\ 0, & (y_1, y_2, y_3) \notin G_1. \end{cases}$$

$$f_{A^2\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 4f_{A\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3)(f_{A\bar{\xi}}(\tau, (y_2 - cy) / 2\tau, (y_3 - cz) / 2\tau) + f_{A\bar{\xi}}(-\tau, -(y_2 - cy) / 2\tau, -(y_3 - cz) / 2\tau)), & \text{якщо } (y_1, y_2, y_3) \in G_2, \\ 0, & \text{якщо } (y_1, y_2, y_3) \notin G_2. \end{cases}$$

$$f_{A^{n+1}\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 4f_{A\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3)(f_{A^n\bar{\xi}}(\tau, (y_2 - cy) / 2\tau, (y_3 - cz) / 2\tau) + f_{A^n\bar{\xi}}(-\tau, -(y_2 - cy) / 2\tau, -(y_3 - cz) / 2\tau)), & \text{якщо } (y_1, y_2, y_3) \in G_{n+1}, \\ 0, & \text{якщо } (y_1, y_2, y_3) \notin G, \end{cases}$$

$$\tau = \frac{(y_1 - cx + ((y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2)^{1/2})^{1/2}}{2^{1/2}}.$$

Уточнимо області G_i . Необхідно врахувати той факт, що в силу специфіки оператора A у формуванні спіральної структури беруть участь лише ті точки, що потрапляють у область збіжності послідовності Ax_n . Інші

точки просто “виносяться” з області G_0 під дією оператора A . Іншими словами, в процесі утворення результуючої структури бере участь лише множина точок, що утворює басейн притягання відповідної нерухомої точки, який обмежений відповідною множиною Жюліа. Позначимо цю множину через \mathfrak{M} .

Очевидно, що можна було б зразу розглядати не область G_0 , а область \mathfrak{M} . Тобто розглянути вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , що є рівномірно розподілений у області \mathfrak{M} . Тоді щільність вектора (η_1, η_2, η_3) , очевидно, буде мати вигляд:

$$f_{\eta}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4\mu(\mathfrak{M})\sqrt{(y_1 - \alpha)^2 + (y_2 - \gamma)^2 + (y_3 - \zeta)^2} \sqrt{y_1 - \alpha + \sqrt{(y_1 - \alpha)^2 + (y_2 - \gamma)^2 + (y_3 - \zeta)^2}}}, & (y_1, y_2, y_3) \in \mathfrak{M} \\ 0, & (y_1, y_2, y_3) \notin \mathfrak{M} \end{cases}$$

де $\mu(\mathfrak{M})$ -міра Лебега 3-вимірної (чи n -вимірної) множини Жюліа.

В такому випадку очевидно, будуть мати місце співвідношення для щільностей, у яких в якості області G_0 виступає множина \mathfrak{M} .

Відмітимо, що в процесі моделювання утворення необхідно врахувати факт відкритості системи. Іншими словами, в систему ззовні можуть надходити солітони або вони можуть постійно утворюватись. Нехай $g(y_1, y_2, y_3)$ - деяка функція щільності, яка описує характер розподілу хвиль, що з'являються у області (далі у відповідних моделюючих програмах цей розподіл вважається рівномірним). Позначимо щільність розподілу хвиль на ітерації i через $f_i(y_1, y_2, y_3)$. Тоді процес моделювання результуючої структури можемо зобразити у вигляді:

$$f_0(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{\mu(\mathfrak{M})}, \quad f_n(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{n} (g(y_1, y_2, y_3) + \sum_{i=1}^n f_{A^i \bar{z}}(y_1, y_2, y_3)).$$

Тут вважаємо, що на кожному етапі в системі утворюється стільки солітоноподібних хвиль, скільки їх було на початковому етапі моделювання.

Звичайно, що відповідні нормуючі коефіцієнти можна вибирати по-різному, враховуючи інтенсивність їх утворення на різних етапах:

$f_n(y_1, y_2, y_3) = \alpha_0 g(y_1, y_2, y_3) + \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{A_i^{\bar{\xi}}}(y_1, y_2, y_3)$ де α_i - відповідні нормуючі коефіцієнти.

На рис. 4.11-4.12 зображено графіки щільностей $f_\eta(y_1, y_2, y_3)$ $f_{A_\eta}(y_1, y_2, y_3)$ в області, що перетинається площиною $z = c_z y / c_y$. Легко показати, що саме така площина є площиною, де утворюється відповідна спіральна структура.

Лема.11 n -та точка позитивної напівтраєкторії Жюліа $Or^+(cx, cy, cz)$ є точкою, де функція щільності $f_{A_\eta}(y_1, y_2, y_3)$ рівна нескінченності.

Будемо доводити цей факт методом математичної індукції по кількості ітерацій перетворень. Очевидно, дане твердження має місце для функції

$$f_\eta(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4\mu(\mathfrak{M})\sqrt{(y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2} \sqrt{y_1 - cx + \sqrt{(y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2}}, & (y_1, y_2, y_3) \in \mathfrak{M} \\ 0, & (y_1, y_2, y_3) \notin \mathfrak{M} \end{cases}$$

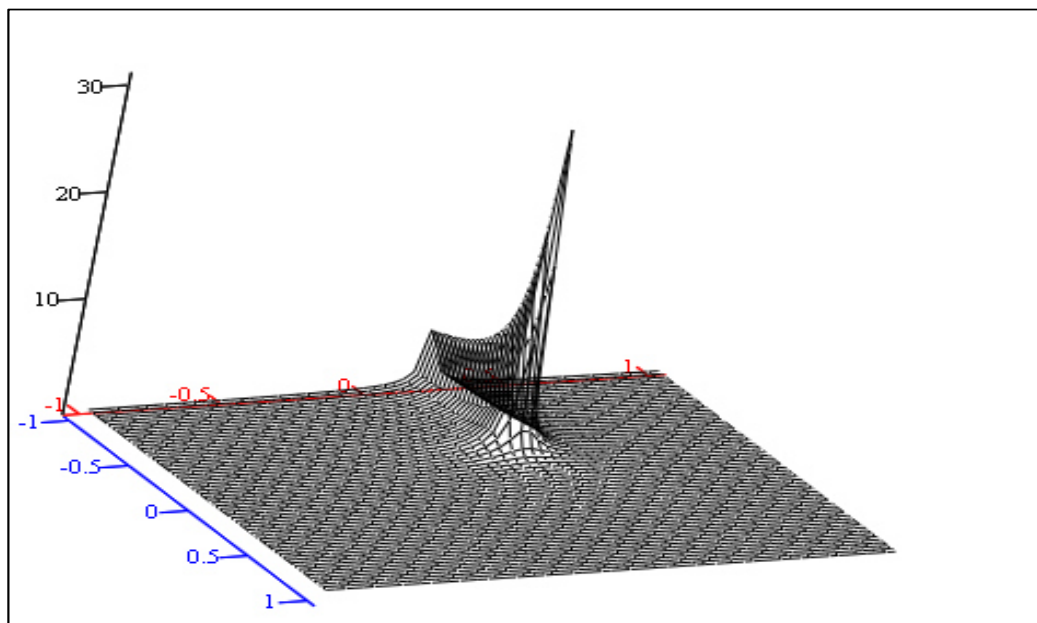


Рис.4.11. Щільність $f_\eta(y_1, y_2, y_3)$ на площині $z = c_z y / c_y$.

Точка (cx, cy, cz) є стартовою точкою позитивної напівтраєкторії і, очевидно, задовольняє твердження.

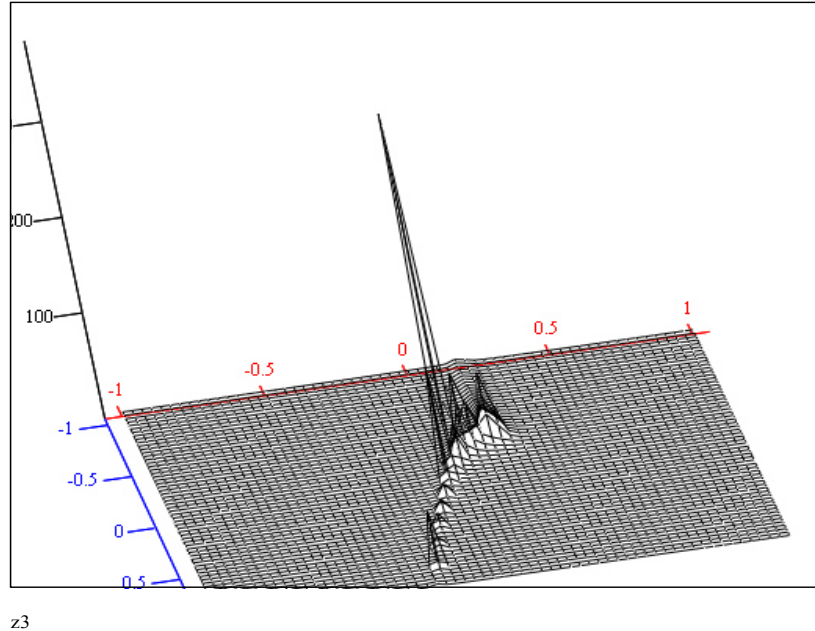


Рис.4.12. Щільність $f_{A\eta}(y_1, y_2, y_3)$ у площині $z = c_z y / c_y$.

Розглянемо функцію

$$f_{A^2\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 4f_{A\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3)(f_{A\bar{\xi}}(\tau, (y_2 - cy)/2\tau, (y_3 - cz)/2\tau) + \\ + f_{A\bar{\xi}}(-\tau, -(y_2 - cy)/2\tau, -(y_3 - cz)/2\tau)), \\ \text{якщо } (y_1, y_2, y_3) \in G_2, \\ 0, \text{якщо } (y_1, y_2, y_3) \notin G_2. \end{cases}$$

Легко бачити, що особливості виникають в точках, коли виконується рівність:

$$(\tau - cx)^2 + ((y_2 - cy)/2\tau - cy)^2 + ((y_3 - cz)/2\tau - cz)^2 = 0,$$

$$(-\tau - cx)^2 + (-(y_2 - cy)/2\tau - cy)^2 + (-(y_3 - cz)/2\tau - cz)^2 = 0.$$

Звідси

$$\tau = \pm cx, (y_2 - cy)/2\tau = \pm cy, (y_3 - cz)/2\tau = \pm cz. \quad (4.52)$$

Однак, оскільки

$$\Phi_+^{-1}(Y) = \begin{pmatrix} \tau \\ (y_2 - cy)/2\tau \\ (y_2 - cy)/2\tau \end{pmatrix}, \quad \Phi_-^{-1}(Y) = \begin{pmatrix} -\tau \\ -(y_2 - cy)/2\tau \\ -(y_2 - cy)/2\tau \end{pmatrix},$$

то розв'язком рівнянь (4.52) є точка $Y = (y_1, y_2, y_3) = \Phi(cx, cy, cz)$, тобто друга точка позитивної напівтраєкторії Жюліа.

Припустимо, що твердження вірне для деякого n . Покажемо, що воно має місце і для $n+1$. Маємо:

$$f_{A^{n+1}\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 4f_{A\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3)(f_{A^n\bar{\xi}}(\tau, (y_2 - cy) / 2\tau, (y_3 - cz) / 2\tau) + \\ + f_{A^n\bar{\xi}}(-\tau, -(y_2 - cy) / 2\tau, -(y_3 - cz) / 2\tau)), \\ \text{якщо } o(y_1, y_2, y_3) \in G_{n+1}, \\ 0, \text{ якщо } o(y_1, y_2, y_3) \notin G. \end{cases}$$

Легко бачити, що рівняння (4.52) виконуються, якщо замість y_1, y_2, y_3 підставити n -ту по порядку точку послідовності $Or^+(c_x, c_y, c_z)$. Зауважимо, що відповідні точки позитивної напівтраєкторії належать областям G_i за їх означенням. Твердження доведене.

Наслідок. Всі точки позитивної напівтраєкторії Жюліа $Or^+(cx, cy, cz)$, що належать множині G_i , є особливими точками функції щільності $f_{A^n\bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3)$.

Відмітимо, що інших особливих точок функція щільності не має.

Доведені твердження про екстремум енергетичних функцій показують, що екстремум енергетичної функції (4.20) досягається у точці B_i - першій точці дотику області G та кривої виду:

$$H = \{B_i = (tcx - \frac{(t-1)^2}{4t}, tcy, tcz), t > 0\}. \text{ Причому важливо те, що відповідний}$$

максимум існує на протязі деякого часового інтервалу (можна навести приклади, коли він існує постійно).

Очевидно, що наявність області, де зосереджується випромінювання точок динамічної системи, може здійснювати вплив на характер руху в цій області. При цьому суттєвою є інтерпретація відповідного випромінювання та самої динамічної системи.

Очевидно, що можемо розглядати G_i як дискретну множину, так і таку, що має потужність континуум. Відповідна динамічна система може

моделювати рухоме суцільне середовище (вода, газ, тверде тіло), у якому можуть виникати хвилі. Якщо, наприклад, мова йде про хвилі густини, то наявність точки екстремуму енергетичної функції, яка існує певний час, означатиме стоячу хвилю, певне збурення густини. Проходження солітоноподібної хвилі через область збурення густини, очевидно, змінює його траєкторію, вона відхиляється.

В той же час певних змін набуватиме і сам закон руху. Тоді рівняння руху, що визначається оператором X динамічної системи (4.28) необхідно уточнити, ввівши деяку коректуючу вектор-функцію $\mu(t, x(t))$:

$$x'(t) = f(x(t), t) + \mu(t, x(t)). \quad (4.53)$$

Зауважимо, що вектор-функція $\mu(t, x(t))$ завжди буде направлена від точки $x(t)$ до найближчої точки екстремуму енергетичної функції а модуль її визначатиме силу взаємодії. Таким чином, стояча хвиля матиме деякий фокусуєчий ефект: в околі її максимуму матиме місце відхилення відокремлених хвиль. А це може призвести до утворення нових точок екстремуму енергетичних функцій.

Отже, виходячи з описаних вище підходів, в процесі моделювання будемо описувати не всі траєкторії відокремлених хвиль, а лише їх взаємодію з поверхнями Пуанкаре, що задаватимуться відповідними операторними перетвореннями, а саме розглянемо наступну процедуру. Нехай маємо деяку множину точок, на які одночасно діє оператор, який визначається співвідношенням (4.17). Іншими словами, розглядатимемо одночасно множину позитивних напівтраєкторій для різних стартових точок, що розподілені рівномірно в деякій області. Будемо розглядати їх проекції на площини XOY , YOZ та XOZ . Результати зображені на рис. 4.14. , де можна прослідкувати утворення множини точок, що має спіральну структуру у динаміці в процесі зростання кількості ітерацій. Як бачимо, проекція на площину XOZ є прямою, отже вся множина зосереджена у деякій площині,

рівняння якої легко знайти: $\frac{z}{y} = \frac{cz}{cy}$.

Аналогічні результати отримуємо, розглядаючи оператор $A(t)$. На рис. 4.14 представлені результати моделювання при 29 ітерацій та значенні параметрів (-0.63, 0.16). Зауважимо, що структури, які зображені на рис.4.13-4.14 нагадують морфологічну структуру спіральних галактик [195]. Розглянемо підхід, який дозволяє сформувати множину спіральної структури, яка максимально наближає природні об'єкти, наприклад, морфологічну структуру спіральної галактики, що розглядається в її видимому діапазоні.

Позначимо через $\tilde{\Gamma}(A, G, G_0, I, n)$ множину, яка утворюється на основі розглянутої вище процедури за допомогою деякого оператора A , де G_0 - початкова множина точок в області G , I -закон надходження нових елементів в систему, n - кількість ітерацій.

Нехай маємо деяку множину точок в R^3 , що має "рукавну" структуру, а саме $\Gamma = \bigcup_{i=0}^m D_i$, де D_0 - центр, D_1, D_2, \dots, D_m - „рукави”.

Розглянемо деяку метрику. Нехай $\rho(D_1, D_2) = \int \inf_{D_1 y \in D_2} \rho(x, y) dx$

або

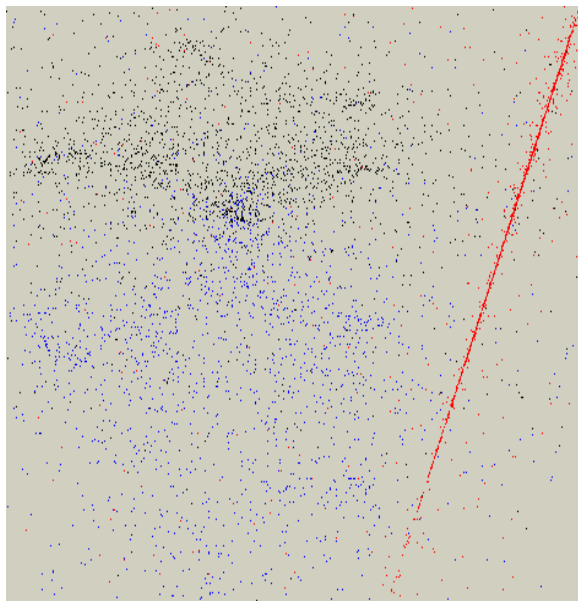
$$\rho(D_1, D_2) = \sup_{x \in D_1} \inf_{y \in D_2} \rho(x, y), \text{ де } \rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Тоді легко отримати співвідношення для оцінки параметрів cx, cy, cz у випадку вибору оператора виду (4.16):

$$\int_{D_1} (\rho(Ax, D_2) + \rho(A^2x, D_3) + \dots + \rho(A^{m-1}x, D_m) + \rho(A^m x, D_1)) dx \rightarrow \min_{(cx, cy, cz)} \quad (4.55)$$

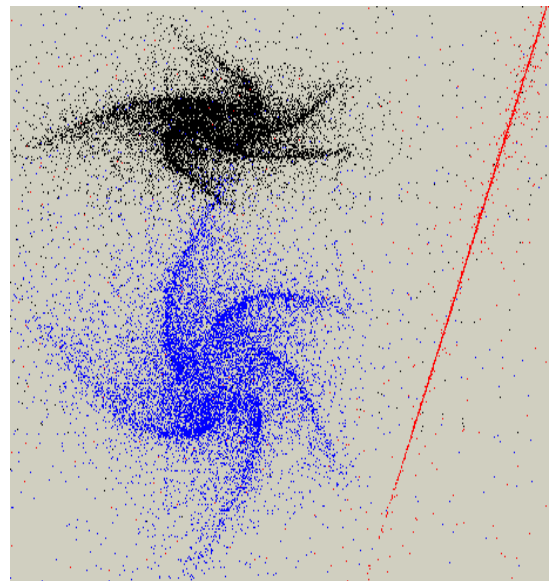
$$\text{де } \rho(y, D) = \inf_{x \in D} \|y - x\|.$$

Якщо D_1 та D_2 - дискретні множини, що містять скінчену кількість елементів, то $|D_1| = n_1$, $|D_2| = n_2$, $\rho(D_1, D_2) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} \min_{y \in D_2} \rho(x_i, y)$.



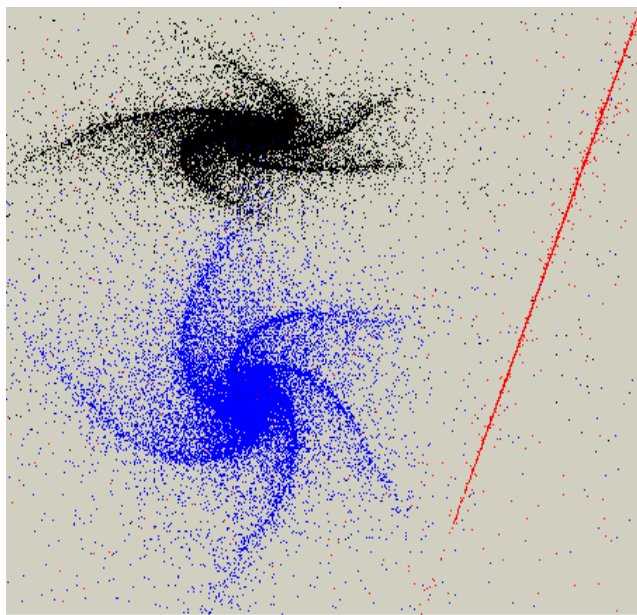
проекція на X0Y Xc=0,35 проекція на Y0Z Yc=-0,23 Zc=0,24 Ітерацій 20 проекція на X0Z

а)



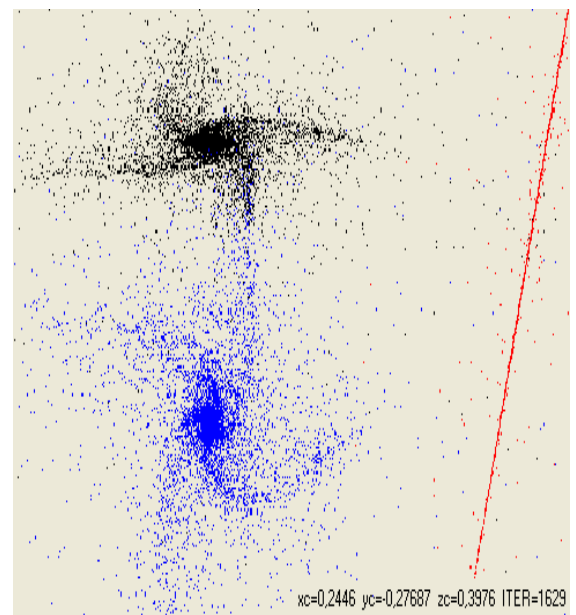
проекція на X0Y Xc=0,35 проекція на Y0Z Yc=-0,23 Zc=0,24 Ітерацій 160 проекція на X0Z

б)



проекція на X0Y Xc=0,35 проекція на Y0Z Yc=-0,23 Zc=0,24 Ітерацій 305 проекція на X0Z

в)



xс=0,2446 yc=-0,27687 zс=0,3976 ITER=1629

г)

Рис. 4.13. Формування спіральної структури під дією оператора (4.23)

а) кількість ітерацій-20, б) кількість ітерацій-160, в) кількість ітерацій-305 ,
г) випадок початкових значень $(0.24, -0.27, 0.39)$, кількість ітерацій-1629

Отже, стоїть завдання: знайти таку множину Γ^* , що $\rho(\Gamma, \Gamma^*) = \inf_{\hat{\Gamma}} \rho(\Gamma, \hat{\Gamma})$. Будемо шукати множину Γ^* у вигляді: $\Gamma^* = \{y : y = A^{n^*} x, x \in G_0\}$, де G_0 – деяка початкова множина, A – деякий оператор, $n^* \in N$ – константа.

Оператор A можемо вибрати в даному випадку у вигляді (4.16), де cx, cy, cz – невідомі параметри.

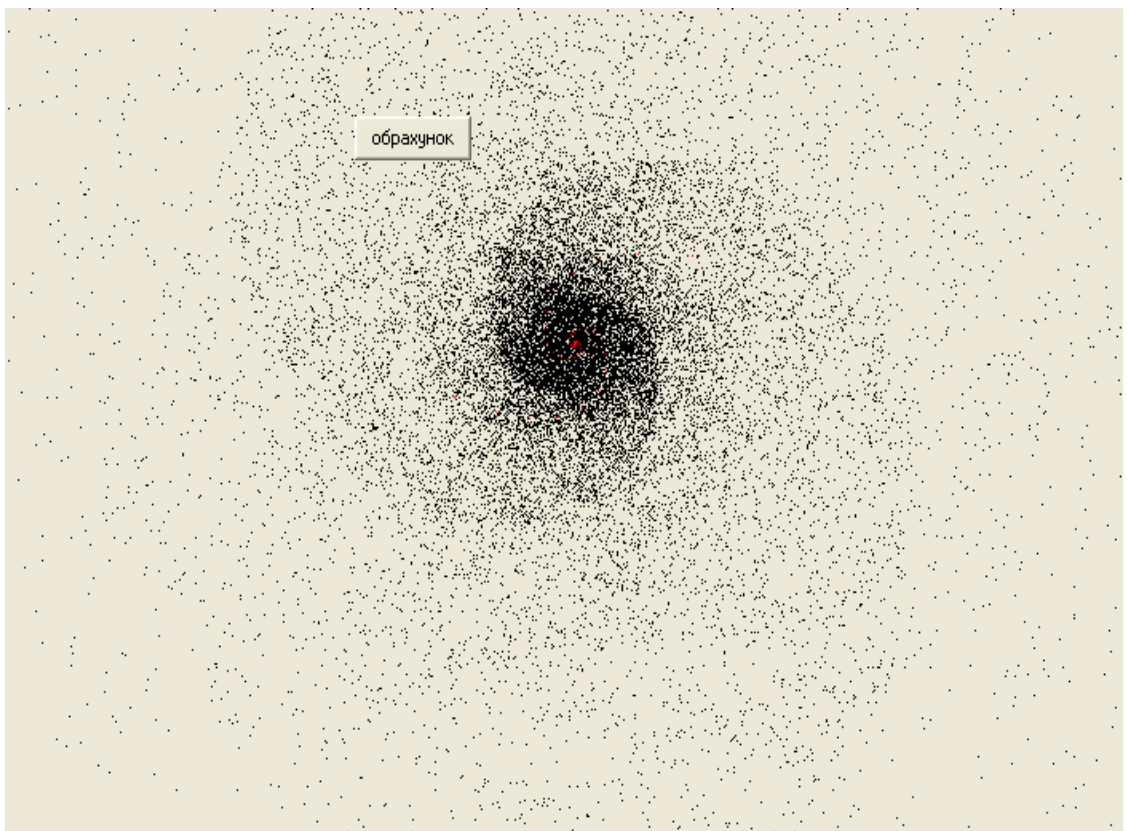


Рис. 4.14. Результати моделювання при значеннях параметрів (-0.63, 0.16)

Будемо вибрати оператор так, щоб виконувались співвідношення:

$$\begin{aligned} \rho(A(D_0 \cup D_1), D_0 \cup D_2) &\rightarrow \min_A \\ \rho(A(D_0 \cup D_2), D_0 \cup D_3) &\rightarrow \min_A \\ \dots & \end{aligned} \tag{4.54}$$

Будемо вважати, що області $D_i, i = \overline{1, m}$ - дискретні і скінченні множини у просторі R^2 . В якості функції $\rho(y, D)$ зручно вибрати наступну:

$$\rho(y, D) = \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^{|D|} \|y - x_i\|^2. \text{Тоді співвідношення (4.52) матиме вигляд:}$$

$$\sum_{i=1}^{|D_1|} \left(\frac{1}{|D_2|} \sum_{i_2=1}^{|D_2|} \|Ax_{i_1}^1 - x_{i_2}^2\|^2 + \dots + \frac{1}{|D_m|} \sum_{i_m=1}^{|D_m|} \|A^{m-1}x_{i_1}^1 - x_{i_m}^m\|^2 + \frac{1}{|D_1|} \sum_{i_m=1}^{|D_1|} \|A^m x_{i_1}^1 - x_{i_m}^m\|^2 \right) \rightarrow \min_{(cx, cy, cz)},$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

В найпростішому випадку двохрукавної структури маємо:

$$D_1 = \{x_1, x_2, \dots\}, D_2 = \{y_1, y_2, \dots\}, x_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3), y_i = (y_i^1, y_i^2, y_i^3).$$

Тоді

$$\frac{1}{|D_1||D_2|} \left(\sum_{i=1}^{|D_1|} \sum_{j=1}^{|D_2|} \|Ax_i - y_j\|^2 + \sum_{i=1}^{|D_1|} \sum_{j=1}^{|D_2|} \|Ay_j - x_i\|^2 \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{|D_1|} \sum_{j=1}^{|D_2|} [((x_i^1)^2 - (x_i^2)^2 - (x_i^3)^2 + cx - y_j^1)^2 + (2x_i^1x_i^2 + cy - y_j^2)^2 + (2x_i^1x_i^3 + cz - y_j^3)^2] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{|D_1|} \sum_{j=1}^{|D_2|} [((y_j^1)^2 - (y_j^2)^2 - (y_j^3)^2 + cx - x_i^1)^2 + (2y_j^1y_j^2 + cy - x_i^2)^2 + (2y_j^1y_j^3 + cz - x_i^3)^2].$$

Враховуючи необхідні умови екстремуму, отримуємо :

$$cx = - \sum_{i=1}^{|D_1|} \sum_{j=1}^{|D_2|} [(x_i^1)^2 - (x_i^2)^2 - (x_i^3)^2 - y_j^1 + (y_j^1)^2 - (y_j^2)^2 - (y_j^3)^2 - x_i^1] / |D_1||D_2|,$$

$$cy = - \sum_{i=1}^{|D_1|} \sum_{j=1}^{|D_2|} (2x_i^1x_i^2 - y_j^2 + 2y_j^1y_j^2 - x_i^2) / |D_1||D_2|,$$

$$cz = - \sum_{i=1}^{|D_1|} \sum_{j=1}^{|D_2|} [2x_i^1x_i^3 - y_j^3 + 2y_j^1y_j^3 - x_i^3] / |D_1||D_2|.$$

Зупинимось детальніше на технології вибору системи координат та площини, де розміщується спіральна структура. При цьому будемо враховувати, що модельна структура завжди знаходиться у площині, що описується рівнянням $y = cyz / cz$ та те, що центр мас модельної структури є нерухомою точкою оператора, що має координати:

$$x_c = 1/2 - 1/2 \sqrt{1/2 - 2c_x + \sqrt{(2c_x - 1/2)^2 + 4(c_y^2 + c_z^2)}},$$

$$y_c = \frac{c_y}{1 - 2x_c}, z_c = \frac{c_z}{1 - 2x_c}.$$

Розглянемо деякі аспекти аналізу вхідних даних. Виберемо систему координат так, щоб початок координат співпадав з центром відповідної структури, а площина - з площиною $z=0$. Тоді повернемо відповідну площину так, щоб вона співпадала з площиною моделі: $y = c_y z / c_z$. При цьому координати точок зміняться наступним чином. Нехай $x[]$ - масив координат вхідних точок, $x[i] = (x[i].x, x[i].y, 0)$. При повороті точка $x[i]$ переходить у точку

з координатами $\tilde{x}[i] = (x[i].x, \frac{x[i].y}{\sqrt{1 + \frac{c_z^2}{c_y^2}}}, \frac{x[i].y c_z}{c_y \sqrt{1 + \frac{c_z^2}{c_y^2}}})$. Далі систему необхідно

перемістити на вектор (x_c, y_c, z_c) . Тоді точка $x[i]$ переходить у точку з координатами :

$$(x[i].x + x_c, \frac{x[i].y}{\sqrt{1 + \frac{c_z^2}{c_y^2}}} + \frac{c_y}{1 - 2x_c}, \frac{x[i].y c_z}{c_y \sqrt{1 + \frac{c_z^2}{c_y^2}}} + \frac{c_z}{1 - 2x_c}).$$

Залишається питання вибору кута повороту. Аналіз показує, що зміна одного з параметрів моделює поворот системи навколо центра. Тому кут повороту можна вибрати довільним: в процесі оцінки параметрів ми зможемо отримати параметри, що моделюватимуть відповідну вхідну систему.

Тоді вираз, який будемо мінімізувати по параметрах c_x, c_y, c_z в такому випадку зазнає суттєвого ускладнення. Отже, невідомі параметри будемо шукати як мінімальні значення функції виду:

$$\sum_{i=1}^{|D_1|} \sum_{j=1}^{|D_2|} \|Ax_i - y_j\|^2 =$$

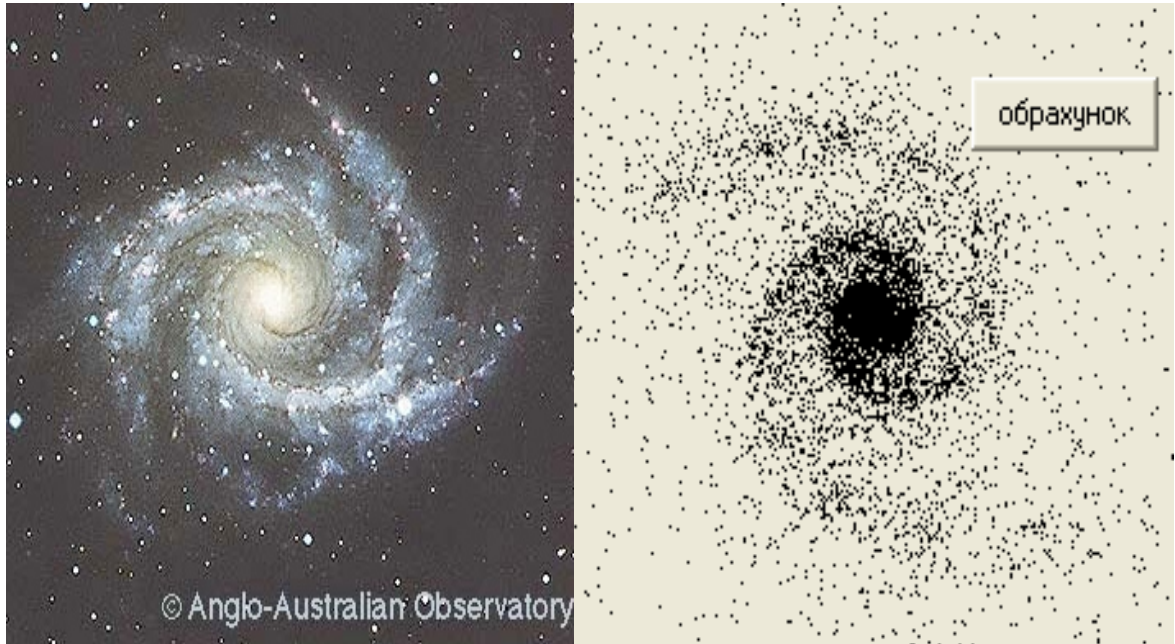
$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{|D_1|} \sum_{j=1}^{|D_2|} \left[\left((x[i].x + x_c)^2 - \left(\frac{x[i].y}{\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{cy}{1 - 2x_c} \right)^2 - \left(\frac{x[i].ycz}{cy\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{cz}{1 - 2x_c} \right)^2 + \right. \right. \\
&+ cx - y[j].x - x_c \left. \right)^2 + \\
&+ \left(2(x[i].x + x_c) \left(\frac{x[i].y}{\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{cy}{1 - 2x_c} \right) + cy - \frac{y[i].y}{\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} - \frac{cy}{1 - 2x_c} \right)^2 + \\
&+ \left(2(x[i].x + x_c) \left(\frac{x[i].ycz}{cy\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{cz}{1 - 2x_c} \right) + cz - \frac{y[i].ycz}{cy\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} - \frac{cz}{1 - 2x_c} \right)^2 \right], \\
&x_c = 1/2 - 1/2\sqrt{1/2 - 2cx + \sqrt{(2cx - 1/2)^2 + 4(cy^2 + cz_z^2)}}.
\end{aligned}$$

Знайшовши похідну по параметру cx , отримуємо рівняння:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{|D_1|} \sum_{j=1}^{|D_2|} \left[\left((x[i].x + x_c)^2 - \left(\frac{x[i].y}{\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{cy}{1 - 2x_c} \right)^2 - \left(\frac{x[i].ycz}{cy\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{cz}{1 - 2x_c} \right)^2 + cx - \right. \right. \\
&- y[i].x - x_c \left. \right) \left(1 + \frac{\partial x_c}{\partial cx} \left(2(x[i].x + x_c) - \frac{4(cy^2 + cz^2)}{(1 - 2x_c)^2} \left(\frac{x[i].y}{cy\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{1}{1 - 2x_c} \right) - 1 \right) \right) + \\
&+ \left(2(x[i].x + x_c) \left(\frac{x[i].y}{\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{cy}{1 - 2x_c} \right) + cy - \frac{y[i].y}{\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} - \frac{cy}{1 - 2x_c} \right) \times \\
&\times 2 \frac{\partial x_c}{\partial cx} \left(\frac{x[i].y}{\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{cy}{1 - 2x_c} + 2(x[i].x + x_c - \frac{1}{2}) \frac{cy}{(1 - 2x_c)^2} \right) + \\
&+ \left(2(x[i].x + x_c) \left(\frac{x[i].ycz}{cy\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{cz}{1 - 2x_c} \right) + cz - \frac{y[i].ycz}{cy\sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} - \frac{cz}{1 - 2x_c} \right) \times
\end{aligned}$$

$$\times 2 \frac{\partial x_c}{\partial cx} \left(\frac{x[i].ycz}{cy \sqrt{1 + \frac{cz^2}{cy^2}}} + \frac{cz}{1 - 2x_c} + 2(x[i].x + x_c - \frac{1}{2}) \frac{cz}{(1 - 2x_c)^2} \right) = 0.$$

Аналогічно записуємо інші рівняння. Розв'язавши відповідну систему, знаходимо значення параметрів cx, cy, cz .



а)

б)

Рис.4.15 Модель морфологічної структури галактики NGC2997 а) фото галактики, б) модель морфологічної структури

На рис. 4.15 представлено фотографію спіральної галактики NGC2997 та модель її морфологічної спіральної структури, отриману як результат застосування описаного методу моделювання.

Відповідна модель побудована за допомогою спеціально розробленого програмного забезпечення для моделювання та дослідження спіральних структур. У моделюючій програмі реалізовані зручні можливості вводу даних, підсистема оцінки параметрів моделюючого оператора, підсистема формування та аналізу відповідної структури а також низка методів аналізу моделюючого оператора з точки зору характеру «рукавності» сформованої ним напівтраєкторії Жюліа.

4.4 Висновки

Таким чином, в даному розділі запропоновано метод моделювання послідовностей точок перетину неперервних траєкторій солітоноподібних хвиль з деякими областями фазового простору (поверхнями Пуанкаре), що ґрунтується на використанні операторних перетворень певного виду. Тоді задача дослідження неперервних траєкторій зводиться до аналізу дискретних напівтраєкторій Жюліа. У випадку, коли моделюючий оператор має одну притягуючу нерухому точку, напівтраєкторії Жюліа, що визначаються відповідним оператором, добре описують об'єкти, що мають спіральну структуру. Відповідний підхід впливає з фізичних міркувань, адже в якості поверхонь Пуанкаре, наприклад, можна вибирати області стрімкої зміни густини середовища, у якому рухаються хвилі.

В роботі знайдено необхідні та достатні умови, яким повинні задовольняти моделюючі оператори для апроксимації «рукавів» відповідних позитивних напівтраєкторії Жюліа логарифмічними спіралями. Отримані результати підтверджують можливість розгляду солітоноподібних збурень як одного з можливих фізичних механізмів виникнення спіральних хвиль щільності в суцільних середовищах.

Побудовано нові моделі для опису багатосолітонних взаємодій та вивчення поширення солітоноподібних хвиль у відповідних середовищах, зокрема, динамічні системи з випромінюванням. Введено енергетичні функції для опису солітон-солітонних взаємодій та досліджено низку їх властивостей. Запропоновано метод моделювання множин, що мають спіральну структуру за допомогою операторних перетворень певних класів а також метод оцінки параметрів відповідних операторів.

Створено програму для моделювання морфологічної структури природних об'єктів, що можуть утворюватись за рахунок «солітонних» механізмів.

РОЗДІЛ 5 ВІДОКРЕМЛЕНІ ХВИЛІ В АНІЗОТРОПНИХ ТІЛАХ

Відомо, що багато матеріалів, таких як гірські породи, кристали, біологічні тканини, різноманітні композити, що використовуються в сучасних технологіях, характеризуються суттєвою анізотропією пружних властивостей [163, 212, 289, 311]. Останнім часом особливо актуальним є дослідження анізотропії пружних властивостей для геології, де сформувався окремий фундаментальний напрям дослідження структурно-анізотропної будови земної кори [311].

Відзначимо, що в геології розрізняють 5 рангів анізотропії [334]. Перший ранг – це власне анізотропія мінералів, що утворюють породу. Слід відзначити, що наявність мікротріщин, спайності, дислокацій може суттєво збільшити анізотропію [311,334]. Другий ранг – це структурна анізотропія, що виражається лінійною орієнтацією видовжено-витягнутих мінералів. Третій ранг – це анізотропія переслоювання, пов'язана з чергуванням порід різної генези та потужності. В цьому випадку анізотропія виникає через контраст пружних властивостей в породах слоїв. Четвертий ранг – це тіла, що формують послідовно геологічні формації. П'ятий ранг – групи формацій, що відрізняються просторовими характеристиками та часом утворення. В цьому напрямі проведено величезну кількість експериментальних досліджень, зокрема для мінералів надглибокої Кольської скважини та ін.

Гірські породи на глибинах більше 6 км можуть мати високий ступінь анізотропії пружних властивостей. Наприклад, в роботі [334] вказано, що породи інтервала 8-10 км по розрізу Кольської скважини характеризуються ступенем анізотропії, який досягає 17% і 38% по швидкості поширення поздовжніх та поперечних хвиль відповідно. Пружна анізотропія гірських порід значно впливає на стійкість вертикальних скважин.

Зауважимо, що існує низка робіт, у яких досліджується зв'язок анізотропії з сейсмічною активністю. Зокрема, в роботі [212] показано, що ряд сейсмоактивних областей Вірменії характеризуються значною

анізотропією порід, анізотропія зростає в очагах сейсмічної активності. Це може бути пов'язаним, зокрема, із зростанням палеонапруг в товщі земної кори. Зважаючи на активізацію сейсмічних процесів останнім часом, задачі, пов'язані з вивченням властивостей анізотропних гірських порід є дуже актуальними.

Слід зауважити, що нещодавно було встановлено поширення пульсаційних збурень у гірських породах, відмінних від звичайних сейсмічних хвиль гармонічного типу [86,288]. Зокрема, в роботі [305] вказано, що остання обставина вимагає розробки нових моделей, що ґрунтуються на рівняннях Буссінеска, Кортвега-де Вріза та їх узагальнень. Вказані результати мають дуже важливе значення в контексті досліджень, представлених в даній роботі.

У цьому розділі проводиться аналіз анізотропії пружних тіл, для яких виконується узагальнений закон Гука, з точки зору існування відокремлених структурно-стійких хвиль типу δ -солітонів.

5.1 Аналіз анізотропії пружних властивостей матеріалів з точки зору існування відокремлених хвиль типу δ -солітонів

Розглянемо узагальнену форму закону Гука [274], суть якого полягає в тому, що кожна з 6 компонент напруги є лінійною функцією 6 компонент деформацій. З урахуванням того, що пружна енергія є однозначною функцією деформації, виникає умова симетрії тензора пружних сталих. Тоді закон Гука запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} + c_{14}\varepsilon_{yz} + c_{15}\varepsilon_{zx} + c_{16}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} = c_{12}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} + c_{23}\varepsilon_{zz} + c_{24}\varepsilon_{yz} + c_{25}\varepsilon_{zx} + c_{26}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{zz} = c_{13}\varepsilon_{xx} + c_{23}\varepsilon_{yy} + c_{33}\varepsilon_{zz} + c_{34}\varepsilon_{yz} + c_{35}\varepsilon_{zx} + c_{36}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yz} = c_{14}\varepsilon_{xx} + c_{24}\varepsilon_{yy} + c_{34}\varepsilon_{zz} + c_{44}\varepsilon_{yz} + c_{45}\varepsilon_{zx} + c_{46}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{zx} = c_{15}\varepsilon_{xx} + c_{25}\varepsilon_{yy} + c_{35}\varepsilon_{zz} + c_{45}\varepsilon_{yz} + c_{55}\varepsilon_{zx} + c_{56}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{xy} = c_{16}\varepsilon_{xx} + c_{26}\varepsilon_{yy} + c_{36}\varepsilon_{zz} + c_{46}\varepsilon_{yz} + c_{56}\varepsilon_{zx} + c_{66}\varepsilon_{xy}, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\text{де } \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.2)$$

Розглядаючи зміни напруг на перпендикулярних до осей гранях малого паралелепіпеда

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Для спрощення запису надалі будемо вважати, що $x = x_1, y = x_2, z = x_3$.

Введемо векторний диференціальний оператор виду:

$$\Theta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \right). \quad (5.4)$$

Тоді рівняння руху можемо записати у вигляді:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ((c_{11}, c_{66}, c_{55}, 2c_{16}, 2c_{15}, 2c_{56}), \Theta u) + ((c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{12} + c_{66}, c_{14} + c_{56}, c_{46} + c_{25}), \Theta v) + ((c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{36} + c_{45}), \Theta w), \quad (5.5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = ((c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{66} + c_{12}, c_{56} + c_{14}, c_{25} + c_{46}), \Theta u) + ((c_{66}, c_{22}, c_{44}, 2c_{26}, 2c_{46}, 2c_{24}), \Theta v) + ((c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{36} + c_{45}, c_{23} + c_{44}), \Theta w), \quad (5.6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ((c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{45} + c_{36}), \Theta u) + ((c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{45} + c_{36}, c_{23} + c_{44}), \Theta v) + ((c_{55}, c_{44}, c_{33}, 2c_{45}, 2c_{35}, 2c_{34}), \Theta w). \quad (5.7)$$

Будемо знаходити розв'язки системи (5.5)–(5.7) у вигляді:

$$\begin{pmatrix} u(x_1, x_2, x_3, t) \\ v(x_1, x_2, x_3, t) \\ w(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_u(t) \\ \psi_v(t) \\ \psi_w(t) \end{pmatrix} W(x_1, x_2, x_3, t), \quad (5.8)$$

де $W(x_1, x_2, x_3, t) = e^{\frac{g(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} + \frac{g(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} + \frac{g(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}}$, $g(x)$ - довільна додатня неперервно-диференційовна функція, яка має мінімум точці 0, $g(0) = 0$, $\psi_u(t)$, $\psi_v(t)$,

$\psi_w(t)$ - функції, які визначають компоненти амплітуди відповідного збурення, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - параметри, що визначають локалізацію збурення.

Для спрощення викладок розглянемо випадок: $\psi_u(t) = \psi_u = const$, $\psi_v(t) = \psi_v = const$, $\psi_w(t) = \psi_w = const$, $\rho = const$. Можемо записати очевидні співвідношення:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} W(x_1, x_2, x_3, t) = -W(x_1, x_2, x_3, t) \frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i}; \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\psi_u W(x_1, x_2, x_3, t) \frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \psi_u W(x_1, x_2, x_3, t) \left(\frac{(g'(x_i - \tilde{x}_i(t)))^2}{(\varepsilon_i)^2} - \frac{g''(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \right); \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \psi_u W(x_1, x_2, x_3, t) \frac{g'(x_j - \tilde{x}_j(t))}{\varepsilon_j} \frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i}; \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \psi_u W'_t(x_1, x_2, x_3, t) = \psi_u W(x_1, x_2, x_3, t) G(x_1, x_2, x_3, t), \quad (5.12)$$

де $G(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i=1}^3 \frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i'(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} &= \psi_u (W(x_1, x_2, x_3, t) G(x_1, x_2, x_3, t))'_t = \psi_u W'_t(x_1, x_2, x_3, t) G(x_1, x_2, x_3, t) + \\ &+ \psi_u W(x_1, x_2, x_3, t) G'_t(x_1, x_2, x_3, t) = \psi_u W(x_1, x_2, x_3, t) G^2(x_1, x_2, x_3, t) + \\ &+ \psi_u W(x_1, x_2, x_3, t) \sum_{i=1}^3 \left(\frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i''(t) - \frac{g''(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i'^2(t) \right). \end{aligned}$$

Аналогічні співвідношення отримуємо для функцій $v(x, y, z, t)$ та $w(x, y, z, t)$.

Підставляючи відповідні співвідношення для похідних функцій $u(x, y, z, t)$,

$v(x, y, z, t)$ та $w(x, y, z, t)$ в рівняння (5.5)-(5.7), отримаємо:

$$\rho \psi_u W G^2(x_1, x_2, x_3, t) + \rho \psi_u W \sum_{i=1}^3 \left(\frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i''(t) - \frac{g''(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i'^2(t) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_u W(c_{11}, c_{66}, c_{55}, 2c_{16}, 2c_{15}, 2c_{56}), \tilde{\Theta}) + \\
&+ \psi_v W(c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{12} + c_{66}, c_{14} + c_{56}, c_{46} + c_{25}), \tilde{\Theta}) + \\
&+ \psi_w W(c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{36} + c_{45}), \tilde{\Theta}), \quad (5.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rho\psi_v W G^2(x_1, x_2, x_3, t) + \rho\psi_v W \sum_{i=1}^3 \left(\frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i''(t) - \frac{g''(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i'^2(t) \right) = \\
&+ \psi_v W(c_{66}, c_{22}, c_{44}, 2c_{26}, 2c_{46}, 2c_{24}), \tilde{\Theta}) + \\
&+ \psi_w W(c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{36} + c_{45}, c_{23} + c_{44}), \tilde{\Theta}), \quad (5.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rho\psi_w W G^2(x_1, x_2, x_3, t) + \rho\psi_w W \sum_{i=1}^3 \left(\frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i''(t) - \frac{g''(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i'^2(t) \right) = \\
&= \psi_u W(c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{45} + c_{36}), \tilde{\Theta}) + \\
&+ \psi_v W(c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{45} + c_{36}, c_{23} + c_{44}), \tilde{\Theta}) + \\
&+ \psi_w W(c_{55}, c_{44}, c_{33}, 2c_{45}, 2c_{35}, 2c_{34}), \tilde{\Theta}), \quad (5.15)
\end{aligned}$$

де
$$\tilde{\Theta} = \left(\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}, \frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}, \right. \\
\left. \frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}, \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}, \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}, \right. \\
\left. \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \right).$$

Оскільки розв'язки знаходимо для класу функцій $g(x)$, то в рівняннях (5.13)-(5.15) будемо прирівнювати до нуля всі коефіцієнти, які стоять при усіх похідних функції $g(x)$. Маємо:

$$\begin{aligned}
g''(x_1 - \tilde{x}_1(t)) : -\rho\psi_u \tilde{x}_1'^2(t) &= -c_{11}\psi_u - c_{16}\psi_v - c_{15}\psi_w; \\
g''(x_2 - \tilde{x}_2(t)) : -\rho\psi_u \tilde{x}_2'^2(t) &= -c_{26}\psi_v - c_{66}\psi_u - c_{46}\psi_w; \\
g''(x_3 - \tilde{x}_3(t)) : -\rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t) &= -c_{45}\psi_v - c_{55}\psi_u - c_{35}\psi_w; \\
(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)))^2 : \rho\psi_u \tilde{x}_1'^2(t) &= c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v + c_{15}\psi_w; \\
(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)))^2 : \rho\psi_u \tilde{x}_2'^2(t) &= c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u + c_{46}\psi_w;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)))^2 : \rho \psi_u \tilde{x}_3'^2(t) = c_{45} \psi_v + c_{55} \psi_u + c_{35} \psi_w ; \\
& g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)) g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)) : \\
& 2\rho \psi_u \tilde{x}_1'(t) \tilde{x}_2'(t) = 2c_{16} \psi_u + (c_{12} + c_{66}) \psi_v + (c_{14} + c_{56}) \psi_w ; \\
& g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)) g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)) : \\
& 2\rho \psi_u \tilde{x}_1'(t) \tilde{x}_3'(t) = (c_{13} + c_{55}) \psi_w + 2c_{15} \psi_u + (c_{14} + c_{56}) \psi_v ; \\
& g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)) g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)) : \\
& 2\rho \psi_u \tilde{x}_2'(t) \tilde{x}_3'(t) = 2c_{56} \psi_u + (c_{46} + c_{25}) \psi_v + (c_{36} + c_{45}) \psi_w ; \\
& g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)) : \rho \psi_u W \tilde{x}_1''(t) = 0 ; \\
& g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)) : \rho \psi_u W \tilde{x}_2''(t) = 0 ; \\
& g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)) : \rho \psi_u W \tilde{x}_3''(t) = 0 .
\end{aligned}$$

Тоді для рівняння (5.13) отримуємо співвідношення:

$$\begin{aligned}
& -\rho \psi_u \tilde{x}_1'^2(t) = -c_{11} \psi_u - c_{16} \psi_v - c_{15} \psi_w ; \\
& -\rho \psi_u \tilde{x}_2'^2(t) = -c_{26} \psi_v - c_{66} \psi_u - c_{46} \psi_w ; \\
& -\rho \psi_u \tilde{x}_3'^2(t) = -c_{45} \psi_v - c_{55} \psi_u - c_{35} \psi_w ; \\
& 2\rho \psi_u \tilde{x}_1'(t) \tilde{x}_2'(t) = 2c_{16} \psi_u + (c_{12} + c_{66}) \psi_v + (c_{14} + c_{56}) \psi_w ; \\
& 2\rho \psi_u \tilde{x}_1'(t) \tilde{x}_3'(t) = (c_{13} + c_{55}) \psi_w + 2c_{15} \psi_u + (c_{14} + c_{56}) \psi_v ; \\
& 2\rho \psi_u \tilde{x}_2'(t) \tilde{x}_3'(t) = 2c_{56} \psi_u + (c_{46} + c_{25}) \psi_v + (c_{36} + c_{45}) \psi_w ; \\
& \rho \psi_u W \tilde{x}_1''(t) = 0 ; \\
& \rho \psi_u W \tilde{x}_2''(t) = 0 ; \\
& \rho \psi_u W \tilde{x}_3''(t) = 0 .
\end{aligned}$$

Звідси отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
& \rho \psi_u \tilde{x}_1'^2(t) = c_{11} \psi_u + c_{16} \psi_v + c_{15} \psi_w , \\
& \rho \psi_u \tilde{x}_2'^2(t) = c_{26} \psi_v + c_{66} \psi_u + c_{46} \psi_w , \\
& \rho \psi_u \tilde{x}_3'^2(t) = c_{45} \psi_v + c_{55} \psi_u + c_{35} \psi_w , \\
& 2\rho \psi_u \tilde{x}_1'(t) \tilde{x}_2'(t) = 2c_{16} \psi_u + (c_{12} + c_{66}) \psi_v + (c_{14} + c_{56}) \psi_w , \\
& 2\rho \psi_u \tilde{x}_1'(t) \tilde{x}_3'(t) = (c_{13} + c_{55}) \psi_w + 2c_{15} \psi_u + (c_{14} + c_{56}) \psi_v ,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$2\rho\psi_u\tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = 2c_{36}\psi_u + (c_{46} + c_{25})\psi_v + (c_{36} + c_{45})\psi_w$$

Проводячи аналогічні міркування для рівняння (5.14), отримуємо:

$$\begin{aligned} & \rho\psi_v W G^2(x_1, x_2, x_3, t) + \rho\psi_v W \sum_{i=1}^3 \left(\frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i''(t) - \frac{g''(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i'^2(t) \right) = \\ & = c_{16}\psi_u W \left(\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \right) + c_{26}\psi_u W \left(\frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \right) + c_{45}\psi_u W \left(\frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \right) + \\ & + c_{66}\psi_v W \left(\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \right) + c_{22}\psi_v W \left(\frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \right) + c_{44}\psi_v W \left(\frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \right) + \\ & + c_{56}\psi_w W \left(\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \right) + c_{24}\psi_w W \left(\frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \right) + c_{34}\psi_w W \left(\frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \right) + \\ & + (c_{12} + c_{66})\psi_u W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} + \\ & + (c_{56} + c_{14})\psi_u W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} + (c_{25} + c_{46})\psi_u W \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} + \\ & + 2c_{26}\psi_v W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} + 2c_{46}\psi_v W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} + \\ & + 2c_{24}\psi_v W \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} + (c_{46} + c_{25})\psi_w W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} + \\ & + (c_{36} + c_{45})\psi_w W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} + (c_{23} + c_{44})\psi_w W \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо відповідну систему рівнянь:

$$\rho\psi_v \tilde{x}_1'^2(t) = c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v + c_{56}\psi_w,$$

$$\rho\psi_v \tilde{x}_2'^2(t) = c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v + c_{24}\psi_w,$$

$$\rho\psi_v \tilde{x}_3'^2(t) = c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v + c_{34}\psi_w,$$

$$2\rho\psi_v\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = (c_{12} + c_{66})\psi_u + 2c_{26}\psi_v + (c_{46} + c_{25})\psi_w, \quad (5.17)$$

$$2\rho\psi_v\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{56} + c_{14})\psi_u + 2c_{46}\psi_v + (c_{36} + c_{45})\psi_w,$$

$$2\rho\psi_v\tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{25} + c_{46})\psi_u + 2c_{24}\psi_v + (c_{23} + c_{44})\psi_w.$$

Рівняння (5.15) може бути записане у вигляді:

$$\begin{aligned} & \rho\psi_w(t)WG^2 + \rho\psi_w W \sum_{i=1}^3 \left(\frac{g'(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i''(t) - \frac{g''(x_i - \tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i} \tilde{x}_i'^2(t) \right) = \\ & = c_{15}\psi_u W \left(\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \right) + c_{46}\psi_u W \left(\frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \right) + c_{35}\psi_u W \left(\frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \right) + \\ & + c_{56}\psi_v W \left(\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \right) + c_{24}\psi_v W \left(\frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \right) + c_{34}\psi_v W \left(\frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \right) + \\ & + c_{55}\psi_w W \left(\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \right) + c_{44}\psi_w W \left(\frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \right) + c_{33}\psi_w W \left(\frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \right) + \\ & + (c_{14} + c_{56})\psi_u W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} + (c_{13} + c_{55})\psi_u W \times \\ & \times \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} + (c_{45} + c_{36})\psi_u W \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} + \\ & + (c_{46} + c_{25})\psi_v W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} + \\ & + (c_{36} + c_{45})\psi_v W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} + (c_{23} + c_{44})\psi_v W \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} + \\ & + 2c_{45}\psi_w W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} + 2c_{35}\psi_w W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} + \\ & + 2c_{34}\psi_w W \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}. \end{aligned}$$

Проводячи аналогічні міркування, отримуємо систему:

$$\begin{aligned}
 \rho\psi_w \tilde{x}_1'^2(t) &= c_{15}\psi_u + c_{56}\psi_v + c_{55}\psi_w, \\
 \rho\psi_w \tilde{x}_2'^2(t) &= c_{46}\psi_u + c_{24}\psi_v + c_{44}\psi_w, \\
 \rho\psi_w \tilde{x}_3'^2(t) &= c_{35}\psi_u + c_{34}\psi_v + c_{33}\psi_w, \\
 2\rho\psi_w \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) &= (c_{14} + c_{56})\psi_u + (c_{46} + c_{25})\psi_v + 2c_{45}\psi_w, \\
 2\rho\psi_w \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) &= (c_{13} + c_{55})\psi_u + (c_{36} + c_{45})\psi_v + 2c_{35}\psi_w, \\
 2\rho\psi_w \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) &= (c_{36} + c_{45})\psi_u + (c_{23} + c_{44})\psi_v + 2c_{34}\psi_w.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Таким чином, отримали результуючу систему (5.16)-(5.18), яка визначає компоненти швидкості, амплітуди та співвідношення для пружних сталей, достатні для існування хвилі типу (5.9).

Нехай $\psi_w \neq 0, \psi_v \neq 0, \psi_u \neq 0$.

Тоді з систем (5.16)-(5.18) отримуємо :

$$\begin{cases}
 \tilde{x}_1'(t) = \alpha \sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v + c_{15}\psi_w)/(\rho\psi_u)}, \\
 \tilde{x}_2'(t) = \beta \sqrt{(c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u + c_{46}\psi_w)/(\rho\psi_u)}, \\
 \tilde{x}_3'(t) = \gamma \sqrt{(c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u + c_{35}\psi_w)/(\rho\psi_u)},
 \end{cases} \tag{5.19}$$

$$2\alpha\beta \sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v + c_{15}\psi_w)} \sqrt{(c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u + c_{46}\psi_w)} = 2c_{16}\psi_u + (c_{12} + c_{66})\psi_v + (c_{14} + c_{56})\psi_w,$$

$$2\alpha\gamma \sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v + c_{15}\psi_w)} \sqrt{(c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u + c_{35}\psi_w)} = (c_{13} + c_{55})\psi_w + 2c_{15}\psi_u(t) + (c_{14} + c_{56})\psi_v,$$

$$2\beta\gamma \sqrt{(c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u + c_{46}\psi_w)} \sqrt{(c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u + c_{35}\psi_w)} = 2c_{56}\psi_u + (c_{46} + c_{25})\psi_v + (c_{36} + c_{45})\psi_w,$$

$$2\alpha\beta \sqrt{c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v + c_{56}\psi_w} \sqrt{c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v + c_{24}\psi_w} = (c_{12} + c_{66})\psi_u + 2c_{26}\psi_v + (c_{46} + c_{25})\psi_w,$$

$$\begin{aligned}
2\alpha\gamma\sqrt{c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v + c_{56}\psi_w}\sqrt{c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v + c_{34}\psi_w} &= (c_{56} + c_{14})\psi_u + 2c_{46}\psi_v + \\
&+ (c_{36} + c_{45})\psi_w, \\
2\beta\gamma\sqrt{c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v + c_{24}\psi_w}\sqrt{c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v + c_{34}\psi_w} &= (c_{25} + c_{46})\psi_u + 2c_{24}\psi_v + \\
&+ (c_{23} + c_{44})\psi_w, \\
2\alpha\beta\sqrt{c_{15}\psi_u + c_{56}\psi_v + c_{55}\psi_w}\sqrt{c_{46}\psi_u + c_{24}\psi_v + c_{44}\psi_w} &= (c_{14} + c_{56})\psi_u + \\
&+ (c_{46} + c_{25})\psi_v + 2c_{45}\psi_w, \\
2\alpha\gamma\sqrt{c_{15}\psi_u + c_{56}\psi_v + c_{55}\psi_w}\sqrt{c_{35}\psi_u + c_{34}\psi_v + c_{33}\psi_w} &= (c_{13} + c_{55})\psi_u + \\
&+ (c_{36} + c_{45})\psi_v + 2c_{35}\psi_w, \\
2\beta\gamma\sqrt{c_{46}\psi_u + c_{24}\psi_v + c_{44}\psi_w}\sqrt{c_{35}\psi_u + c_{34}\psi_v + c_{33}\psi_w} &= (c_{36} + c_{45})\psi_u + \\
&+ (c_{23} + c_{44})\psi_v + 2c_{34}\psi_w, \\
\sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v + c_{15}\psi_w) / \psi_u} &= \sqrt{(c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v + c_{56}\psi_w) / \psi_v}, \\
\sqrt{(c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v + c_{56}\psi_w) / \psi_v} &= \sqrt{(c_{15}\psi_u + c_{56}\psi_v + c_{55}\psi_w) / \psi_w}, \\
\sqrt{(c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u + c_{46}\psi_w) / \psi_u} &= \sqrt{(c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v + c_{24}\psi_w) / \psi_v}, \\
\sqrt{(c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v + c_{24}\psi_w) / \psi_v} &= \sqrt{(c_{46}\psi_u + c_{24}\psi_v + c_{44}\psi_w) / \psi_w}, \\
\sqrt{(c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u + c_{35}\psi_w) / \psi_u} &= \sqrt{(c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v + c_{34}\psi_w) / \psi_v}, \\
\sqrt{(c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v + c_{34}\psi_w) / \psi_v} &= \sqrt{(c_{35}\psi_u + c_{34}\psi_v + c_{33}\psi_w) / \psi_w},
\end{aligned} \tag{5.20}$$

де $\alpha \in \{1, -1\}$, $\beta \in \{1, -1\}$, $\gamma \in \{1, -1\}$.

5.2 Аналіз результуючої системи для різних типів сингоній

Як відомо [274, ст.169], в залежності від симетрії кристали поділяють на 7 сингоній: триклінну, моноклінну, ромбічну, тетрагональну, тригональну, гексагональну та кубічну. Для ізотропного тіла виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned}
c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu, c_{23} = c_{31} = c_{12} = \mu, \\
c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) = (\lambda + \mu) / 2,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0. \tag{5.22}$$

Кристали ізотропних тіл мають дві вільні константи λ , μ -константи Ляме.

Для відповідних значень коефіцієнтів система (5.19-5.20) має вигляд:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1'(t) = \alpha \sqrt{c_{11} / \rho}, \\ \tilde{x}_2'(t) = \beta \sqrt{c_{66} / \rho}, \\ \tilde{x}_3'(t) = \gamma \sqrt{c_{55} / \rho}, \\ \\ 2\alpha\beta\sqrt{(c_{11}\psi_u)}\sqrt{(c_{66}\psi_u)} = (c_{12} + c_{66})\psi_v, \\ 2\alpha\gamma\sqrt{(c_{11}\psi_u)}\sqrt{(c_{55}\psi_u)} = (c_{13} + c_{55})\psi_w, \\ 2\beta\gamma\sqrt{(c_{66}\psi_u)}\sqrt{(c_{55}\psi_u)} = 0, \\ 2\alpha\beta\sqrt{c_{66}\psi_v}\sqrt{c_{22}\psi_v} = (c_{12} + c_{66})\psi_u, \\ 2\alpha\gamma\sqrt{c_{66}\psi_v}\sqrt{c_{44}\psi_v} = 0, \\ 2\beta\gamma\sqrt{c_{22}\psi_v}\sqrt{c_{44}\psi_v} = (c_{23} + c_{44})\psi_w, \\ 2\alpha\beta\sqrt{c_{55}\psi_w}\sqrt{c_{44}\psi_w} = 0, \\ 2\alpha\gamma\sqrt{c_{55}\psi_w}\sqrt{c_{33}\psi_w} = (c_{13} + c_{55})\psi_u, \\ 2\beta\gamma\sqrt{c_{44}\psi_w}\sqrt{c_{33}\psi_w} = (c_{23} + c_{44})\psi_v, \\ \sqrt{c_{11}} = \sqrt{c_{66}}, \sqrt{c_{66}} = \sqrt{c_{55}}, \sqrt{c_{66}} = \sqrt{c_{22}}, \\ \sqrt{c_{22}} = \sqrt{c_{44}}, \sqrt{c_{55}} = \sqrt{c_{44}}, \sqrt{c_{44}} = \sqrt{c_{33}}. \end{cases}$$

Легко бачити, що ця система несумісна при тих значеннях пружних сталих, які задають ізотропне тіло.

Для кристалів кубічної сингонії є три вільні константи, також виконуються співвідношення (5.22) та наступні:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, c_{23} = c_{13} = c_{12}, c_{44} = c_{55} = c_{66}. \quad (5.23)$$

Кристали *гексагональної* сингонії мають 5 ненульових констант. При цьому виконуються співвідношення (5.21) та наступні умови:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, c_{23} = c_{13}, c_{44} = c_{55}, c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \quad (5.24)$$

Кристали *тетрагональної* сингонії мають 6 ненульових констант, при цьому виконується співвідношення (5.22) та умови:

$$c_{11} = c_{22}, c_{23} = c_{13}, c_{44} = c_{55}. \quad (5.25)$$

Кристали *орторомбічної* сингонії мають 7 ненульових констант та виконуються співвідношення (5.22). Зауважимо, що незважаючи на різні кристалографічні класи з точки зору характеру симетрії кристалів, в усіх наведених вище випадках нульовими є однакові коефіцієнти.

Покажемо, що для усіх цих сингоній системи (5.16)-(5.18) несумісні. З врахуванням співвідношення (5.22) система (5.19)-(5.20) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \rho\psi_u \tilde{x}_1'^2(t) = c_{11}\psi_u, \\ \rho\psi_u \tilde{x}_2'^2(t) = c_{66}\psi_u, \\ \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t) = c_{55}\psi_u, \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = (c_{12} + c_{66})\psi_v, \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{13} + c_{55})\psi_w, \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\begin{cases} \rho\psi_v \tilde{x}_1'^2(t) = c_{66}\psi_v, \\ \rho\psi_v \tilde{x}_2'^2(t) = c_{22}\psi_v, \\ \rho\psi_v \tilde{x}_3'^2(t) = c_{44}\psi_v, \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = (c_{12} + c_{66})\psi_u, \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = 0, \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{23} + c_{44})\psi_w. \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\begin{cases} \rho\psi_w \tilde{x}_1'^2(t) = c_{55}\psi_w, \\ \rho\psi_w \tilde{x}_2'^2(t) = c_{44}\psi_w, \\ \rho\psi_w \tilde{x}_3'^2(t) = c_{33}\psi_w, \\ 2\rho\psi_w \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = 0, \\ 2\rho\psi_w \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{13} + c_{55})\psi_u, \\ 2\rho\psi_w \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{23} + c_{44})\psi_v. \end{cases} \quad (5.28)$$

Очевидно, що для існування хвилі будемо знаходити розв'язок, при якому принаймні одна амплітудна компонента також компонента швидкості ненульова (стоячі хвилі тут розглядати не будемо). Розглянемо шосте рівняння системи (5.26). Нехай $\psi_u \neq 0$. Тоді з третього рівняння системи

(5.26) отримуємо: $\tilde{x}_2'(t) = 0 \vee \tilde{x}_3'(t) = 0$. Нехай $\tilde{x}_2'(t) = 0$. Тоді з другого рівняння системи (5.26) $c_{66} = 0$, що неможливо. Отже, $\tilde{x}_3'(t) = 0$. Але тоді з третього рівняння системи (5.26) випливає, що $c_{55} = 0$. Отже, $\psi_u = 0$.

Нехай $\psi_v \neq 0$. Тоді з п'ятого рівняння системи (5.27) отримуємо : $\tilde{x}_1'(t) = 0 \vee \tilde{x}_3'(t) = 0$. Аналізуючи систему (5.27) отримуємо, що $c_{22} = 0 \vee c_{44} = 0$. Отже, $\psi_v = 0$. Залишається випадок, коли $\psi_w \neq 0$. Тоді з четвертого рівняння системи (5.28) отримуємо, що $\tilde{x}_1'(t) = 0 \vee \tilde{x}_2'(t) = 0$. Звідси $c_{55} = 0 \vee c_{44} = 0$. Отже, при відповідних умовах система (5.26)-(5.28) несумісна.

Розглянемо окремо кристали тригональної системи. Вони мають 6 ненульових вільних констант та виконуються співвідношення:

$$c_{11} = c_{22}, c_{23} = c_{13}, c_{44} = c_{55}, c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), c_{15} = -c_{25} = -c_{46} \quad (5.29)$$

$$c_{14} = c_{16} = c_{24} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{56} = 0 \quad (5.30)$$

Система (5.19)-(5.20) запишеться для цієї сингонії у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\psi_u \tilde{x}_1'^2(t) = c_{11}\psi_u + c_{15}\psi_w, \\ \rho\psi_u \tilde{x}_2'^2(t) = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\psi_u - c_{15}\psi_w, \\ \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t) = c_{44}\psi_u, \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = \frac{1}{2}(c_{12} + c_{11})\psi_v, \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{13} + c_{44})\psi_w + 2c_{15}\psi_u(t), \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = -2c_{15}\psi_v. \end{array} \right. \quad (5.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\psi_v \tilde{x}_1'^2(t) = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\psi_v, \\ \rho\psi_v \tilde{x}_2'^2(t) = c_{11}\psi_v, \\ \rho\psi_v \tilde{x}_3'^2(t) = c_{44}\psi_v, \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = \frac{1}{2}(c_{12} + c_{11})\psi_u - 2c_{15}\psi_w, \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = -2c_{15}\psi_v, \end{array} \right. \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
2\rho\psi_v\tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) &= -2c_{15}\psi_u + (c_{13} + c_{44})\psi_w, \\
\left\{ \begin{aligned}
\rho\psi_w\tilde{x}_1'^2(t) &= c_{15}\psi_u + c_{44}\psi_w, \\
\rho\psi_w\tilde{x}_2'^2(t) &= -c_{15}\psi_u + c_{44}\psi_w, \\
\rho\psi_w\tilde{x}_3'^2(t) &= c_{33}\psi_w, \\
2\rho\psi_w\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) &= -2c_{15}\psi_v, \\
2\rho\psi_w\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) &= (c_{13} + c_{55})\psi_u, \\
2\rho\psi_w\tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) &= (c_{13} + c_{44})\psi_v.
\end{aligned} \right. \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Система (5.31)- (5.33) містить 18 рівнянь та 12 невідомих (компоненти швидкості, амплітуд та пружні сталі). Зауважимо, що в цьому випадку $\psi_u \neq 0$. Дійсно, нехай $\psi_u = 0$. Тоді з системи (5.31) отримуємо, що $c_{15}\psi_w = 0$. Коефіцієнт $c_{15} \neq 0$, оскільки ми розглядаємо відповідну сингонію. Отже, $\psi_w = 0$. Однак з системи (5.33) маємо, що $\psi_v = 0$. Отже, $\psi_u \neq 0$.

Неха $\psi_w = 0$. Тоді з системи (5.33) отримуємо, що $c_{15} = 0$, що неможливо. Отже, $\psi_w \neq 0$. Перепишемо систему (5.31)-(5.33) у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned}
\tilde{x}_1'(t) &= \alpha\sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{15}\psi_w)/(\rho\psi_u)}, \\
\tilde{x}_2'(t) &= \beta\sqrt{\left(\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\psi_u - c_{15}\psi_w\right)/(\rho\psi_u)}, \\
\tilde{x}_3'(t) &= \gamma\sqrt{c_{44}/\rho},
\end{aligned} \right. \quad (5.34)$$

$$2\alpha\beta\sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{15}\psi_w)}\sqrt{\left(\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\psi_u - c_{15}\psi_w\right)} = \frac{1}{2}(c_{12} + c_{11})\psi_v,$$

$$2\alpha\gamma\sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{15}\psi_w)}\sqrt{c_{44}\psi_u} = (c_{13} + c_{44})\psi_w + 2c_{15}\psi_u(t),$$

$$2\beta\gamma\sqrt{\left(\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\psi_u - c_{15}\psi_w\right)}\sqrt{c_{44}\psi_u} = -2c_{15}\psi_v,$$

$$2\alpha\beta\sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\psi_v}\sqrt{c_{22}\psi_v} = \frac{1}{2}(c_{12} + c_{11})\psi_u - 2c_{15}\psi_w,$$

$$2\alpha\gamma\sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\psi_v}\sqrt{c_{44}\psi_v} = -2c_{15}\psi_v, \quad (5.35)$$

$$2\beta\gamma\sqrt{c_{22}\psi_v}\sqrt{c_{44}\psi_v} = -2c_{15}\psi_u + (c_{13} + c_{44})\psi_w,$$

$$2\alpha\beta\sqrt{c_{15}\psi_u + c_{44}\psi_w}\sqrt{-c_{15}\psi_u + c_{44}\psi_w} = -2c_{15}\psi_v,$$

$$2\alpha\gamma\sqrt{c_{15}\psi_u + c_{44}\psi_w}\sqrt{c_{33}\psi_w} = (c_{13} + c_{55})\psi_u,$$

$$2\beta\gamma\sqrt{-c_{15}\psi_u + c_{44}\psi_w}\sqrt{c_{33}\psi_w} = (c_{13} + c_{44})\psi_v,$$

$$\sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{15}\psi_w)/\psi_u} = \sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})},$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})} = \sqrt{(c_{15}\psi_u + c_{44}\psi_w)/\psi_w},$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\psi_u - c_{15}\psi_w\right)/\psi_u} = \sqrt{c_{11}},$$

$$\sqrt{c_{11}} = \sqrt{(-c_{15}\psi_u + c_{44}\psi_w)/\psi_w},$$

$$\sqrt{c_{44}} = \sqrt{c_{33}},$$

де $\alpha \in \{1, -1\}$, $\beta \in \{1, -1\}$, $\gamma \in \{1, -1\}$. Система (5.34) характеризує швидкість поширення хвилі, а система (5.35) визначає компоненти амплітуди та співвідношення для пружних сталей, вона містить 14 рівнянь та 9 вільних констант. Використовуючи 5 останніх співвідношень системи (5.35), можемо переписати її у вигляді:

$$2\alpha\beta\sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})}\sqrt{c_{11}}\psi_u = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})\psi_v,$$

$$2\alpha\gamma\sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})}\sqrt{c_{33}}\psi_u = (c_{13} + c_{33})\psi_w + 2c_{15}\psi_u(t),$$

$$2\beta\gamma\sqrt{c_{11}}\sqrt{c_{33}}\psi_u = -2c_{15}\psi_v,$$

$$2\alpha\beta\sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})}\sqrt{c_{11}}\psi_v = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})\psi_u - 2c_{15}\psi_w,$$

$$\alpha\gamma\sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})}\sqrt{c_{33}} = -c_{15},$$

$$2\beta\gamma\sqrt{c_{11}}\sqrt{c_{33}}\psi_v = -2c_{15}\psi_u + (c_{13} + c_{33})\psi_w, \quad (5.36)$$

$$2\alpha\beta\sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})}\sqrt{c_{33}}\psi_w = -2c_{15}\psi_v,$$

$$2\alpha\gamma\sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})}\sqrt{c_{33}}\psi_w = (c_{13} + c_{33})\psi_u,$$

$$2\beta\gamma\sqrt{c_{11}}\sqrt{c_{33}}\psi_w = (c_{13} + c_{33})\psi_v,$$

$$\sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{15}\psi_w)/\psi_u} = \sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})},$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})} = \sqrt{(c_{15}\psi_u + c_{33}\psi_w)/\psi_w},$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\psi_u - c_{15}\psi_w\right)/\psi_u} = \sqrt{c_{11}},$$

$$\sqrt{c_{11}} = \sqrt{(-c_{15}\psi_u + c_{33}\psi_w)/\psi_w}.$$

Використовуючи п'яте рівняння системи (5.36), можемо переписати сьоме рівняння цієї системи у вигляді:

$$-2c_{15}\psi_w\beta/\gamma = -2c_{15}\psi_v. \quad (5.37)$$

Використовуючи рівняння (5.37), з дев'ятого рівняння системи (5.36) отримуємо: $2\sqrt{c_{11}}\sqrt{c_{33}} = c_{13} + c_{33}$. Тоді з шостого рівняння маємо: $0 = -2c_{15}\psi_u$. Звідси $c_{15} = 0$, що неможливо. Отже, результуюча система (5.19)-(5.20) несумісна і для тригональної сингонії.

Розглянемо групу кристалів S, C_2, C^h [274, ст.171], що належить до моноклінної сингонії. Для цієї групи є 13 вільних коефіцієнти в законі Гука. В цьому випадку ненульовими будуть коефіцієнти $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{16}, c_{22}, c_{23}, c_{26}, c_{33}, c_{36}, c_{44}, c_{45}, c_{55}, c_{66}$, інші коефіцієнти рівні 0:

$$c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{46} = c_{56} = 0.$$

Тоді системи (5.17)-(5.18) відповідно матимуть вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^{12}(t) = (c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v)/(\rho\psi_u), \\ \tilde{y}^{12}(t) = (c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u)/(\rho\psi_u), \\ \tilde{z}^{12}(t) = (c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u)/(\rho\psi_u), \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}'(t)\tilde{y}'(t) = 2c_{16}\psi_u + (c_{12} + c_{66})\psi_v, \\ 2\rho\psi_u \tilde{x}'(t)\tilde{z}'(t) = (c_{13} + c_{55})\psi_w, \\ 2\rho\psi_u \tilde{y}'(t)\tilde{z}'(t) = (c_{36} + c_{45})\psi_w. \end{array} \right. \quad (5.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\psi_v \tilde{x}_1^{12}(t) = c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v, \\ \rho\psi_v \tilde{x}_2^{12}(t) = c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v, \\ \rho\psi_v \tilde{x}_3^{12}(t) = c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v, \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = (c_{12} + c_{66})\psi_u + 2c_{26}\psi_v, \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{36} + c_{45})\psi_w, \\ 2\rho\psi_v \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{23} + c_{44})\psi_w. \end{array} \right. \quad (5.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\psi_w \tilde{x}_1^{12}(t) = c_{55}\psi_w, \\ \rho\psi_w \tilde{x}_2^{12}(t) = c_{44}\psi_w, \\ \rho\psi_w \tilde{x}_3^{12}(t) = c_{33}\psi_w, \\ 2\rho\psi_w \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = 2c_{45}\psi_w, \\ 2\rho\psi_w \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{13} + c_{55})\psi_u + (c_{36} + c_{45})\psi_v, \\ 2\rho\psi_w \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{36} + c_{45})\psi_u + (c_{23} + c_{44})\psi_v. \end{array} \right. \quad (5.40)$$

Нехай $\psi_w \neq 0, \psi_v \neq 0, \psi_u \neq 0$. Тогда з систем (5.38)- (5.40) отримуємо загальну систему рівнянь, яку можемо записати у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1'(t) = \alpha \sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v)/(\rho\psi_u)}, \\ \tilde{x}_2'(t) = \beta \sqrt{(c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u)/(\rho\psi_u)}, \\ \tilde{x}_3'(t) = \gamma \sqrt{(c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u)/(\rho\psi_u)}, \end{array} \right. \quad (5.41)$$

$$2\alpha\beta \sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v)} \sqrt{(c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u)} = 2c_{16}\psi_u + (c_{12} + c_{66})\psi_v,$$

$$2\alpha\gamma \sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v)} \sqrt{(c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u)} = (c_{13} + c_{55})\psi_w,$$

$$2\beta\gamma \sqrt{(c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u)} \sqrt{(c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u)} = (c_{36} + c_{45})\psi_w,$$

$$2\alpha\beta \sqrt{c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v} \sqrt{c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v} = (c_{12} + c_{66})\psi_u + 2c_{26}\psi_v,$$

$$2\alpha\gamma \sqrt{c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v} \sqrt{c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v} = (c_{36} + c_{45})\psi_w,$$

$$\begin{aligned}
2\beta\gamma\sqrt{c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v}\sqrt{c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v} &= (c_{23} + c_{44})\psi_w, \\
2\alpha\beta\sqrt{c_{55}\psi_w}\sqrt{c_{44}\psi_w} &= 2c_{45}\psi_w, \\
2\alpha\gamma\sqrt{c_{55}\psi_w}\sqrt{c_{33}\psi_w} &= (c_{13} + c_{55})\psi_u + (c_{36} + c_{45})\psi_v, \\
2\beta\gamma\sqrt{c_{44}\psi_w}\sqrt{c_{33}\psi_w} &= (c_{36} + c_{45})\psi_u + (c_{23} + c_{44})\psi_v, \\
\sqrt{(c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v)/\psi_u} &= \sqrt{(c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v)/\psi_v}, \\
\sqrt{(c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v)/\psi_v} &= \sqrt{c_{55}}, \\
\sqrt{(c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u)/\psi_u} &= \sqrt{(c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v)/\psi_v}, \\
\sqrt{(c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v)/\psi_v} &= \sqrt{c_{44}}, \\
\sqrt{(c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u)/\psi_u} &= \sqrt{(c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v)/\psi_v}, \\
\sqrt{(c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v)/\psi_v} &= \sqrt{c_{33}}.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Система (5.41) описує траєкторію руху хвилі (точки максимального збурення). Бачимо, що у найпростішому випадку вона буде прямолінійною. Система (5.42) визначає співвідношення для пружних сталей для яких рівняння руху можуть бути знайдені в формі (5.9).

Відзначимо, що система (5.42) – сумісна і має нескінченну множину розв'язків. Наприклад, вона має розв'язки виду: $\{c_{ij} = 0, (i, j) \in \Theta\}$, ψ_u, ψ_v, ψ_w - будь-які відмінні від 0 значення, $\Theta = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,5), (2,2), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (6,6)\}$.

Окрім того, очевидною є властивість: якщо $\{c_{ij}, \psi_u, \psi_v, \psi_w, (i, j) \in \Omega\}$ - нетривіальний розв'язок системи (5.42), то її розв'язком буде будь-який набір значень виду: $\{\lambda c_{ij}, \psi_u, \psi_v, \psi_w, (i, j) \in \Omega\}$, де λ - довільний параметр.

Можемо розглянути наближені розв'язки (5.42).

Ось один з таких розв'язків для моноклінної сингонії, отриманий в середовищі Mathcad :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 1.1767366446, c_{12} = 1.0268210644, c_{13} = 0.9999999967, c_{16} = -0.068849628, \\
c_{22} &= 5.7452812105, c_{23} = 6.5894545225, c_{26} = 2.1669831039, \\
c_{33} &= 7.5894587902, c_{36} = 2.5669932806, c_{44} = 6.5894545218, c_{45} = 2.5669932806, \\
c_{55} &= 0.9999999974, c_{66} = 1.0268198332, \\
\psi_u &= 0.001004088, \psi_v = 0.0025774887, \psi_\omega = 0.0027661592.
\end{aligned}$$

При цьому вектор компонент швидкості має вигляд:

$$(0.0789414659, 0.2026422132, 0.2174756267).$$

Таким чином, система (5.19)-(5.20) є сумісною для триклінної сингонії. Якщо записати відповідні співвідношення для моноклінної сингонії, то отримаємо систему з 15 рівнянь та 16 невідомих. Для триклінної сингонії результуюча система містить 15 рівнянь та 24 невідомих. Відповідні розв'язки можна знайти наближеними методами.

Для триклінної сингонії отримуємо, наприклад, такий розв'язок:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 93.1, c_{12} = 27.1, c_{13} = 35.86, c_{14} = 0, c_{15} = -27.86, c_{16} = -3.21, c_{22} = 100.1, \\
c_{23} &= 35.84, c_{24} = -32.87, c_{25} = 1.31, c_{26} = -7.63, c_{33} = 107.6, c_{34} = 30.29, \\
c_{35} &= 31.44, c_{36} = 24.01, c_{44} = 36.4, c_{45} = 23.46, c_{46} = 0.00, c_{55} = 36.4, c_{56} = -1.28, \\
c_{66} &= 30.4, \\
\psi_u &= 0.000001, \psi_v = 0.000000977, \psi_\omega = 0.00000235.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

При цьому $p = 3206$ а компоненти швидкості рівні відповідно :

$$0.08653416, 0.08458350, 0.20405407.$$

Зауважимо, що для розв'язку (5.43) є додатньо-визначеною квадратична форма, що характеризує пружний потенціал. Для відповідного аналізу було використане представлення, запропоноване в роботі [163]:

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= d_1 a_{i1} a_{j1} + d_2 a_{i2} a_{j2} + d_3 a_{i3} a_{j3} + d_4 a_{i4} a_{j4} + d_5 a_{i5} a_{j5} + d_6 a_{i6} a_{j6}, \\
i, j &= \overline{1..6}, \text{де } d_1 > 0, d_2 > 0, d_3 > 0, d_4 > 0, d_5 > 0, d_6 > 0, \\
a_{11} &= a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{55} = a_{66} = 1, \\
a_{ip} &= 0, p > i, i, p = \overline{1..6}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Співвідношення (5.44) визначає необхідні та достатні умови додатньо-визначеності квадратичної форми, що задається тензором пружних сталих. Задаючи різні значення констант d_i, a_{ij} можна отримати оцінки для допустимих значень пружних сталих анізотропних тіл. Оцінки найтісніших меж отримані в роботі [311].

Отже, показано, що розв'язки рівнянь руху для пружного середовища, що має моноклінну чи триклінну сингонії, можуть бути знайдені у формі Т-представлень. Тоді, враховуючи лінійність системи рівнянь руху, її розв'язком буде довільна комбінація таких хвиль.

Звичайно, дуже цікавим є питання, для яких реальних матеріалів могли б існувати такі хвилі. Зауважимо, що для гірських порід, наприклад, характер анізотропії пружних властивостей може бути дуже складним і не відповідати типам сингоній, які класично розглядаються з точки зору симетрії кристалів. Окрім того, слід відзначити складний деформовано-напружений стан гірських порід в товщі Землі [311], який суттєво впливає на анізотропію пружних властивостей.

Звернемось, наприклад, до результатів, отриманих в роботі [311] для гранітоїдів. В даній роботі показано, що на ефективні пружні сталі впливає не лише орієнтація кристалографічної осі породоутворюючого матеріалу, але й формат зерна та формат мікротріщин. Різні варіанти орієнтацій можуть суттєво змінювати співвідношення між пружними сталими. Отримані в роботі [311] результати свідчать про неможливість віднести гранітоїди до відомих типів сингоній. При цьому встановлено, що найближчим класичним типом сингонії для гранітоїдів є триклінна чи аксіальна орторомбічна. Зважаючи на вищесказане, можемо говорити для полікристалічних матеріалів лише про деякі наближення стосовно класів сингоній.

Дуже складним є і питання точності експериментального визначення пружних сталих для мінералів триклінної та моноклінної сингоній. Коли зразки мінералів дістаються на поверхню, то при цьому відбуваються значні

зміни стану речовини, з'являються мікротріщини. В ряді робіт, зокрема [311], звертається увага на складність перенесення результатів експериментальних вимірювань пружних сталей в звичайних умовах на ті умови, в яких знаходяться мінерали на глибинах десятків та сотень кілометрів.

Зважаючи на описані вище обставини, в окремих роботах для аналізу пружних характеристик пропонується розглядати деякий аналог закону Гука [163] як залежність палеонапруг від деформацій у вигляді: $\sigma = Cef(t, \Lambda)$, де $f()$ -деяка функція, t, Λ -фактори температури та часу, що мають функціональний зв'язок з параметрами напруг, пружними сталими та деформаціями (дослідження такого зв'язку ще не опубліковані).

В роботі [311] наведені такі значення пружних сталей для гранітів (в ГПа):

$$\begin{aligned} c_{11} = 93.1, c_{12} = 27.1, c_{13} = 30.6, c_{14} = 0, c_{15} = -0.1, c_{16} = 0, c_{22} = 100.1, c_{23} = 32.2, \\ c_{24} = -0.01, c_{25} = 0.3, c_{26} = 0.01, c_{33} = 107.6, c_{34} = 0.02, c_{35} = -2.3, c_{36} = 0.1, \\ c_{44} = 36.4, c_{45} = 0.02, c_{46} = -1.00, c_{55} = 36.4, c_{56} = 0.04, c_{66} = 30.4 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Якщо порівняти (5.45) з даними пружних сталей для гранітоїдів, то бачимо, що значення деяких констант відрізняються, однак значення ряду констант співпадають. Оскільки в (5.43) сталі визначені в ГПа, можемо аналогічно проінтерпретувати і розв'язок (5.45). Тоді густину в (5.45)

можемо проінтерпретувати як $3200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, що відповідає густині Землі на рівні

поверхні Мохоровичича (на глибині порядку 35 км відбувається зміна густини від 2.9-3.0 г/см³ до 3.1 - 3.5 г/см³, [13]) . Тоді можемо оцінити

швидкість хвилі (9.6) в м/с. Якщо пружні сталі вимірюються в ГПа, то враховуючи характер співвідношень (5.16)-(5.18), отримані значення

компонент швидкості потрібно домножити на $\sqrt{10^9}$. В результаті отримаємо,

що $x'_1(t) = 2736 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $x'_2(t) = 2674 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $x'_3(t) = 6445 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Тоді швидкість поширення

максимального збурення рівна $v(t) = 7494 \frac{M}{c}$. Отримали швидкість, яка відповідає швидкості поширення поздовжніх сейсмічних хвиль саме на глибині поверхні Мохоровичича (там відбувається зміна швидкості від $6.7 \div 7.6$ км/с до $7.9 \div 8.6$ км/с;) .

Зауважимо, що незважаючи на несумісність системи (5.16)-(5.18) для вищих сингоній, можна знайти наближені її розв'язки, наприклад, для орторомбічної сингонії з точністю до 0.0001. Зважаючи на достатність умов (5.16)-(5.18), можемо припустити, що відповідні хвилі можуть існувати і для матеріалів, характер симетрії кристалів яких наближається до орторомбічної сингонії.

5.3 Необхідні та достатні умови існування розв'язків рівнянь руху для анізотропних пружних тіл, що описують відокремлені хвилі

Розглянемо випадок:

$$\psi_u(t) = \psi_u = const, \psi_v(t) = \psi_v = const,$$

$$\psi_w(t) = \psi_w = const, \rho = const.$$

Маємо систему (5.16)-(5.18). Система (5.16)-(5.18) визначає умови, яким повинні задовольняти пружні сталі, амплітуди а також компоненти швидкості для існування розв'язків (5.6). Зауважимо, що ці умови достатні. Покажемо, що вони є і необхідними.

Дійсно, нехай система (5.16)-(5.18) сумісна,

$x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R, t \in [t_0, T]$. Розглянемо рівняння (5.16). Враховуючи властивості функцій класу G , маємо: $g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)) = 0, g''(x_1 - \tilde{x}_1(t)) = 0$ при $x_1 = \tilde{x}_1(t)$. Таким чином, розглядаючи послідовно випадки $x_2 = \tilde{x}_2(t), x_3 = \tilde{x}_3(t); x_1 = \tilde{x}_1(t), x_3 = \tilde{x}_3(t); x_1 = \tilde{x}_1(t), x_2 = \tilde{x}_2(t)$ з рівняння (5.16) отримуємо :

$$\rho\psi_u \left(\frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}_1'''(t) \right) = (\psi_u c_{11} + \psi_v c_{16} + \psi_w c_{15} - \rho\psi_u \tilde{x}_1'^2(t)) \left(\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \right), \quad (5.46)$$

$$\rho\psi_u \left(\frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \tilde{x}_2'''(t) \right) = (\psi_u c_{66} + \psi_v c_{26} + \psi_w c_{46} - \rho\psi_u \tilde{x}_2'^2(t)) \left(\frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t)))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \right), \quad (5.47)$$

$$\rho\psi_u \left(\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \tilde{x}_3'''(t) \right) = (\psi_u c_{55} + \psi_v c_{45} + \psi_w c_{35} - \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t)) \left(\frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \right). \quad (5.48)$$

Розглянемо рівняння (5.48). Нехай $\psi_u c_{55} + \psi_v c_{46} + \psi_w c_{35} - \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t) \neq 0$ для деякого значення t , причому $\tilde{x}_3'''(t) \neq 0$. Зафіксуємо таке значення t . Тоді співвідношення (5.48) представляє собою звичайне диференціальне рівняння для функції g відносно змінної x_3 . Загальний розв'язок такого рівняння легко знайти, ввівши заміну: $\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} = y(x)$. Отримуємо

диференціальне рівняння виду:

$$y'(x) = y^2(x) - \rho\psi_u \tilde{x}_3'''(t) y(x) / (\psi_u c_{55} + \psi_v c_{46} + \psi_w c_{35} - \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t)).$$

Його загальний розв'язок: $y(x) = \frac{C}{1 - e^{C(x-C_1)}}$, де C, C_1 - довільні константи.

Звідси $\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} = \frac{C}{1 - e^{C(x_3 - \tilde{x}_3(t) - C_1)}}$. Але в такому випадку отримуємо

протиріччя з умовою Нехай $\tilde{x}_3'''(t) = 0$. Тоді після аналогічної заміни рівняння (5.48) запишеться у вигляді: $y^2(x) - y'(x) = 0$. Загальний його

розв'язок: $y(x) = \frac{1}{x - C}$, де C - довільна константа. Звідси

$\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} = \frac{1}{x_3 - \tilde{x}_3(t) - C}$. Знову отримуємо протиріччя з умовою

$g'(0) = 0$. Таким чином, виконується рівняння:

$$\psi_u c_{55} + \psi_v c_{45} + \psi_w c_{35} - \rho \psi_u \tilde{x}_3'^2(t) = 0. \quad (5.49)$$

Аналогічно, розглядаючи рівняння (5.47) і (5.46), отримуємо відповідно перше та друге рівняння системи (5.17).

Якщо виконується співвідношення (5.49), то з рівняння (5.48) отримуємо: $\rho \psi_u W \left(\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \tilde{x}_3''(t) \right) = 0$. Звідси $\tilde{x}_3''(t) = 0$ або

$g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)) = 0$. Якщо $\tilde{x}_3''(t) \neq 0$, то $g'(x_3 - \tilde{x}_3(t)) = 0$ для будь-яких значень x_3 , що неможливо для функції класу G .

Враховуючи співвідношення (5.46)-(5.48), з рівняння (5.16) отримуємо:

$$\begin{aligned} & \rho \psi_u \left(\frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \tilde{x}_1'(t) \tilde{x}_2'(t) + \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \tilde{x}_1'(t) \tilde{x}_3'(t) + \right. \\ & \left. + \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \tilde{x}_2'(t) \tilde{x}_3'(t) \right) = \psi_u \left((2c_{16}, 2c_{15}, 2c_{56}), \hat{\Theta} \right) + \psi_v \left((c_{12} + c_{66}, c_{14} + c_{56}, c_{46} + c_{25}), \hat{\Theta} \right) \\ & \quad + \psi_w \left((c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{36} + c_{45}), \hat{\Theta} \right) \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\text{де } \hat{\Theta} = \left(\frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}, \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}, \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \right)$$

Нехай $x_1 = \tilde{x}_1(t)$. Тоді з (5.50) отримуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \tilde{x}_2'(t) \tilde{x}_3'(t) = (\psi_u 2c_{56} + (c_{46} + c_{25})\psi_v + \\ & + (c_{36} + c_{45})\psi_w) W \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

При $x_2 = \tilde{x}_2(t)$ та $x_3 = \tilde{x}_3(t)$ отримуємо відповідно:

$$\frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \tilde{x}_1'(t) \tilde{x}_3'(t) = ((c_{13} + c_{55})\psi_w + 2c_{15}\psi_u(t) + (c_{14} + c_{56})\psi_v)W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}, \quad (5.52)$$

$$\frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \tilde{x}_1'(t) \tilde{x}_2'(t) = (2c_{16}\psi_u + (c_{12} + c_{66})\psi_v + (c_{14} + c_{56})\psi_w)W \frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}. \quad (5.53)$$

Бачимо, що рівняння (5.51)-(5.53) еквівалентні трьом останнім рівнянням системи (5.16) для функцій $g(\cdot) \in G$. Таким чином, отримуємо систему (5.16). Проводячи аналогічні міркування, можемо отримати з рівнянь (5.47) та (5.48) системи (5.17) та (5.18) відповідно. Отже, система (5.16)-(5.18) визначає необхідні та достатні умови існування часткових розв'язків рівнянь руху в формі (5.8).

5.4 Питання існування точних розв'язків характеристичної системи, що визначає клас анізотропії для існування розв'язків рівнянь руху виду (5.6)

Таким чином, в попередньому розділі отримали систему, що містить пружні сталі, компоненти швидкості, амплітуди та щільність, яка являє собою необхідні та достатні умови існування часткових розв'язків рівнянь руху для анізотропного пружного середовища у вигляді відокремлених хвиль типу δ -солітонів:

$$\begin{cases} \psi_u C_1^2 = c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v + c_{15}\psi_w, \\ \psi_u C_2^2 = c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u + c_{46}\psi_w, \\ \psi_u C_3^2 = c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u + c_{35}\psi_w, \\ 2\psi_u C_1 C_2 = 2c_{16}\psi_u + (c_{12} + c_{66})\psi_v + (c_{14} + c_{56})\psi_w, \\ 2\psi_u C_1 C_3 = (c_{13} + c_{55})\psi_w + 2c_{15}\psi_u + (c_{14} + c_{56})\psi_v, \\ 2\rho\psi_u C_2 C_3 = 2c_{56}\psi_u + (c_{46} + c_{25})\psi_v + (c_{36} + c_{45})\psi_w \end{cases} \quad (5.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\psi_v C_1^2 = c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v + c_{56}\psi_w, \\ \rho\psi_v C_2^2 = c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v + c_{24}\psi_w, \\ \rho\psi_v C_3^2 = c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v + c_{34}\psi_w, \\ 2\rho\psi_v C_1 C_2 = (c_{12} + c_{66})\psi_u + 2c_{26}\psi_v + (c_{46} + c_{25})\psi_w, \\ 2\rho\psi_v C_1 C_3 = (c_{56} + c_{14})\psi_u + 2c_{46}\psi_v + (c_{36} + c_{45})\psi_w. \\ 2\rho\psi_v C_2 C_3 = (c_{25} + c_{46})\psi_u + 2c_{24}\psi_v + (c_{23} + c_{44})\psi_w. \end{array} \right. \quad (5.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\psi_w C_1^2 = c_{15}\psi_u + c_{56}\psi_v + c_{55}\psi_w, \\ \rho\psi_w C_2^2 = c_{46}\psi_u + c_{24}\psi_v + c_{44}\psi_w, \\ \rho\psi_w C_3^2 = c_{35}\psi_u + c_{34}\psi_v + c_{33}\psi_w, \\ 2\rho\psi_w C_1 C_2 = (c_{14} + c_{56})\psi_u + (c_{46} + c_{25})\psi_v + 2c_{45}\psi_w, \\ 2\rho\psi_w C_1 C_3 = (c_{13} + c_{55})\psi_u + (c_{36} + c_{45})\psi_v + 2c_{35}\psi_w, \\ 2\rho\psi_w C_2 C_3 = (c_{36} + c_{45})\psi_u + (c_{23} + c_{44})\psi_v + 2c_{34}\psi_w. \end{array} \right. \quad (5.56)$$

Відзначимо, що система (5.54)-(5.56) сумісна. Вона має нескінченну множину розв'язків, що включає тривіальний та нетривіальний розв'язок виду: $\psi_v = \psi_w = 0$, ψ_u - довільне,

$$c_{11} = c_{16} = c_{26} = c_{45} = c_{15} = c_{46} = c_{35} = c_{25} = c_{36} = 0, C_1 = 0, \rho C_2^2 = c_{66}, \\ \rho C_3^2 = c_{55}, 2\rho C_2 C_3 = 2c_{56}, 0 = c_{12} + c_{66}, 0 = c_{56} + c_{14}, 0 = c_{13} + c_{55}.$$

Останній розв'язок легко перевірити безпосередньою підстановкою в систему.

Дуже суттєве обмеження на клас розв'язків накладає той факт, що константи c_{ij} - це пружні сталі матеріалу. Такі константи мають низку обмежень у відповідності до різних кристалографічних класів а також обмеження, пов'язані з додатною визначеністю квадратичної форми, що визначає пружний потенціал. В останньому розв'язку, наприклад, $c_{11} = 0$, що неможливо для будь-якого кристалографічного класу [274] реальних кристалів. Отже, незважаючи на сумісність системи та існування вказаних вище її розв'язків, питання існування анізотропії пружних властивостей, при якому існують розв'язки у вигляді відокремлених хвиль, вимагає детальнішого

дослідження. Зауважимо, що відповідні пружні сталі знаходимо на практиці наближено. Тому вимагає детальнішого дослідження, чи існує точний розв'язок системи в околі наближеного.

Нехай маємо деяку точку $x_0 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}, \psi_u, \psi_v, \psi_w, C_1, C_2, C_3)$, таку, що кожне рівняння системи (5.54)-(5.56) виконується з деякою точністю, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{18}$ -відповідні нев'язки.

Покажемо, що в деякому околі точки x_0 існує точний розв'язок системи (5.54)-(5.56). Для цього запропонуємо наступний очевидний підхід. Введемо деякі збурення для всіх змінних системи (5.54)-(5.56) і розглянемо замість кожної змінної c_{ij} суму виду: $c_{ij} + \tilde{c}_{ij}$, де \tilde{c}_{ij} -деякі збурення. Аналогічно вчинимо з усіма іншими змінними. В результаті заміни отримаємо нову систему відносно збурень, яка у випадку сумісності, очевидно доведе існування точного розв'язку системи (5.54)-(5.57) (адже тоді збурення зможуть компенсувати нев'язки). З врахуванням (5.54)-(5.56) отримуємо систему:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\psi}_u \tilde{C}_1^2 + \tilde{\psi}_u 2C_1 \tilde{C}_1 + \tilde{\psi}_u C_1^2 + \psi_u \tilde{C}_1^2 + \psi_u 2C_1 \tilde{C}_1 = \tilde{c}_{11} \psi_u + c_{11} \tilde{\psi}_u + \\
& + \tilde{c}_{11} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{16} \psi_v + c_{16} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{16} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{15} \psi_w + c_{15} \tilde{\psi}_w + \tilde{c}_{15} \tilde{\psi}_w + \varepsilon_1, \\
& \tilde{\psi}_u \tilde{C}_2^2 + \tilde{\psi}_u 2C_2 \tilde{C}_2 + \tilde{\psi}_u C_2^2 + \psi_u \tilde{C}_2^2 + \psi_u 2C_2 \tilde{C}_2 = \tilde{c}_{26} \psi_v + c_{26} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{26} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{66} \psi_u + \\
& + c_{66} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{66} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{46} \psi_w + c_{46} \tilde{\psi}_w + \tilde{c}_{46} \tilde{\psi}_w + \varepsilon_2, \\
& \tilde{\psi}_u \tilde{C}_3^2 + \tilde{\psi}_u 2C_3 \tilde{C}_3 + \tilde{\psi}_u C_3^2 + \psi_u \tilde{C}_3^2 + \psi_u 2C_3 \tilde{C}_3 = \tilde{c}_{45} \psi_v + c_{45} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{45} \tilde{\psi}_v + \\
& + \tilde{c}_{55} \psi_u + c_{55} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{55} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{35} \psi_w + c_{35} \tilde{\psi}_w + \tilde{c}_{35} \tilde{\psi}_w + \varepsilon_3, \\
& 2\tilde{\psi}_u C_1 C_2 + 2\tilde{\psi}_u \tilde{C}_1 C_2 + 2\tilde{\psi}_u C_1 \tilde{C}_2 + 2\tilde{\psi}_u \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + 2\psi_u \tilde{C}_1 C_2 + 2\psi_u C_1 \tilde{C}_2 + \\
& + 2\psi_u \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = 2\tilde{c}_{16} \psi_u + 2c_{16} \tilde{\psi}_u + 2\tilde{c}_{16} \tilde{\psi}_u + (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) \psi_v + \\
& + (c_{12} + c_{66}) \tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) \tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \psi_w + (c_{14} + c_{56}) \tilde{\psi}_w + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \tilde{\psi}_w + \varepsilon_4, \\
& 2\tilde{\psi}_u C_1 C_3 + 2\tilde{\psi}_u \tilde{C}_1 C_3 + 2\tilde{\psi}_u C_1 \tilde{C}_3 + 2\tilde{\psi}_u \tilde{C}_1 \tilde{C}_3 + 2\psi_u \tilde{C}_1 C_3 + 2\psi_u C_1 \tilde{C}_3 + \\
& + 2\psi_u \tilde{C}_1 \tilde{C}_3 = (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \psi_w + (c_{13} + c_{55}) \tilde{\psi}_w + (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{\psi}_w + \\
& + 2\tilde{c}_{15} \psi_u + 2c_{15} \tilde{\psi}_u + 2\tilde{c}_{15} \tilde{\psi}_u + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \psi_v + (c_{14} + c_{56}) \tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \tilde{\psi}_v + \varepsilon_5, \\
& 2\tilde{\psi}_u C_2 C_3 + 2\tilde{\psi}_u \tilde{C}_2 C_3 + 2\tilde{\psi}_u C_2 \tilde{C}_3 + 2\tilde{\psi}_u \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 + 2\psi_u \tilde{C}_2 C_3 + 2\psi_u C_2 \tilde{C}_3 + \\
& + 2\psi_u \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 = 2\tilde{c}_{56} \psi_u + 2c_{56} \tilde{\psi}_u + 2\tilde{c}_{56} \tilde{\psi}_u + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \psi_v + \\
& + (c_{46} + c_{25}) \tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_w + (c_{36} + c_{45}) \tilde{\psi}_w + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \tilde{\psi}_w + \varepsilon_6.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{\psi}_v \tilde{C}_1^2 + \tilde{\psi}_v 2C_1 \tilde{C}_1 + \tilde{\psi}_v C_1^2 + \psi_v \tilde{C}_1^2 + \psi_v 2C_1 \tilde{C}_1 = \tilde{c}_{16} \psi_u + c_{16} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{16} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{66} \psi_v + c_{66} \tilde{\psi}_v + \\
& + \tilde{c}_{66} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{56} \psi_w + c_{56} \tilde{\psi}_w + \tilde{c}_{56} \tilde{\psi}_w + \varepsilon_7, \\
& \tilde{\psi}_v \tilde{C}_2^2 + \tilde{\psi}_v 2C_2 \tilde{C}_2 + \tilde{\psi}_v C_2^2 + \psi_v \tilde{C}_2^2 + \psi_v 2C_2 \tilde{C}_2 = \\
& = \tilde{c}_{26} \psi_u + c_{26} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{26} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{22} \psi_v + c_{22} \tilde{\psi}_v + \\
& + \tilde{c}_{22} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{24} \psi_w + c_{24} \tilde{\psi}_w + \tilde{c}_{24} \tilde{\psi}_w + \varepsilon_8, \\
& \tilde{\psi}_v \tilde{C}_3^2 + \tilde{\psi}_v 2C_3 \tilde{C}_3 + \tilde{\psi}_v C_3^2 + \psi_v \tilde{C}_3^2 + \psi_v 2C_3 \tilde{C}_3 = \tilde{c}_{45} \psi_u + c_{45} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{45} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{44} \psi_v + c_{44} \tilde{\psi}_v + \\
& + \tilde{c}_{44} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{34} \psi_w + c_{34} \tilde{\psi}_w + \tilde{c}_{34} \tilde{\psi}_w + \varepsilon_9, \\
& 2\tilde{\psi}_v C_1 C_2 + 2\tilde{\psi}_v \tilde{C}_1 C_2 + 2\tilde{\psi}_v C_1 \tilde{C}_2 + 2\tilde{\psi}_v \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + 2\psi_v \tilde{C}_1 C_2 + 2\psi_v C_1 \tilde{C}_2 + 2\psi_v \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = \\
& = (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) \psi_u + (c_{12} + c_{66}) \tilde{\psi}_u + (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) \tilde{\psi}_u + \\
& + 2\tilde{c}_{26} \psi_v + 2c_{26} \tilde{\psi}_v + 2\tilde{c}_{26} \tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \psi_w + (c_{46} + c_{25}) \tilde{\psi}_w + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \tilde{\psi}_w + \varepsilon_{10}, \\
& 2\tilde{\psi}_v C_1 C_3 + 2\tilde{\psi}_v \tilde{C}_1 C_3 + 2\tilde{\psi}_v C_1 \tilde{C}_3 + 2\tilde{\psi}_v \tilde{C}_1 \tilde{C}_3 + 2\psi_v \tilde{C}_1 C_3 + 2\psi_v C_1 \tilde{C}_3 + 2\psi_v \tilde{C}_1 \tilde{C}_3 = \\
& = (\tilde{c}_{56} + \tilde{c}_{14}) \psi_u + (c_{56} + c_{14}) \tilde{\psi}_u + (\tilde{c}_{56} + \tilde{c}_{14}) \tilde{\psi}_u + \\
& + 2\tilde{c}_{46} \psi_v + 2c_{46} \tilde{\psi}_v + 2\tilde{c}_{46} \tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_w + (c_{36} + c_{45}) \tilde{\psi}_w + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \tilde{\psi}_w + \varepsilon_{11}, \\
& 2\tilde{\psi}_v C_2 C_3 + 2\tilde{\psi}_v \tilde{C}_2 C_3 + 2\tilde{\psi}_v C_2 \tilde{C}_3 + 2\tilde{\psi}_v \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 + 2\psi_v \tilde{C}_2 C_3 + 2\psi_v C_2 \tilde{C}_3 + 2\psi_v \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 = \\
& = (\tilde{c}_{25} + \tilde{c}_{46}) \psi_u + (c_{25} + c_{46}) \tilde{\psi}_u + (\tilde{c}_{25} + \tilde{c}_{46}) \tilde{\psi}_u + \\
& + 2\tilde{c}_{24} \psi_v + 2c_{24} \tilde{\psi}_v + 2\tilde{c}_{24} \tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) \psi_w + (c_{23} + c_{44}) \tilde{\psi}_w + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) \tilde{\psi}_w + \varepsilon_{12}.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{\psi}_w \tilde{C}_1^2 + \tilde{\psi}_w 2C_1 \tilde{C}_1 + \tilde{\psi}_w C_1^2 + \psi_w \tilde{C}_1^2 + \psi_w 2C_1 \tilde{C}_1 = \tilde{c}_{15} \psi_u + c_{15} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{15} \tilde{\psi}_u + \\
& + \tilde{c}_{56} \psi_v + c_{56} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{56} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{55} \psi_w + c_{55} \tilde{\psi}_w + \tilde{c}_{55} \tilde{\psi}_w + \varepsilon_{13}, \\
& \tilde{\psi}_w \tilde{C}_2^2 + \tilde{\psi}_w 2C_2 \tilde{C}_2 + \tilde{\psi}_w C_2^2 + \psi_w \tilde{C}_2^2 + \psi_w 2C_2 \tilde{C}_2 = \tilde{c}_{46} \psi_u + c_{46} \tilde{\psi}_u + \\
& + \tilde{c}_{46} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{24} \psi_v + c_{24} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{24} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{44} \psi_w + c_{44} \tilde{\psi}_w + \tilde{c}_{44} \tilde{\psi}_w + \varepsilon_{14},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{\psi}_w \tilde{C}_3^2 + \tilde{\psi}_w 2C_3 \tilde{C}_3 + \tilde{\psi}_w C_3^2 + \psi_w \tilde{C}_3^2 + \psi_w 2C_3 \tilde{C}_3 = \tilde{c}_{35} \psi_u + c_{35} \tilde{\psi}_u + \\
& + \tilde{c}_{35} \tilde{\psi}_u + \tilde{c}_{34} \psi_v + c_{34} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{34} \tilde{\psi}_v + \tilde{c}_{33} \psi_w + c_{33} \tilde{\psi}_w + \tilde{c}_{33} \tilde{\psi}_w + \varepsilon_{15}, \\
& 2\tilde{\psi}_w C_1 C_2 + 2\tilde{\psi}_w \tilde{C}_1 C_2 + 2\tilde{\psi}_w C_1 \tilde{C}_2 + 2\tilde{\psi}_w \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + 2\psi_w \tilde{C}_1 C_2 + \\
& + 2\psi_w C_1 \tilde{C}_2 + 2\psi_w \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \psi_u + (c_{14} + c_{56}) \tilde{\psi}_u + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \tilde{\psi}_u + \\
& + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \psi_v + (c_{46} + c_{25}) \tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \tilde{\psi}_v + 2\tilde{c}_{45} \psi_w + 2c_{45} \tilde{\psi}_w + \\
& + 2\tilde{c}_{45} \tilde{\psi}_w + \varepsilon_{16},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\tilde{\psi}_w C_1 C_3 + 2\tilde{\psi}_w \tilde{C}_1 C_3 + 2\tilde{\psi}_w C_1 \tilde{C}_3 + 2\tilde{\psi}_w \tilde{C}_1 \tilde{C}_3 + 2\psi_w \tilde{C}_1 C_3 + 2\psi_w C_1 \tilde{C}_3 + \\
& + 2\psi_w \tilde{C}_1 \tilde{C}_3 = (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})\psi_u + (c_{13} + c_{55})\tilde{\psi}_u + (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})\tilde{\psi}_u + \\
& + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45})\psi_v + (c_{36} + c_{45})\tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45})\tilde{\psi}_v + 2\tilde{c}_{35}\psi_w + 2c_{35}\tilde{\psi}_w + \\
& + 2\tilde{c}_{35}\tilde{\psi}_w + \varepsilon_{17}, \tag{5.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\tilde{\psi}_w C_2 C_3 + 2\tilde{\psi}_w \tilde{C}_2 C_3 + 2\tilde{\psi}_w C_2 \tilde{C}_3 + 2\tilde{\psi}_w \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 + 2\psi_w \tilde{C}_2 C_3 + 2\psi_w C_2 \tilde{C}_3 + \\
& + 2\psi_w \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 = (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45})\psi_u + (c_{36} + c_{45})\tilde{\psi}_u + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45})\tilde{\psi}_u + \\
& + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44})\psi_v + (c_{23} + c_{44})\tilde{\psi}_v + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44})\tilde{\psi}_v + 2\tilde{c}_{34}\psi_w + 2c_{34}\tilde{\psi}_w + 2\tilde{c}_{34}\tilde{\psi}_w + \varepsilon_{18}.
\end{aligned}$$

Відзначимо, ще незважаючи на більшу складність, система (5.58)-(5.60) суттєво відрізняється від вихідної системи (5.54)-(5.57) тим, що змінні збурення не мають будь-яких додаткових обмежень, пов'язаних з анізотропією (крім, можливо, їх малості, якщо нас цікавить розв'язок саме в деякому околі точки x_0). Наприклад, будь-яке збурення може бути рівним 0.

Нехай виконуються умови: $\tilde{\psi}_u = \tilde{\psi}_v = \tilde{\psi}_w = 0$. Тоді система (5.58)-(5.60)

запишеться у вигляді:

$$\begin{cases}
\psi_u \tilde{C}_1^2 + \psi_u 2C_1 \tilde{C}_1 = \tilde{c}_{11}\psi_u + \tilde{c}_{16}\psi_v + \tilde{c}_{15}\psi_w + \varepsilon_1, \\
\psi_u \tilde{C}_2^2 + \psi_u 2C_2 \tilde{C}_2 = \tilde{c}_{26}\psi_v + \tilde{c}_{66}\psi_u + \tilde{c}_{46}\psi_w + \varepsilon_2, \\
\psi_u \tilde{C}_3^2 + \psi_u 2C_3 \tilde{C}_3 = \tilde{c}_{45}\psi_v + \tilde{c}_{55}\psi_u + \tilde{c}_{35}\psi_w + \varepsilon_3, \\
2\psi_u \tilde{C}_1 C_2 + 2\psi_u C_1 \tilde{C}_2 + 2\psi_u \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = 2\tilde{c}_{16}\psi_u + (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})\psi_v + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56})\psi_w + \varepsilon_4, \\
2\psi_u \tilde{C}_1 C_3 + 2\psi_u C_1 \tilde{C}_3 + 2\psi_u \tilde{C}_1 \tilde{C}_3 = (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})\psi_w + 2\tilde{c}_{15}\psi_u + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56})\psi_v + \varepsilon_5, \\
2\psi_u \tilde{C}_2 C_3 + 2\psi_u C_2 \tilde{C}_3 + 2\psi_u \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 = 2\tilde{c}_{56}\psi_u + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25})\psi_v + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45})\psi_w + \varepsilon_6.
\end{cases} \tag{5.61}$$

$$\begin{cases}
\psi_v \tilde{C}_1^2 + \psi_v 2C_1 \tilde{C}_1 = \tilde{c}_{16}\psi_u + \tilde{c}_{66}\psi_v + \tilde{c}_{56}\psi_w + \varepsilon_7, \\
\psi_v \tilde{C}_2^2 + \psi_v 2C_2 \tilde{C}_2 = \tilde{c}_{26}\psi_u + \tilde{c}_{22}\psi_v + \tilde{c}_{24}\psi_w + \varepsilon_8, \\
\psi_v \tilde{C}_3^2 + \psi_v 2C_3 \tilde{C}_3 = \tilde{c}_{45}\psi_u + \tilde{c}_{44}\psi_v + \tilde{c}_{34}\psi_w + \varepsilon_9, \\
2\psi_v \tilde{C}_1 C_2 + 2\psi_v C_1 \tilde{C}_2 + 2\psi_v \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})\psi_u + 2\tilde{c}_{26}\psi_v + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25})\psi_w + \varepsilon_{10}, \\
2\psi_v \tilde{C}_1 C_3 + 2\psi_v C_1 \tilde{C}_3 + 2\psi_v \tilde{C}_1 \tilde{C}_3 = (\tilde{c}_{56} + \tilde{c}_{14})\psi_u + 2\tilde{c}_{46}\psi_v + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45})\psi_w + \varepsilon_{11}, \\
2\psi_v \tilde{C}_2 C_3 + 2\psi_v C_2 \tilde{C}_3 + 2\psi_v \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 = (\tilde{c}_{25} + \tilde{c}_{46})\psi_u + 2\tilde{c}_{24}\psi_v + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44})\psi_w + \varepsilon_{12}.
\end{cases} \tag{5.62}$$

$$\begin{cases}
\psi_w \tilde{C}_1^2 + \psi_w 2C_1 \tilde{C}_1 = \tilde{c}_{15} \psi_u + \tilde{c}_{56} \psi_v + \tilde{c}_{55} \psi_w + \varepsilon_{13}, \\
\psi_w \tilde{C}_2^2 + \psi_w 2C_2 \tilde{C}_2 = \tilde{c}_{46} \psi_u + \tilde{c}_{24} \psi_v + \tilde{c}_{44} \psi_w + \varepsilon_{14}, \\
\psi_w \tilde{C}_3^2 + \psi_w 2C_3 \tilde{C}_3 = \tilde{c}_{35} \psi_u + \tilde{c}_{34} \psi_v + \tilde{c}_{33} \psi_w + \varepsilon_{15}, \\
2\psi_w \tilde{C}_1 C_2 + 2\psi_w C_1 \tilde{C}_2 + 2\psi_w \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \psi_u + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \psi_v + 2\tilde{c}_{45} \psi_w + \varepsilon_{16}, \\
2\psi_w \tilde{C}_1 C_3 + 2\psi_w C_1 \tilde{C}_3 + 2\psi_w \tilde{C}_1 \tilde{C}_3 = (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \psi_u + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_v + 2\tilde{c}_{35} \psi_w + \varepsilon_{17}, \\
2\psi_w \tilde{C}_2 C_3 + 2\psi_w C_2 \tilde{C}_3 + 2\psi_w \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 = (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_u + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) \psi_v + 2\tilde{c}_{34} \psi_w + \varepsilon_{18}.
\end{cases} \quad (5.63)$$

Введемо нові змінні \hat{C}_1, \hat{C}_2 та \hat{C}_3 :

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_1^2 + 2C_1 \tilde{C}_1 &= \alpha \hat{C}_1, \\
\tilde{C}_2^2 + 2C_2 \tilde{C}_2 &= \beta \hat{C}_2, \\
\tilde{C}_3^2 + 2C_3 \tilde{C}_3 &= \gamma \hat{C}_3, \\
2\tilde{C}_1 C_2 + 2C_1 \tilde{C}_2 + 2\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 &= \tilde{C}_1(2C_2 + \tilde{C}_2) + \tilde{C}_2(2C_1 + \tilde{C}_1) = \alpha_1 \hat{C}_1 + \alpha_2 \hat{C}_2, \\
2\tilde{C}_1 C_3 + 2C_1 \tilde{C}_3 + 2\tilde{C}_1 \tilde{C}_3 &= \beta_1 \hat{C}_1 + \beta_2 \hat{C}_3, \\
2\tilde{C}_2 C_3 + 2C_2 \tilde{C}_3 + 2\tilde{C}_2 \tilde{C}_3 &= \gamma_1 \hat{C}_2 + \gamma_3 \hat{C}_3,
\end{aligned} \quad (5.64)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ - деякі константи . Будемо вибирати значення цих констант так, щоб виконувались всі рівняння системи (5.64). Маємо:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1 &= (\tilde{C}_1^2 + 2C_1 \tilde{C}_1) / \alpha, \\
\hat{C}_2 &= (\tilde{C}_2^2 + 2C_2 \tilde{C}_2) / \beta, \\
\hat{C}_3 &= (\tilde{C}_3^2 + 2C_3 \tilde{C}_3) / \gamma, \\
2\tilde{C}_1 C_2 + 2C_1 \tilde{C}_2 + 2\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 &= \tilde{C}_1(2C_2 + \tilde{C}_2) + \tilde{C}_2(2C_1 + \tilde{C}_1) = \alpha_1 (\tilde{C}_1^2 + 2C_1 \tilde{C}_1) / \alpha + (5.65) \\
&+ \alpha_2 (\tilde{C}_2^2 + 2C_2 \tilde{C}_2) / \beta, \\
2\tilde{C}_1 C_3 + 2C_1 \tilde{C}_3 + 2\tilde{C}_1 \tilde{C}_3 &= \beta_1 (\tilde{C}_1^2 + 2C_1 \tilde{C}_1) / \alpha + \beta_2 (\tilde{C}_3^2 + 2C_3 \tilde{C}_3) / \gamma, \\
2\tilde{C}_2 C_3 + 2C_2 \tilde{C}_3 + 2\tilde{C}_2 \tilde{C}_3 &= \gamma_1 (\tilde{C}_2^2 + 2C_2 \tilde{C}_2) / \beta + \gamma_3 (\tilde{C}_3^2 + 2C_3 \tilde{C}_3) / \gamma.
\end{aligned}$$

Нехай $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_3$. Тоді остання система матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1 &= (\tilde{C}_1^2 + 2C_1 \tilde{C}_1) / \alpha, \\
\hat{C}_2 &= (\tilde{C}_1^2 + 2C_2 \tilde{C}_1) / \beta, \\
\hat{C}_3 &= (\tilde{C}_1^2 + 2C_3 \tilde{C}_1) / \gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\tilde{C}_1 C_2 + 2C_1 \tilde{C}_1 + 2\tilde{C}_1 \tilde{C}_1 &= \alpha_1 (\tilde{C}_1^2 + 2C_1 \tilde{C}_1) / \alpha + \alpha_2 (\tilde{C}_1^2 + 2C_2 \tilde{C}_1) / \beta, \\
2\tilde{C}_1 C_3 + 2C_1 \tilde{C}_1 + 2\tilde{C}_1 \tilde{C}_1 &= \beta_1 (\tilde{C}_1^2 + 2C_1 \tilde{C}_1) / \alpha + \beta_2 (\tilde{C}_1^2 + 2C_3 \tilde{C}_1) / \gamma, \\
2\tilde{C}_1 C_3 + 2C_2 \tilde{C}_1 + 2\tilde{C}_1 \tilde{C}_1 &= \gamma_1 (\tilde{C}_1^2 + 2C_2 \tilde{C}_1) / \beta + \gamma_3 (\tilde{C}_1^2 + 2C_3 \tilde{C}_1) / \gamma.
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Нехай виконуються умови: $\alpha_1 / \alpha = 1$, $\alpha_2 / \beta = 1$, $\beta_1 / \alpha = 1$, $\beta_2 / \gamma = 1$, $\gamma_1 / \beta = 1$, $\gamma_3 / \gamma = 1$. Тоді легко бачити, що три останні рівняння системи виконуються. А константи α, β, γ повинні вибиратись так, щоб кожне рівняння системи

$$\begin{cases} \hat{C}_1 = (\tilde{C}_1^2 + 2C_1 \tilde{C}_1) / \alpha, \\ \hat{C}_2 = (\tilde{C}_1^2 + 2C_2 \tilde{C}_1) / \beta, \\ \hat{C}_3 = (\tilde{C}_1^2 + 2C_3 \tilde{C}_1) / \gamma, \end{cases} \tag{5.67}$$

мало дійсний розв'язок відносно змінних $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ відповідно.

Відповідні умови легко записати: $C_1^2 - \alpha \hat{C}_1 \geq 0$, $C_2^2 - \beta \hat{C}_2 \geq 0$, $C_3^2 - \gamma \hat{C}_3 \geq 0$.

Очевидно, що виконання останніх нерівностей завжди можемо забезпечити малістю констант α, β, γ . Таким чином, з врахуванням (5.66), система (5.63)-(5.65) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \psi_u \alpha \hat{C}_1 = \tilde{c}_{11} \psi_u + \tilde{c}_{16} \psi_v + \tilde{c}_{15} \psi_w + \varepsilon_1, \\ \psi_u \beta \hat{C}_2 = \tilde{c}_{26} \psi_v + \tilde{c}_{66} \psi_u + \tilde{c}_{46} \psi_w + \varepsilon_2, \\ \psi_u \gamma \hat{C}_3 = \tilde{c}_{45} \psi_v + \tilde{c}_{55} \psi_u + \tilde{c}_{35} \psi_w + \varepsilon_3, \\ \psi_u (\alpha \hat{C}_1 + \beta \hat{C}_2) = 2\tilde{c}_{16} \psi_u + (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) \psi_v + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \psi_w + \varepsilon_4, \\ \psi_u (\alpha \hat{C}_1 + \gamma \hat{C}_3) = (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \psi_w + 2\tilde{c}_{15} \psi_u + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \psi_v + \varepsilon_5, \\ \psi_u (\beta \hat{C}_2 + \gamma \hat{C}_3) = 2\tilde{c}_{56} \psi_u + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \psi_v + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_w + \varepsilon_6, \end{cases} \tag{5.68}$$

$$\begin{cases} \psi_v \alpha \hat{C}_1 = \tilde{c}_{16} \psi_u + \tilde{c}_{66} \psi_v + \tilde{c}_{56} \psi_w + \varepsilon_7, \\ \psi_v \beta \hat{C}_2 = \tilde{c}_{26} \psi_u + \tilde{c}_{22} \psi_v + \tilde{c}_{24} \psi_w + \varepsilon_8, \\ \psi_v \gamma \hat{C}_3 = \tilde{c}_{45} \psi_u + \tilde{c}_{44} \psi_v + \tilde{c}_{34} \psi_w + \varepsilon_9, \\ \psi_v (\alpha \hat{C}_1 + \beta \hat{C}_2) = (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) \psi_u + 2\tilde{c}_{26} \psi_v + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \psi_w + \varepsilon_{10}, \\ \psi_v (\alpha \hat{C}_1 + \gamma \hat{C}_3) = (\tilde{c}_{56} + \tilde{c}_{14}) \psi_u + 2\tilde{c}_{46} \psi_v + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_w + \varepsilon_{11}, \\ \psi_v (\beta \hat{C}_2 + \gamma \hat{C}_3) = (\tilde{c}_{25} + \tilde{c}_{46}) \psi_u + 2\tilde{c}_{24} \psi_v + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) \psi_w + \varepsilon_{12}, \end{cases} \tag{5.69}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_w \alpha \widehat{C}_1 = \tilde{c}_{15} \psi_u + \tilde{c}_{56} \psi_v + \tilde{c}_{55} \psi_w + \varepsilon_{13}, \\ \psi_w \beta \widehat{C}_2 = \tilde{c}_{46} \psi_u + \tilde{c}_{24} \psi_v + \tilde{c}_{44} \psi_w + \varepsilon_{14}, \\ \psi_w \gamma \widehat{C}_3 = \tilde{c}_{35} \psi_u + \tilde{c}_{34} \psi_v + \ddot{c}_{33} \psi_w + \varepsilon_{15}, \\ \psi_w (\alpha \widehat{C}_1 + \beta \widehat{C}_2) = (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \psi_u + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \psi_v + 2\tilde{c}_{45} \psi_w + \varepsilon_{16}, \\ \psi_w (\alpha \widehat{C}_1 + \gamma \widehat{C}_3) = (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \psi_u + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_v + 2\tilde{c}_{35} \psi_w + \varepsilon_{17}, \\ \psi_w (\beta \widehat{C}_2 + \gamma \widehat{C}_3) = (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_u + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) \psi_v + 2\tilde{c}_{34} \psi_w + \varepsilon_{18}. \end{array} \right. \quad (5.70)$$

Для визначення сумісності цієї системи досить перевірити ранг матриці. Детальні дослідження проведені в Додатку Б5.

Зауважимо, що в силу неперервної залежності розв'язків від правої частини СЛАР (5.68)-(5.70) можемо підібрати такі значення $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{18}$, що точний розв'язок буде знаходитись саме в околі відповідного наближеного. Таким чином, можемо сформулювати наступне твердження: для будь-якого наближеного розв'язку системи (5.54)-(5.56) існує такий окіл, в якому міститься точний розв'язок цієї системи.

5.5 Випадок залежності амплітуди від густини

Розглянемо групу кристалів S, C_2, C^h [274, ст.171]. Для цієї групи є 13 вільних коефіцієнти в законі Гука. В цьому випадку ненульовими будуть коефіцієнти $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{16}, c_{22}, c_{23}, c_{26}, c_{33}, c_{36}, c_{44}, c_{45}, c_{55}, c_{66}$.

Рівняння руху запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_{45} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &+ (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}; \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2c_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_{45} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ &+ (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & c_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ & + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + (c_{45} + c_{36}) \frac{\partial v^2}{\partial x \partial z} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}; \end{aligned} \quad (5.71)$$

Будемо знаходити розв'язки системи (5.71) у вигляді локалізованих відокремлених хвиль типу δ -солітонів:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = & \psi_u(\rho, t) e^{\frac{g(x-\tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{g(y-\tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \frac{g(z-\tilde{z}(t, \rho))}{\varepsilon_3}} \\ v(x, y, z, t) = & \psi_v(\rho, t) e^{\frac{g(x-\tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{g(y-\tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \frac{g(z-\tilde{z}(t, \rho))}{\varepsilon_3}} \\ w(x, y, z, t) = & \psi_w(\rho, t) e^{\frac{g(x-\tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{g(y-\tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \frac{g(z-\tilde{z}(t, \rho))}{\varepsilon_3}} \end{aligned} \quad (5.72)$$

де $g(x)$ - невід'ємна парна функція, $g(0) = 0$, $\psi_u(t, \rho)$, $\psi_v(t, \rho)$, $\psi_w(t, \rho)$ -деякі функції, зміст яких-це амплітуда відповідних збурень (вони можуть бути як додатними так і від'ємними), $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ -деякі константи, що визначають локалізацію збурень, $\tilde{x}(t, \rho), \tilde{y}(t, \rho), \tilde{z}(t, \rho)$ -функції, що визначають траєкторію солітонів.

$$\text{Нехай } u(x, y, z, t) = \psi_u(\rho, t) e^{\frac{g(x-\tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{g(y-\tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \frac{g(z-\tilde{z}(t, \rho))}{\varepsilon_3}} = \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t).$$

Тоді продиференціювавши останнє співвідношення та підставивши в систему (5.71), отримуємо результуючу систему рівнянь (див. Додаток Б4). Розглянемо окремі випадки.

5.6 Проблеми поширення хвилі в області стрімкого зростання густини середовища

5.6.1 Випадок, коли “початковий” вектор швидкості направлений по нормалі до поверхні сталої густини

Розглянемо випадок, коли густина середовища та вектор швидкості направлені вздовж осі ОХ. Відповідна результуюча система має вигляд

(Б4.2)-(Б4.34). Нехай $\rho(x, y, z) = \rho(x)$, $\psi_u = \psi_u(x, t)$, $\psi_v = \psi_v(x, t)$, $\psi_w = \psi_w(x, t)$, $\tilde{x}(\cdot) = \tilde{x}(x, t)$, $\tilde{y}(\cdot) = const$.

Тоді з системи (Б4.1)-(Б4.13) отримуємо:

$$\begin{aligned}
 \rho \psi''_u(t) &= c_{11} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2} + c_{16} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial x^2}, \\
 -\rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}'^2(\cdot) &= -c_{11} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{16} \psi_v(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right)^2, \\
 0 &= -c_{66} \psi_u(\cdot) - c_{26} \psi_v(\cdot), \\
 0 &= -c_{55} \psi_u(\cdot) - c_{45} \psi_v(\cdot), \\
 0 &= -(c_{12} + c_{66}) \psi_v(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1\right) + c_{16} \psi_u(\cdot), \\
 0 &= -(c_{13} + c_{55}) \psi_w(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1\right), \\
 0 &= (c_{36} + c_{45}) \psi_w(\cdot), \\
 2\rho \psi'_u(\cdot) \tilde{x}'(\cdot) + \rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}''(\cdot) &= c_{11} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, \rho) - 1\right) + \psi_u(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(\cdot)\right).
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

З системи (Б4.14) - (Б4.25) отримуємо :

$$\begin{aligned}
 \rho \psi''_v(t) &= c_{66} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial x^2} + c_{16} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2}, \\
 -\rho \psi_v(\cdot) \tilde{x}'^2(\cdot) &= -c_{66} \psi_v(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{16} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right)^2, \\
 0 &= -c_{22} \psi_v(\cdot) - c_{26} \psi_u(\cdot), \\
 0 &= -c_{44} \psi_v(\cdot) - c_{26} \psi_u(\cdot), \\
 0 &= 2c_{26} \psi_v(\cdot) + 2(c_{12} + c_{66}) \psi_u(\cdot), \\
 0 &= (c_{36} + c_{45}) \psi_w(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right), \\
 0 &= (c_{23} + c_{44}) \psi_w(\cdot),
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

$$\begin{aligned}
2\rho\psi'_v(t)\tilde{x}'(t) + \rho\psi_v(t)\tilde{x}''(t) &= c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho) - 1\right) + \psi_v(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right) + \\
+ c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right), \\
0 &= -2c_{26}\frac{\partial\psi_v}{\partial x} - (c_{12} + c_{66})\frac{\partial\psi_u}{\partial x} - (c_{23} + c_{44})\frac{\partial\psi_w}{\partial x}, \\
0 &= -(c_{36} + c_{45})\frac{\partial\psi_w}{\partial x}.
\end{aligned}$$

З системи (Б4.26-Б4.37) отримуємо систему:

$$\begin{aligned}
\rho\psi''_w(t) &= c_{55}\frac{\partial^2\psi_w}{\partial x^2}, \\
-\rho\psi_w(\cdot)\tilde{x}^{12}(\cdot) &= -c_{55}\psi_w(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2, \tag{5.75} \\
0 &= -c_{44}\psi_w(\cdot), \\
0 &= c_{33}\psi_w(\cdot), \\
0 &= -2c_{45}\psi_w(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right), \\
0 &= (c_{36} + c_{45})\psi_u(\cdot) + (c_{23} + c_{44})\psi_v(\cdot), \\
2\rho\psi'_w(\cdot)\tilde{x}'(\cdot) + \rho\psi_w(\cdot)\tilde{x}''(\cdot) &= c_{55}\left(2\frac{\partial\psi_w}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + \psi_w(\cdot)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial x^2}\right), \\
0 &= -2c_{45}\frac{\partial\psi_w}{\partial x}, \\
0 &= -(c_{13} + c_{55})\frac{\partial\psi_u}{\partial x} - (c_{45} + c_{36})\frac{\partial\psi_v}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Нехай $\psi_w = 0$. Тоді система (5.73) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
\rho\psi''_u(t) &= c_{11}\frac{\partial^2\psi_u}{\partial x^2} + c_{16}\frac{\partial^2\psi_v}{\partial x^2}, \\
-\rho\psi_u(\cdot)\tilde{x}^{12}(\cdot) &= -c_{11}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{16}\psi_v(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= -c_{66}\psi_u(\cdot) - c_{26}\psi_v(\cdot), \tag{5.76}
\end{aligned}$$

$$0 = -c_{55}\psi_u(\cdot) - c_{45}\psi_v(\cdot),$$

$$0 = -(c_{12} + c_{66})\psi_v(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + c_{16}\psi_u(\cdot),$$

$$2\rho\psi'_u(\cdot)\tilde{x}'(\cdot) + \rho\psi_u(\cdot)\tilde{x}''(\cdot) = c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho) - 1\right) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right).$$

Система (5.74) матиме вигляд:

$$\rho\psi''_v(t) = c_{66}\frac{\partial^2\psi_v}{\partial x^2} + c_{16}\frac{\partial^2\psi_u}{\partial x^2},$$

$$-\rho\psi_v(\cdot)\tilde{x}'^2(\cdot) = -c_{66}\psi_v(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{16}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2,$$

$$0 = -c_{22}\psi_v(\cdot) - c_{26}\psi_u(\cdot), \quad (5.77)$$

$$0 = -c_{44}\psi_v(\cdot) - c_{26}\psi_u(\cdot),$$

$$0 = 2c_{26}\psi_v(\cdot) + 2(c_{12} + c_{66})\psi_u(\rho, t),$$

$$2\rho\psi'_v(t)\tilde{x}'(t) + \rho\psi_v(t)\tilde{x}''(t) = c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho) - 1\right) + \psi_v(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right),$$

$$0 = -2c_{26}\frac{\partial\psi_v}{\partial x} - (c_{12} + c_{66})\frac{\partial\psi_u}{\partial x}.$$

З системи (5.75) отримуємо співвідношення:

$$0 = (c_{36} + c_{45})\psi_u(\cdot) + (c_{23} + c_{44})\psi_v(\cdot),$$

$$0 = -(c_{13} + c_{55})\frac{\partial\psi_u}{\partial x} - (c_{45} + c_{36})\frac{\partial\psi_v}{\partial x}. \quad (5.78)$$

Нехай $\psi_w = 0, \psi_v = 0$. Тоді з систем (5.76)- (5.78) отримуємо:

$$\rho\psi''_u(t) = c_{11}\frac{\partial^2\psi_u}{\partial x^2},$$

$$-\rho\tilde{x}'^2(\cdot) = -c_{11}\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2,$$

$$0 = -c_{66}\psi_u(\cdot),$$

$$0 = -c_{55}\psi_u(\cdot),$$

$$0 = c_{16}\psi_u(\cdot),$$

$$2\rho\psi'_u(\cdot)\tilde{x}'(\cdot) + \rho\psi_u(\cdot)\tilde{x}''(\cdot) = c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho) - 1\right) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right),$$

$$0 = c_{16}\frac{\partial^2\psi_u}{\partial x^2},$$

$$0 = -c_{16}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2,$$

$$0 = c_{26}\psi_u(\cdot),$$

$$0 = c_{26}\psi_u(\cdot),$$

$$0 = 2(c_{12} + c_{66})\psi_u(\rho, t),$$

$$0 = -(c_{12} + c_{66})\frac{\partial\psi_u}{\partial x},$$

$$0 = (c_{36} + c_{45})\psi_u(\cdot),$$

$$0 = -(c_{13} + c_{55})\frac{\partial\psi_u}{\partial x}.$$

Звідси отримуємо умови:

$$c_{66} = c_{55} = c_{16} = c_{26} = c_{12} = 0,$$

$$c_{36} + c_{45} = 0,$$

$$c_{13} = 0.$$

З врахуванням останніх значень пружних сталих маємо систему:

$$\begin{aligned} \rho\psi''_u(t, x) &= c_{11}\frac{\partial^2\psi_u}{\partial x^2}, \\ -\rho\tilde{x}''(\cdot) &= -c_{11}\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2, \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$2\rho\psi'_u(\cdot)\tilde{x}'(\cdot) + \rho\psi_u(\cdot)\tilde{x}''(\cdot) = c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho) - 1\right) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right).$$

При цьому виконуються умови:

$$c_{66} = c_{55} = c_{15} = c_{26} = c_{45} = 0,$$

$$c_{12} = c_{13} = c_{36} = 0. \quad (5.80)$$

Зауважимо, що при таких значеннях пружних сталих $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} = 0$, що відповідає випадку рівномірного гідростатичного стискання. Отже, маємо систему, що визначає амплітудні характеристики та швидкість руху локалізованого солітоноподібного збурення:

$$\rho \psi''_u(t, x) = c_{11} \frac{\partial^2 \psi_u(t, x)}{\partial x^2},$$

$$\tilde{x}'(t, x) = \chi(c_{11} / \rho)^{1/2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x)\right), \chi \in \{-1, 1\}, \quad (5.81)$$

$$2\rho \psi'_u(t, x) \tilde{x}'(t, x) + \rho \psi_u(t, x) \tilde{x}''(t, x) = c_{11} \left(2 \frac{\partial \psi_u(t, x)}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x) - 1\right) + \psi_u(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(t, x)\right).$$

Звідси

$$\rho \psi_u(t, x) \tilde{x}''(t, x) = c_{11} \left(2 \frac{\partial \psi_u(t, x)}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x) - 1\right) + \psi_u(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(t, x)\right) - \chi 2\rho \psi'_u(t, x) (c_{11} / \rho)^{1/2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x)\right);$$

$$\tilde{x}''(t, x) = -\chi (c_{11} / \rho)^{1/2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \tilde{x}(t, \rho) =$$

$$= -\chi (c_{11} / \rho)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi (c_{11} / \rho)^{1/2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x)\right)\right) =$$

$$= -c_{11} \rho^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho^{-1/2} - \rho^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, \rho)\right) =$$

$$= -c_{11} \rho^{-1/2} \left(-\frac{1}{2} \rho^{-3/2} \rho' + \frac{1}{2} \rho^{-3/2} \rho' \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x) - \rho^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(t, x)\right) =$$

$$= c_{11} \left(\frac{1}{2} \rho^{-2} \rho' - \frac{1}{2} \rho^{-2} \rho' \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x) + \rho^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(t, x)\right);$$

$$c_{11} \psi_u(t, x) \left(\frac{1}{2} \rho^{-1} \rho' - \frac{1}{2} \rho^{-1} \rho' \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(t, x)\right) =$$

$$= c_{11} \left(2 \frac{\partial \psi_u(t, x)}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x) - 1\right) + \psi_u(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(t, x)\right) - \chi 2\rho \psi'_u(t, x) (c_{11} / \rho)^{1/2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x)\right);$$

$$\begin{aligned}
& c_{11}\psi_u(t,x)\left(\frac{1}{2}\rho^{-1}\rho' - \frac{1}{2}\rho^{-1}\rho' \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t,x)\right) = \\
& = c_{11}2 \frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t,x) - 1\right) - \chi 2\rho \psi'_u(t,x)(c_{11}/\rho)^{1/2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t,x)\right); \\
& c_{11}\psi_u(t,x)\frac{1}{2}\rho^{-1}\rho' + c_{11}2 \frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x} + \chi 2\rho \psi'_u(t,x)(c_{11}\rho)^{1/2} = 0.
\end{aligned}$$

Таким чином, для опису амплітудних характеристик та швидкості маємо систему:

$$\begin{aligned}
\rho \psi''_u(t,x) &= c_{11} \frac{\partial^2 \psi_u(t,x)}{\partial x^2}, \\
\tilde{x}'(t,x) &= \chi(c_{11}/\rho)^{1/2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t,x)\right),
\end{aligned} \tag{5.82}$$

$$c_{11}\psi_u(t,x)\frac{1}{2}\rho^{-1}\rho' + c_{11}2 \frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x} + \chi 2\rho \psi'_u(t,x)(c_{11}\rho)^{1/2} = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned}
& -c_{11}^{1/2}\psi_u(t,x)\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho' - c_{11}^{1/2}\rho^{-1/2} \frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x} = \chi \psi'_u(t,x), \\
& \psi'_u(t,x) = -\chi c_{11}^{1/2}\psi_u(t,x)\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho' - \chi c_{11}^{1/2}\rho^{-1/2} \frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x}, \\
& \psi''_u(t,x) = c_{11}^{1/2}(c_{11}^{1/2}\psi_u(t,x)\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho' + c_{11}^{1/2}\rho^{-1/2} \frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x})\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho' - \\
& -\chi c_{11}^{1/2}\rho^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\chi c_{11}^{1/2}\psi_u(t,x)\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho' - \chi c_{11}^{1/2}\rho^{-1/2} \frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x}\right) = \\
& = c_{11}\psi_u(t,x)\frac{1}{16}\rho^{-3}(\rho')^2 + \frac{1}{4}c_{11}\rho^{-2}\rho' \frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x} + \\
& + c_{11}\rho^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_u(t,x)\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho' + \rho^{-1/2} \frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x}\right) = \\
& = c_{11}\psi_u(t,x)\frac{1}{16}\rho^{-3}(\rho')^2 + \frac{1}{4}c_{11}\rho^{-2}\rho' \frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x} + \\
& + c_{11}\rho^{-1/2} \left(\frac{\partial \psi_u(t,x)}{\partial x}\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho' - \psi_u(t,x)\frac{3}{8}\rho^{-5/2}(\rho')^2 + \psi_u(t,x)\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho'' - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho'\frac{\partial\psi_u(t,x)}{\partial x} + \rho^{-1/2}\frac{\partial^2\psi_u(t,x)}{\partial x^2}) = \\
& = c_{11}\psi_u(t,x)\frac{1}{16}\rho^{-3}(\rho')^2 + \frac{1}{4}c_{11}\rho^{-2}\rho'\frac{\partial\psi_u(t,x)}{\partial x} + \\
& + c_{11}\frac{\partial\psi_u(t,x)}{\partial x}\frac{1}{4}\rho^{-2}\rho' - c_{11}\psi_u(t,x)\frac{3}{8}\rho^{-3}(\rho')^2 + c_{11}\psi_u(t,x)\frac{1}{4}\rho^{-2}\rho'' - \\
& - \frac{1}{2}c_{11}\rho^{-2}\rho'\frac{\partial\psi_u(t,x)}{\partial x} + c_{11}\rho^{-1}\frac{\partial^2\psi_u(t,x)}{\partial x^2} = \\
& = c_{11}\rho^{-1}\frac{\partial^2\psi_u(t,x)}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_u(t,x)}{\partial x}c_{11}\left(\frac{1}{4}\rho^{-2}\rho' + \frac{1}{4}\rho^{-2}\rho' - \frac{1}{2}\rho^{-2}\rho'\right) + \\
& + c_{11}\psi_u(t,x)\left(\frac{1}{16}\rho^{-3}(\rho')^2 - \frac{3}{8}\rho^{-3}(\rho')^2 + \frac{1}{4}\rho^{-2}\rho''\right) = \\
& = c_{11}\rho^{-1}\frac{\partial^2\psi_u(t,x)}{\partial x^2} + c_{11}\psi_u(t,x)\left(\frac{1}{4}\rho^{-2}\rho'' - \frac{5}{16}\rho^{-3}(\rho')^2\right).
\end{aligned}$$

Звідси

$$c_{11}\rho^{-1}\frac{\partial^2\psi_u(t,x)}{\partial x^2} + c_{11}\psi_u(t,x)\left(\frac{1}{4}\rho^{-2}\rho'' - \frac{5}{16}\rho^{-3}(\rho')^2\right) = c_{11}\rho^{-1}\frac{\partial^2\psi_u(t,x)}{\partial x^2},$$

$$\psi_u(t,x)\left(\frac{1}{4}\rho'' - \frac{5}{16}\rho^{-1}(\rho')^2\right) = 0,$$

$$\frac{1}{4}\rho'' - \frac{5}{16}\rho^{-1}(\rho')^2 = 0.$$

З врахуванням цього отримуємо систему:

$$\tilde{x}'(t,x) = \chi(c_{11}/\rho)^{1/2}\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,x)\right),$$

$$\psi_u'(t,x) = -\chi(c_{11})^{1/2}\psi_u(t,x)\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho' - \chi(c_{11})^{1/2}\rho^{-1/2}\frac{\partial\psi_u(t,x)}{\partial x}, \quad (5.83)$$

$$4\rho'' - 5\rho^{-1}(\rho')^2 = 0.$$

Розв'язуємо рівняння для густини:

$$\rho\rho'' - \frac{5}{4}(\rho')^2 = 0.$$

Нехай $\rho' = f(\rho)$. Тоді $\rho'' = f' f$, $\rho f' f - \frac{5}{4}(f)^2 = 0$, $f' - \frac{5}{4\rho} f = 0$.

Звідси $f(\rho) = ce^{\frac{5}{4} \ln \rho} = c\rho^{\frac{5}{4}}$, $\rho' = c\rho^{\frac{5}{4}}$, $\rho(x) = \frac{1}{(cx+a)^4}$, $\rho'(x) = -\frac{4c}{(cx+a)^5}$.

Отже, маємо:

$$\tilde{x}'(t, x) = \chi(c_{11})^{1/2} (cx+a)^2 \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{x}(t, x) + \chi(c_{11} / \rho)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x) = \chi(c_{11} / \rho)^{1/2}.$$

Для знаходження загального розв'язку цього рівняння використаємо відомий

результат [252]. Загальний розв'язок рівняння $\frac{\partial}{\partial \xi} w + a \frac{\partial}{\partial \eta} w = f(\xi, \eta)$ має

вигляд:

$w(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} f(t, \eta - a\xi + at) dt + \Phi(\eta - a\xi)$, де Φ -довільна функція. Тоді

$$\xi = \int \frac{dt}{f(t)} = t,$$

$$\eta = \int \frac{dx}{g(x)} = \int \frac{dx}{\pm (c_{11} / \rho)^{1/2}} = \pm c_{11}^{-1/2} \int \rho^{1/2} dx,$$

загальний розв'язок нашого рівняння матиме вигляд:

$$\tilde{x}(t, x) = x + \Phi\left(x - \int \frac{dx}{\chi(c_{11} / \rho)^{1/2}}\right) = x + \Phi\left(x - \chi \frac{1}{(c_{11})^{1/2}} \int \rho^{1/2} dx\right),$$

де Φ -довільна функція.

Оскільки $\rho(x) = \frac{1}{(cx+a)^4}$, то з останнього виразу маємо:

$$\tilde{x}(t, x) = x + \Phi\left(x - \chi \frac{1}{(c_{11})^{1/2}} \int \frac{1}{(cx+a)^2} dx\right) = x + \Phi\left(x + \chi \frac{1}{(c_{11})^{1/2} c(cx+a)}\right).$$

Розв'яжемо друге рівняння системи (5.84):

$$\psi'_u(t, x) + \chi(c_{11})^{1/2} (cx+a)^2 \frac{\partial \psi_u(t, x)}{\partial x} = \chi(c_{11})^{1/2} c(cx+a) \psi_u(t, x).$$

Скористаємось відомим результатом для диференціального рівняння виду:

$$f(t) \frac{\partial w}{\partial t} + g(x) \frac{\partial w}{\partial x} = (h_1(t) + h_2(x))w:$$

$$w = \exp\left(\int \frac{h_1(t)}{f(t)} dt + \int \frac{h_2(x)}{g(x)} dx\right) \Phi\left(\int \frac{dt}{f(t)} - \int \frac{dx}{g(x)}\right), \text{ де } \Phi \text{-довільна функція.}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \psi_u(t, x) &= \exp\left(\int \frac{\chi(c_{11})^{1/2} c(cx+a)}{\chi(c_{11})^{1/2} (cx+a)^2} dx\right) \Phi\left(t - \int \frac{dx}{\chi(c_{11})^{1/2} (cx+a)^2}\right) = \\ &= \exp\left(\int \frac{c}{cx+a} dx\right) \Phi\left(t + \frac{1}{\chi c(c_{11})^{1/2} (cx+a)}\right) = (cx+a) \Phi\left(t + \frac{1}{\chi c(c_{11})^{1/2} (cx+a)}\right). \end{aligned}$$

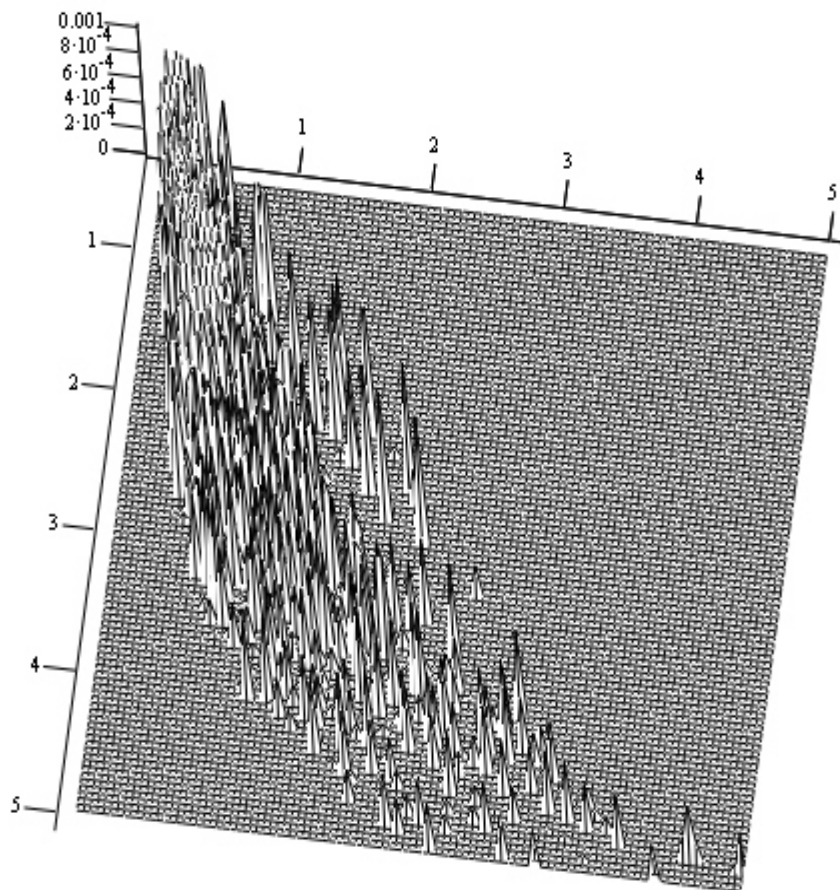


Рис. 5.1 Ілюстрація руху відокремленої хвилі

Проілюструємо поведінку солітоноподібної хвилі для випадку $c_{11} = 1$,

$\rho(x) = \frac{10}{(x-6)^4}$, $\chi = 1$, $g(x) = x^2$ та при наступних крайових умовах:

$$\tilde{x}(x,0) = 0.1, \tilde{x}(0,t) = 0.1, \psi_u(x,0) = 0.5, \psi_u(0,t) = 0.5.$$

Також для спрощення вважатимемо, що хвиля рухається у площині, перпендикулярній до осі OZ. Тоді матимемо функцію, що описує характер хвилі деформації, зображену на рис. 5.1.

Аналіз поверхні на рис. 5.1 показує, що у випадку нелінійного закону зміни густини має місце ціла низка явищ, пов'язаних з розщепленням солітона та виникнення низки нових хвиль в його фарватері. Виникає цілий цуг хвиль, які з часом зменшують свою швидкість та амплітуду.

5.6.2 Випадок, коли “початковий” вектор швидкості направлений під заданим кутом до поверхні сталої густини

Нехай $\rho(x,y,z) = \rho(x)$, $\psi_u = \psi_u(x,y,t)$, $\psi_v = \psi_v(x,y,t)$, $\psi_w = \psi_w(x,y,t)$,
 $\tilde{x}(\cdot) = \tilde{x}(x,y,t)$, $\tilde{y}(\cdot) = \tilde{y}(x,y,t)$.

З першого рівняння системи (5.71) та з врахуванням системи (Б4.1)-(Б4.13) отримуємо:

$$\begin{aligned} \rho \psi_u''(t) &= c_{11} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y^2} + c_{16} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y \partial x} + c_{16} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2} + c_{26} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial y^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial y \partial x}, \\ -\rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}'^2(\cdot) &= -c_{11} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{66} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot)\right)^2 + \\ &+ c_{16} \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right) - c_{16} \psi_v(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right)^2 - \\ &- c_{26} \psi_v(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot)\right)^2 + (c_{12} + c_{66}) \psi_v(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot)\right), \\ -\rho \psi_u(\cdot) \tilde{y}'^2(\cdot) &= -c_{11} \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot)\right)^2 - c_{66} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot)\right)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(c_{12} + c_{66})\psi_v(.) \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot)\right) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + \\
& + c_{16}\psi_u(.) \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot)\right) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) - c_{16}\psi_v(.) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot)\right)^2 - c_{26}\psi_v.(1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot))^2, \\
0 & = -c_{55}\psi_u(.) - c_{45}\psi_v(.), \tag{5.84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\rho\psi_u(.)\tilde{x}'(\cdot)\tilde{y}'(\cdot) & = 2c_{11}\psi_u.(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + \\
& + 2c_{66}\psi_u.(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) (\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1) + \\
& + c_{16}\psi_u.(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + (\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1) (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1)) + \\
& + 2c_{16}\psi_v.(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + 2c_{26}\psi_v.(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) (\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1) + \\
& + (c_{12} + c_{66})\psi_v.(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + (\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1) (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1)),
\end{aligned}$$

$$0 = -(c_{13} + c_{55})\psi_w.(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1) - (c_{36} + c_{45})\psi_w.(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot)),$$

$$0 = -(c_{13} + c_{55})\psi_w.(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) - 1) - (c_{36} + c_{45})\psi_w.(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1),$$

$$2\rho\psi'_u(.)\tilde{x}'(\cdot) + \rho\psi_u(.)\tilde{x}''(\cdot) = c_{11} (2 \frac{\partial \psi_u}{\partial x} (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, \rho) - 1) +$$

$$+ \psi_u(.) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(\cdot)) + c_{66} (2 \frac{\partial \psi_u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) + \psi_u(.) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{x}(\cdot)) +$$

$$+ c_{16} (\frac{\partial \psi_u}{\partial y} (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1) + \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) + \psi_u(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \tilde{x}(\cdot)) +$$

$$+ c_{16} (2 \frac{\partial \psi_v}{\partial x} (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1) + \psi_v(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(\cdot)) +$$

$$+ (c_{12} + c_{66}) (\frac{\partial \psi_v}{\partial y} (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1) + \psi_v(.) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \tilde{x}(\cdot) + \frac{\partial \psi_v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot)) +$$

$$+ c_{26} (2 \frac{\partial \psi_v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) + \psi_v(.) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{x}(\cdot)) + (c_{36} + c_{45}) (\frac{\partial \psi_w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) + \psi_w(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{x}(\cdot)),$$

$$\begin{aligned}
& 2\rho\psi'_u(\cdot)\tilde{y}'(\cdot) + \rho\psi_u(\cdot)\tilde{y}''(\cdot) = c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(t,\rho) + \right. \\
& + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}(\cdot) + c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{y}(\cdot) + \right. \\
& + c_{55}\psi_u(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + c_{16}\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) - 1\right) + \frac{\partial\psi_v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) + \psi_v(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right) + \\
& + c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) - 1\right) + \psi_v(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}(\cdot) + c_{26}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right) + \psi_v(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{y}(\cdot) + \right. \\
& \left. + (c_{12} + c_{66})\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \psi_v(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \frac{\partial\psi_v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) + (c_{36} + c_{45})\frac{\partial\psi_w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)\right).
\end{aligned}$$

З другого рівняння системи (5.72) та системи (Б4.14)-(Б4.25) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\rho\psi''_v(t) &= c_{66}\frac{\partial^2\psi_v}{\partial x^2} + c_{22}\frac{\partial^2\psi_v}{\partial y^2} + 2c_{26}\frac{\partial^2\psi_v}{\partial y\partial x} + (c_{12} + c_{66})\frac{\partial^2\psi_u}{\partial y\partial x} + c_{16}\frac{\partial^2\psi_v}{\partial x^2} + c_{26}\frac{\partial^2\psi_u}{\partial y^2}, \\
-\rho\psi_v(t)\tilde{x}^{\prime 2}(\cdot) &= -c_{66}\psi_v(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{22}\psi_v(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right)^2 + \\
& + 2c_{26}\psi_v(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right) + \\
& + (c_{12} + c_{66})\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(t,\rho) - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right) - \\
& - c_{16}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{26}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right)^2, \\
-\rho\psi_v(\cdot)\tilde{y}^{\prime 2}(\cdot) &= -c_{66}\psi_v(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2 - c_{22}\psi_v(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2 + \\
& + 2c_{26}\psi_v(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \\
& + (c_{12} + c_{66})\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) - c_{16}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2 - c_{26}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= -c_{44}\psi_v(\cdot) - c_{26}\psi_u(\cdot),
\end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\begin{aligned}
& 2\rho\psi_v(\cdot)\tilde{x}'(t)\tilde{y}'(t) = 2c_{66}\psi_v(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) + \\
& + 2c_{22}\psi_v(\cdot)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right) + \\
& + 2c_{26}\psi_v(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(t,\rho) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right)\right) + \\
& + (c_{12} + c_{66})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right)\right) + \\
& + 2c_{16}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho) - 1\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(t,\rho) + 2c_{26}\psi_v(t)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(t,\rho) - 1\right)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(t,\rho), \\
& 0 = -(c_{36} + c_{45})\psi_w(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) - (c_{23} + c_{44})\psi_w(\cdot)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot), \\
& 0 = -(c_{36} + c_{45})\psi_w(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) - (c_{23} + c_{44})\psi_w(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right), \\
& 2\rho\psi'_v(t)\tilde{x}'(t) + \rho\psi_v(t)\tilde{x}''(t) = c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho) - 1\right) + \right. \\
& \left. + \psi_v(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right) + c_{22}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) + \psi_v(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{x}(\cdot)\right) + \\
& + 2c_{26}\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + \psi_v(\cdot)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial y\partial x} + \frac{\partial\psi_v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right) + \\
& + (c_{12} + c_{66})\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial y\partial x} + \frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right) + \\
& + c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right) + c_{26}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{x}(\cdot)\right) + \\
& + (c_{23} + c_{44})\left(\frac{\partial\psi_w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) + \psi_w(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{x}(\cdot)\right); \\
& 2\rho\psi'_v(\cdot)\tilde{y}'(\cdot) + \rho\psi_v(\cdot)\tilde{y}''(\cdot) = c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \psi_v(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}(\cdot)\right) + \\
& + c_{22}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right) + \psi_v(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{y}(\cdot)\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2c_{26}\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)+\psi_v(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\tilde{y}(\cdot)+\frac{\partial\psi_v}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(t,\rho)-1\right)\right)+ \\
& +(c_{12}+c_{66})\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)+\psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\tilde{y}(\cdot)+\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(t,\rho)-1\right)\right)+ \\
& +c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)+\psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}(\cdot)\right)+ \\
& +c_{26}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right)+\psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{y}(\cdot)\right)+(c_{23}+c_{44})\left(\frac{\partial\psi_w}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right)\right), \\
0 & = -(c_{36}+c_{45})\frac{\partial\psi_w}{\partial x}-(c_{23}+c_{44})\frac{\partial\psi_w}{\partial y}.
\end{aligned}$$

З третього рівняння системи (5.72) та системи (Б4.26)-(Б4.37) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\rho\psi_w''(t) & = c_{55}\frac{\partial^2\psi_w}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2\psi_w}{\partial y^2}+2c_{45}\frac{\partial^2\psi_w}{\partial y\partial x}, \\
-\rho\psi_w(\cdot)\tilde{x}'^2(\cdot) & = -c_{55}\psi_w(\cdot)\left(1-\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2+c_{44}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right)^2+ \\
& +2c_{45}\psi_w(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)-\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right), \\
-\rho\psi_w(t)\tilde{y}'^2(t) & = -c_{55}\psi_w(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2-c_{44}\psi_w(\cdot)\left(1-\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2+ \\
& +2c_{45}\psi_w(\cdot)\left(1-\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot), \\
0 & = c_{33}\psi_w(\cdot),
\end{aligned} \tag{5.86}$$

$$\begin{aligned}
2\rho\psi_w(\cdot)\tilde{x}'(\cdot)\tilde{y}'(\cdot) & = 2c_{55}\psi_w(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)+2c_{44}\psi_w(\cdot)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right)+ \\
& +2c_{45}\psi_w(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\right), \\
0 & = -(c_{13}+c_{55})\psi_u(\cdot)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)-(c_{36}+c_{45})\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right)- \\
& -(c_{45}+c_{36})\psi_v(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)-(c_{23}+c_{44})\psi_v(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -(c_{13} + c_{55})\psi_u(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) - (c_{36} + c_{45})\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right) - \\
&-(c_{45} + c_{36})\psi_v(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) - (c_{23} + c_{44})\psi_v(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right), \\
2\rho\psi'_w(\cdot)\tilde{x}'(\cdot) + \rho\psi_w(\cdot)\tilde{x}''(\cdot) &= c_{55}\left(2\frac{\partial\psi_w}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + \right. \\
&+\psi_w(\cdot)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial x^2} + c_{44}\left(2\frac{\partial\psi_w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) + \psi_w(\rho, t)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial y^2}\right) + \\
&+ 2c_{45}\left(\frac{\partial\psi_w}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + \psi_w(\cdot)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial y\partial x} + \frac{\partial\psi_w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right) + \\
&+ (c_{36} + c_{45})\psi_u(\cdot)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial y^2} + (c_{23} + c_{44})\psi_v(\cdot)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial y^2}, \\
2\rho\psi'_w(\cdot)\tilde{y}'(\cdot) + \rho\psi_w(\cdot)\tilde{y}''(\cdot) &= c_{55}\left(2\frac{\partial\psi_w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \psi_w(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}(\cdot)\right) + \\
&+ c_{44}\left(2\frac{\partial\psi_w}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(t, \rho) - 1\right) + \psi_w(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{y}(\cdot)\right) + \\
&+ 2c_{45}\left(\frac{\partial\psi_w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \psi_w(\rho, t)\frac{\partial^2\tilde{y}(\cdot)}{\partial y\partial x} + \frac{\partial\psi_w}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right)\right), \\
0 &= -(c_{13} + c_{55})\frac{\partial\psi_u}{\partial x} - (c_{36} + c_{45})\frac{\partial\psi_u}{\partial y} - (c_{45} + c_{36})\frac{\partial\psi_v}{\partial x} - (c_{23} + c_{44})\frac{\partial\psi_v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Нехай $\psi_v = 0$, $\psi_w = 0$. Тоді з рівняння (5.84) отримуємо систему:

$$\begin{aligned}
\rho\psi''_u(t) &= c_{11}\frac{\partial^2\psi_u}{\partial x^2} + c_{66}\frac{\partial^2\psi_u}{\partial y^2} + c_{16}\frac{\partial^2\psi_u}{\partial y\partial x} + c_{16}\frac{\partial^2\psi_u}{\partial x^2}, \\
-\rho\psi_u(\cdot)\tilde{x}'^2(\cdot) &= -c_{11}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{66}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right)^2 + c_{16}\psi_u(\cdot)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right), \\
-\rho\psi_u(\cdot)\tilde{y}'^2(\cdot) &= -c_{11}\psi_u(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2 - c_{66}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)\right)^2 + \\
&+ c_{16}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot), \\
0 &= -c_{55}\psi_u(\cdot),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\rho\psi_u(\cdot)\tilde{x}'(\cdot)\tilde{y}'(\cdot) &= 2c_{11}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + 2c_{66}\psi_u(\cdot)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right) + \\
&+ c_{16}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\right), \\
2\rho\psi'_u(\cdot)\tilde{x}'(\cdot) + \rho\psi_u(\cdot)\tilde{x}''(\cdot) &= c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho)-1\right) + \right. \\
&+ \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot) + c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{x}(\cdot) + \right. \\
&+ c_{16}\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right) + \frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)), \\
2\rho\psi'_u(\cdot)\tilde{y}'(\cdot) + \rho\psi_u(\cdot)\tilde{y}''(\cdot) &= c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(t,\rho) + \right. \\
&+ \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}(\cdot) + c_{55}\psi_u(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{y}(\cdot)\right).
\end{aligned} \tag{5.87}$$

З системи (5.85) отримуємо:

$$\begin{aligned}
0 &= (c_{12} + c_{66})\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(t,\rho) - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right) - \\
&- c_{16}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{26}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) - c_{16}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2 - c_{26}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= -c_{26}\psi_u(\cdot), \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\right) + \\
&+ 2c_{16}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho)-1\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(t,\rho), \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial y\partial x} + \frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right) + \\
&+ c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right) + \\
&+ c_{26}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{x}(\cdot)\right),
\end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (c_{12} + c_{66}) \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + \psi_u(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \tilde{y}(\cdot) + \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(t, \rho) - 1 \right) \right) + \\
&+ c_{16} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + \psi_u(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{y}(\cdot) \right) + \\
&+ c_{26} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(t, \rho) - 1 \right) + \psi_u(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{y}(\cdot) \right).
\end{aligned}$$

З рівняння (5.86):

$$0 = -(c_{13} + c_{55}) \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) - (c_{36} + c_{45}) \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot),$$

$$0 = -(c_{13} + c_{55}) \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) - (c_{36} + c_{45}) \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1 \right),$$

$$0 = (c_{36} + c_{45}) \psi_u(\cdot) \frac{\partial^2 \tilde{x}(\cdot)}{\partial y^2},$$

$$0 = -(c_{13} + c_{55}) \frac{\partial \psi_u}{\partial x} - (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial \psi_u}{\partial y}. \quad (5.89)$$

Звідси

$$c_{26} = c_{55} = 0,$$

$$c_{36} + c_{45} = 0.$$

Враховуючи ці умови, також можемо отримати :

$$c_{13} + c_{55} = 0.$$

Тоді рівняння (5.87) матиме вигляд:

$$\rho \psi_u''(t) = c_{11} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y^2} + c_{16} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y \partial x} + c_{16} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2},$$

$$-\rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}'^2(\cdot) = -c_{11} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) \right)^2 - c_{66} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \right)^2 + c_{16} \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) \right),$$

$$2\rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}'(\cdot) \tilde{y}'(\cdot) = 2c_{11} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + 2c_{66} \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1 \right) +$$

$$+ c_{16} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1 \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
2\rho\psi'_u(\cdot)\tilde{x}'(\cdot) + \rho\psi_u(\cdot)\tilde{x}''(\cdot) &= c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho) - 1\right) + \right. \\
&+ \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)) + c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{x}(\cdot) + \right. \\
&+ c_{16}\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + \frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)), \\
2\rho\psi'_u(\cdot)\tilde{y}'(\cdot) + \rho\psi_u(\cdot)\tilde{y}''(\cdot) &= c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(t,\rho) + \right. \\
&+ \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}(\cdot)) + c_{55}\psi_u(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{y}(\cdot)\right).
\end{aligned}$$

Система (5.88) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
0 &= (c_{12} + c_{66})\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(t,\rho) - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right) - \\
&- c_{16}\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{26}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\psi_u(\cdot)\left(1 - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot)\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) - c_{16}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(\cdot) - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right)\right) + \\
&+ 2c_{16}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho) - 1\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(t,\rho), \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2\tilde{x}(\cdot)}{\partial y\partial x} + \frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right) + \\
&+ c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot) - 1\right) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right), \\
0 &= (c_{12} + c_{66})\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{y}(t,\rho) - 1\right)\right) + \\
&+ c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\cdot) + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}(\cdot)\right).
\end{aligned}$$

У системі (5.89) виконуються всі співвідношення.

Нехай $\frac{\partial\psi_u}{\partial y} = 0$. Тоді система (5.87) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
\rho \psi''_u(t) &= c_{11} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2} + c_{16} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2}, \\
-\rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}'^2(\cdot) &= -c_{11} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{66} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot)\right)^2 + c_{16} \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right), \\
-\rho \psi_u(\cdot) \tilde{y}'^2(\cdot) &= -c_{11} \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot)\right)^2 - c_{66} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot)\right)^2 + \\
&+ c_{16} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot)\right) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot), \\
2\rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}'(\cdot) \tilde{y}'(\cdot) &= 2c_{11} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1\right) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + 2c_{66} \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1\right) + \\
&+ c_{16} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1\right)\right), \\
2\rho \psi'_u(\cdot) \tilde{x}'(\cdot) + \rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}''(\cdot) &= c_{11} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, \rho) - 1\right) + \right. \\
&+ \psi_u(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(\cdot) \left. + c_{66} (\psi_u(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{x}(\cdot)) + c_{16} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) + \psi_u(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \tilde{x}(\cdot)\right)\right), \\
2\rho \psi'_u(\cdot) \tilde{y}'(\cdot) + \rho \psi_u(\cdot) \tilde{y}''(\cdot) &= c_{11} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(t, \rho) + \right. \\
&+ \psi_u(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{y}(\cdot) \left. + c_{55} \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + c_{66} (\psi_u(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{y}(\cdot))\right).
\end{aligned}$$

Система (5.88) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
0 &= (c_{12} + c_{66}) \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(t, \rho) - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right) - \\
&- c_{16} \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot)\right)^2 - c_{26} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= (c_{12} + c_{66}) \psi_u(\cdot) \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot)\right) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) - c_{16} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot)\right)^2, \\
0 &= (c_{12} + c_{66}) \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1\right)\right) + \\
&+ 2c_{16} \psi_u(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, \rho) - 1\right) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(t, \rho),
\end{aligned}$$

$$0 = (c_{12} + c_{66})(\psi_u(\rho, t) \frac{\partial^2 \tilde{x}(\cdot)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot)) + c_{16} (2 \frac{\partial \psi_u}{\partial x} (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1) + \psi_u(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(\cdot)),$$

$$0 = (c_{12} + c_{66})(\psi_u(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \tilde{y}(\cdot) + \frac{\partial \psi_u}{\partial x} (\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(t, \rho) - 1)) +$$

$$+ c_{16} (2 \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + \psi_u(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{y}(\cdot)).$$

Нехай $c_{12} + c_{66} = 0$, $c_{16} = 0$. Тоді остання система запишеться у вигляді:

$$\rho \psi_u''(t) = c_{11} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2},$$

$$-\rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}'^2(\cdot) = -c_{11} \psi_u(\cdot) (1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot))^2 - c_{66} \psi_u(\cdot) (\frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot))^2,$$

$$-\rho \psi_u(\cdot) \tilde{y}'^2(\cdot) = -c_{11} \psi_u(\rho, t) (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot))^2 - c_{66} \psi_u(\cdot) (1 - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot))^2,$$

$$2\rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}'(\cdot) \tilde{y}'(\cdot) = 2c_{11} \psi_u(\cdot) (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot) + 2c_{66} \psi_u(\cdot) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(\cdot) (\frac{\partial}{\partial y} \tilde{y}(\cdot) - 1),$$

$$2\rho \psi_u'(\cdot) \tilde{x}'(\cdot) + \rho \psi_u(\cdot) \tilde{x}''(\cdot) = c_{11} (2 \frac{\partial \psi_u}{\partial x} (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, \rho) - 1) +$$

$$+ \psi_u(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{x}(\cdot)) + c_{66} (\psi_u(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{x}(\cdot)),$$

$$2\rho \psi_u'(\cdot) \tilde{y}'(\cdot) + \rho \psi_u(\cdot) \tilde{y}''(\cdot) = c_{11} (2 \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(t, \rho) +$$

$$+ \psi_u(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{y}(\cdot)) + c_{66} (\psi_u(\rho, t) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{y}(\cdot)).$$

Нехай $c_{66} = 0$. Тоді з останньої системи отримуємо:

$$\rho \psi_u''(t) = c_{11} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2},$$

$$-\rho \tilde{x}'^2(\cdot) = -c_{11} (1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot))^2,$$

$$-\rho \tilde{y}'^2(\cdot) = -c_{11} (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot))^2,$$

$$2\rho \tilde{x}'(\cdot) \tilde{y}'(\cdot) = 2c_{11} (\frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(\cdot) - 1) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(\cdot),$$

$$2\rho\psi'_u(\cdot)\tilde{x}'(\cdot) + \rho\psi_u(\cdot)\tilde{x}''(\cdot) = c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,\rho) - 1\right) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{x}(\cdot)\right),$$

$$2\rho\psi'_u(\cdot)\tilde{y}'(\cdot) + \rho\psi_u(\cdot)\tilde{y}''(\cdot) = c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(t,\rho) + \psi_u(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{y}(\cdot)\right).$$

Звідси

$$\tilde{x}'(t,x) = \chi(c_{11}/\rho)^{1/2}\left(1 - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(t,x)\right),$$

$$\tilde{y}'(t,x) = \chi(c_{11}/\rho)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(t,x),$$

$$\psi'_u(t,x) = -\chi(c_{11})^{1/2}\psi_u(t,x)\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho' - \chi(c_{11})^{1/2}\rho^{-1/2}\frac{\partial\psi_u(t,x)}{\partial x}, \quad (5.90)$$

$$4\rho'' - 5\rho^{-1}(\rho')^2 = 0.$$

Загальний розв'язок системи (5.90) має вигляд [252]:

$$\rho(x) = \frac{1}{(cx+a)^4}, \quad \tilde{x}(t,x) = t + \Phi\left(x + \frac{\chi}{(c_{11})^{1/2}c(cx+a)}\right),$$

$$\tilde{y}(t,x) = x - t - \Phi_1\left(x + \frac{\chi}{(c_{11})^{1/2}c(cx+a)}\right),$$

$$\psi_u(t,x) = (cx+a)\mathcal{H}\left(t + \frac{1}{\chi(c_{11})^{1/2}c}\right), \text{ де } \Phi, \Phi_1, \mathcal{H} \text{ - довільні функції, } c, a \text{ - сталі.}$$

$$\text{Розглянемо приклад. Нехай } c_{11} = 1, \rho(x) = \frac{10}{(x-6)^4}, \chi = 1,$$

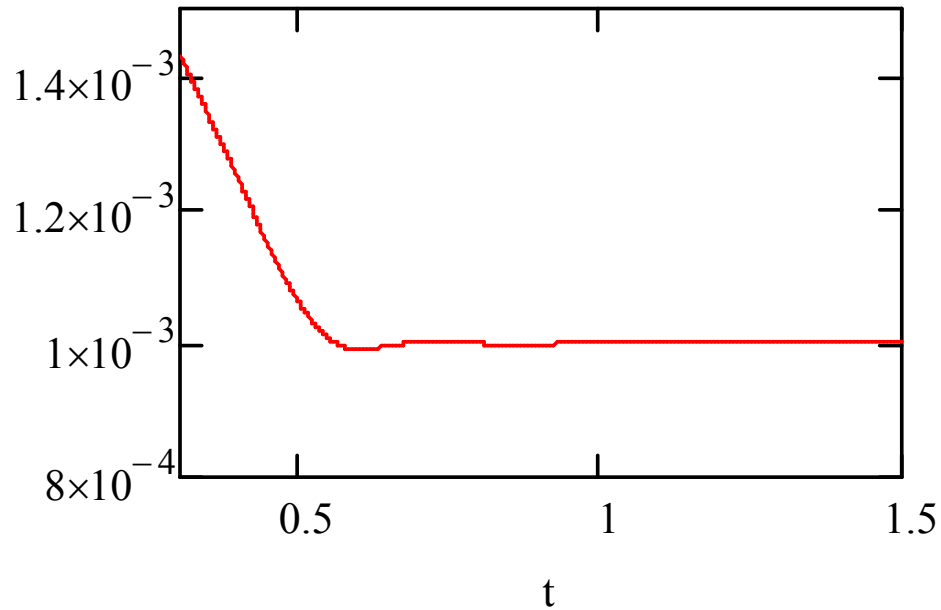
$$x \in [0,5], t \in [0,3].$$

$$\text{При цьому: } \psi'_u(t,x) = -\chi(c_{11})^{1/2}\psi_u(t,x)\frac{1}{4}\rho^{-3/2}\rho' - \chi(c_{11})^{1/2}\rho^{-1/2}\frac{\partial\psi_u(t,x)}{\partial x},$$

$$\psi_u(0,x) = 0.002, \psi_u(t,0) = 0.002.$$

Графік функції $\psi_u(t,3)$ показаний на рис.5.2.

Бачимо, що амплітудна функція на початку часового інтервалу спадає, далі спостерігаються певні коливання, після чого вона стає константою.

Рис.5.2 Графік функції $\psi_u(t,3)$

Аналогічну поведінку спостерігається для всіх значень x з інтервалу дослідження.

Розв'язок крайової задачі

$$\tilde{x}'(t, x) = \chi(c_{11}/\rho)^{1/2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x)\right), \quad \tilde{x}(0, x) = 0, \quad \tilde{x}(t, 0) = 0 \quad \text{відповідно} \quad \text{при}$$

$x = 0.1, t = 0.4$, представлені на рис.5.3-5.4.

А для задачі $\tilde{y}'(t, x) = \chi(c_{11}/\rho)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(t, x)$, $\tilde{y}(0, x) = \sin x$, $\tilde{y}(t, 0) = 0$, на рис.5.5-5.6 (відповідно при $x = 0.4, t = 0.2$).

Аналіз траєкторій показує наявність ефектів відбивання хвилі як в напрямку зростання так і спадання щільності. При цьому фрагменти траєкторій між точками відбивання близькі до прямолінійних чи спіралей. Зауважимо, що при сталій густині матимемо прямолінійні траєкторії.

Очевидно, що для визначення абсциси точки максимуму x_{\max} збурення необхідно розв'язати рівняння $x - \tilde{x}(x, t) = 0$. Звідси $y_{\max} = \tilde{y}(x_{\max}, t)$.

На рис. 5.7 представлена множина точок, на якій досягає максимальне значення функція $W = W(x, y, z, t)$.

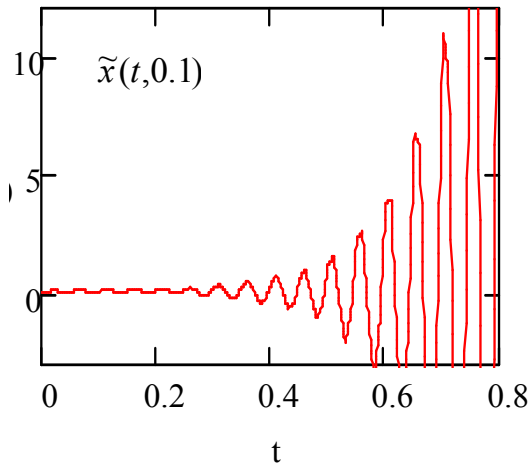


Рис.5.3 Графік $\tilde{x}(t,0.1)$

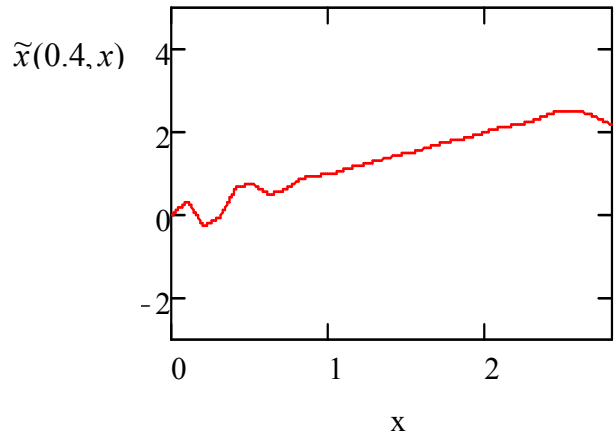


Рис.5.4. Графік $\tilde{x}(0.4,x)$

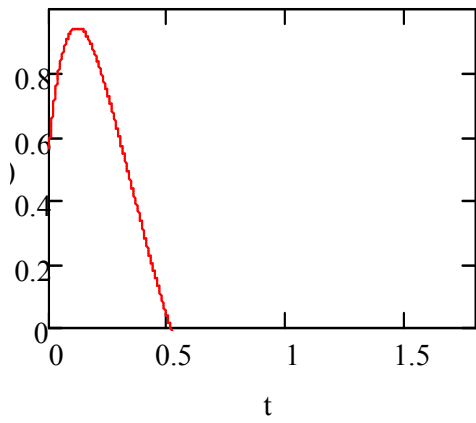


Рис.5.5 Графік $\tilde{x}(t,0.1)$

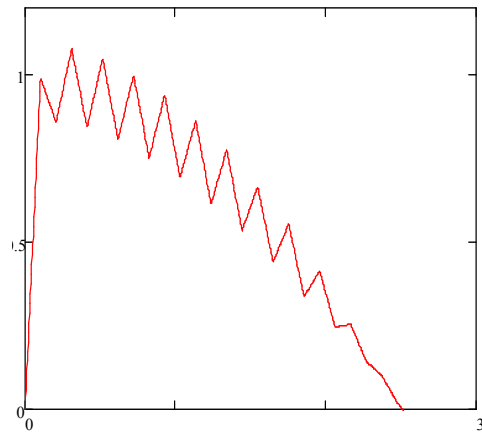


Рис.5.6 Графік $\tilde{x}(0.4,x)$

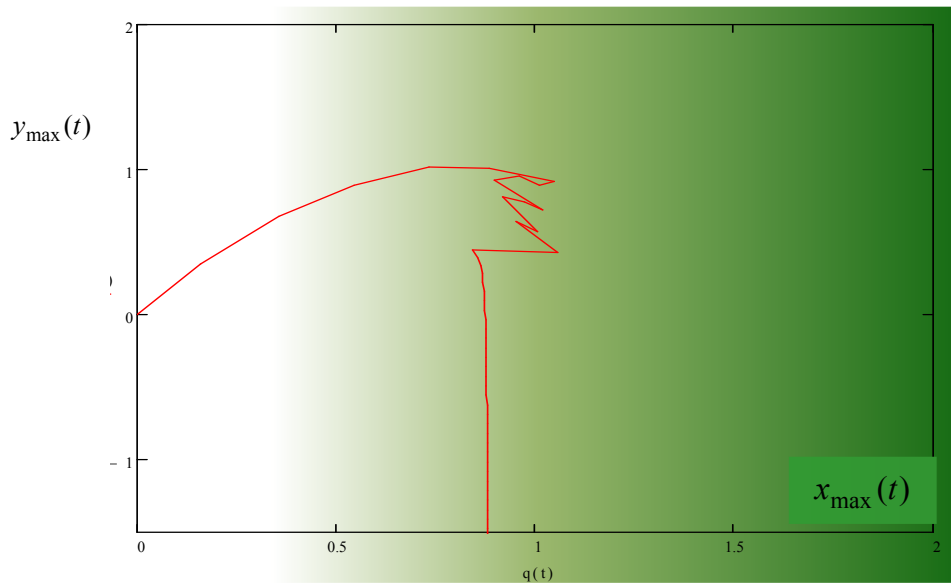


Рис.5.7 Траєкторія руху відокремленої хвилі

5.7 Висновки

Таким чином, в роботі доведено, що рівняння руху для анізотропного твердого тіла мають точні розв'язки, що моделюють тривимірні відокремлені хвилі типу δ -солітонів при наявності анізотропії пружних властивостей, вищої від орторомбічної сингонії та виконанні певних умов, яким повинні задовольняти пружні сталі.

Відповідні необхідні та достатні умови існування відокремленої хвилі отримані в рамках класичної теорії анізотропного пружного твердого тіла. Отримані умови дозволяють за даними пружних сталих визначати, чи існують у відповідних матеріалах локалізовані збурення, які не змінюють в часі своєї форми, що є важливою характеристикою відповідних матеріалів.

В той же час отримані в роботі умови дозволяють досліджувати анізотропію пружних властивостей матеріалів методом генерації локалізованих солітоноподібних збурень та дослідження особливостей їх поширення.

Побудовано моделі поширення солітоноподібних збурень та досліджено низку нелінійних ефектів, що виникають в процесі поширення локалізованих збурень, зокрема властивостей відбивання відповідних хвиль у областях стрімкої зміни густини.

РОЗДІЛ 6. МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ТРАЄКТОРІЙ ВІДОКРЕМЛЕНИХ ХВИЛЬ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Інформація про траєкторії відокремлених хвиль та характер їх руху має важливе прикладне значення у випадках, коли відокремлені хвилі самі становлять небезпеку (як, наприклад, цунамі) чи є причиною інших небезпечних для людини явищ (наприклад, землетрусів). Останніми роками експериментально зафіксовані пульсаційні збурення у гірських породах, відмінні від сейсмічних хвиль гармонічного типу [86, 305, 289], розглядалися відокремлені хвилі деформації [200, 288, 289]. Ці результати підтверджують перспективність побудови моделей сейсмічних процесів, що враховують відокремлені хвилі деформації солітонного типу. Однак, як відомо, відокремлені хвилі складно зафіксувати в силу їх просторової локалізації. У сейсмічних процесах, наприклад, локалізовані хвилі можна зафіксувати лише по серіях сейсмічних поштовхів, які вони можуть зумовлювати і які фіксуються сейсмічними станціями. Тоді важливою є задача групування даних спостережень, які можна віднести до одної відокремленої хвилі з метою побудови оцінки її траєкторії.

В цьому розділі розглянемо підходи до ідентифікації траєкторій відокремлених хвиль та побудови прогнозних кривих, які ґрунтуються на розв'язанні задач, пов'язаних з фундаментальною проблемою моментів для різних класів функцій Чебишева. Реалізація відповідних підходів дозволила розробити новий метод солітонного аналізу сейсмічних процесів на їх форшоковій стадії.

6.1 Алгоритм ідентифікації траєкторій відокремлених хвиль.

Розглянемо динамічну систему виду:

$$\Sigma = \{I_T, \Omega, G_0, X, S, E\}, \quad (6.1)$$

де $I_T = [t_0, T] \subset R$ - часовий інтервал; $\Omega \subset R^3$ - фазовий простір; $G_0 \subset \Omega \times I_T$ -

початкова множина точок траєкторій відокремлених хвиль; $X : I_T \times \Omega \rightarrow \Omega$ - оператор, що визначає траєкторії солітоноподібних хвиль; $S_t \subset \Omega$ - множина координат солітоноподібних хвиль в момент часу t , $S = \{S_t, t \in [t_0, t_1]\}$; $E : \Omega \times S \times I_T \rightarrow [0,1]$ - функціонал, який описує вплив солітоноподібних хвиль у відповідній точці фазового простору.

Нехай заданою є початкова множина виду:

$G_0 = \{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_k, t_k)\}$, де x_1, x_2, \dots, x_k - точки спостережень траєкторій, $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ - моменти спостережень. Будемо вважати, що моменти спостережень t_1, t_2, \dots, t_k - випадкові величини. В такому випадку x_1, x_2, \dots, x_k - випадкові вектори.

Стоїть завдання за результатами спостережень визначити траєкторії відокремлених хвиль, оцінити їх швидкості та побудувати прогноз, тобто оцінити множину S_t .

Задача ідентифікації траєкторій за дискретними результатами спостережень належить до області інтелектуального аналізу даних (Data Mining), де розроблено багато різноманітних методів та підходів. У нашому випадку запропонуємо методи, що використовують специфіку досліджуваного явища.

На першому етапі будемо використовувати інформацію про характер швидкості хвилі. Припустимо, що в конкретному фізичному середовищі має місце спадання швидкості солітоноподібної хвилі. У такому випадку із множини $G_0 = \{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_k, t_k)\}$ можемо виділяти такі підпоследовності

$(x_{i_1}, t_{i_1}), (x_{i_2}, t_{i_2}), \dots, (x_{i_k}, t_{i_k})$, для яких виконується умова: $\tilde{v}_{i_1 i_2} \geq \tilde{v}_{i_2 i_3} \geq \dots \geq \tilde{v}_{i_{k-1} i_k}$, де

$$\tilde{v}_{ij} = \frac{\rho(x_j, x_i)}{t_j - t_i}, j > i, i, j = 1, k, \rho(x_j, x_i) - \text{відстань між точками.}$$

Очевидно, можемо вимагати виконання інших умов виходячи зі специфіки характеру руху хвиль. Наприклад, з умови випуклості функції

швидкості одержуємо співвідношення: $\tilde{v}_r \leq \tilde{v}_{r-1} + \frac{\tilde{v}_{r+1} - \tilde{v}_{r-1}}{\bar{t}_{r+2} - \bar{t}_r} (\bar{t}_{r+1} - \bar{t}_r)$, де $\bar{t}_r = t_r$

$$\text{або } \bar{t}_r = \frac{t_r - t_{r-1}}{2}, \tilde{v}_r = \frac{\rho(x_{i_{r+1}}, x_{i_r})}{t_{i_{r+1}} - t_{i_r}}, r = 1, 2, \dots, k-1.$$

Наступний етап - аналіз траєкторій. Для ідентифікації траєкторій можемо запропонувати підхід, аналогічний автокореляційному критерію існування тренду. Дійсно, розглянемо послідовність $r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_l}$ і визначимо коефіцієнт автокореляції першого порядку:

$$R_l^1 = \frac{\sum_{i=2}^l (r_{j_i} - \bar{r}_1)(r_{j_{i-1}} - \bar{r}_1)}{\sqrt{\sum_{i=2}^l (r_{j_i} - \bar{r}_1)^2 (r_{j_{i-1}} - \bar{r}_1)^2}}, \bar{r}_1 = \frac{1}{l-1} \sum_{i=2}^l r_{j_i}, \bar{r}_2 = \frac{1}{l-1} \sum_{i=2}^l r_{j_{i-1}}.$$

Аналогічно визначимо коефіцієнт автокореляції R_{l+1}^2 для ряду $r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_{l+1}}$. У тому випадку, якщо точка $x_{j_{l+1}}$ не пов'язана з $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$, тобто випадкова (не належить одній траєкторії солітона), одержимо нерівність $R_l^1 > R_{l+1}^2$. Таким чином, за допомогою коефіцієнта автокореляції можемо ідентифікувати траєкторії солітоноподібних хвиль. Помітимо, що при такому підході можемо будувати прогноз, знаходячи максимум коефіцієнта кореляції між рядом спостережень і його зміщенням на 1 позицію "вправо".

Розглянемо ще один підхід. Нехай $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$ - деяка підпослідовність даних спостережень, $L = \{(r, \varphi) : r = f(\varphi)\}$ - деяка крива (записана в полярній системі координат), що проходить через ці точки. Розглянемо точку $x_{j_{l+1}} = r_{j_{l+1}} e^{i\varphi_{j_{l+1}}}$. Розглянемо подію $A_{l+1} = \{x_{j_{l+1}} \in s_\varepsilon(x), x \in L\}$, де $s_\varepsilon(x)$ -коло радіуса ε та умову $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}, x_{j_{l+1}} \text{ належать одній траєкторії}\}$.

У такому випадку існує таке ε , що ймовірність події A_{l+1} визначається співвідношенням:

$$P\{x_{j_{r+1}} \in s_\varepsilon(x), x \in L\} = \begin{cases} \int_{s_\varepsilon(x)} f_\xi(z) dz, \text{ якщо виконано } \bar{B}, \\ 1, \text{ якщо виконано } B, \end{cases}$$

де $f_\xi(z)$ -відповідна функція розподілу . Якщо наступила подія A_{l+1} , ймовірність якої мала, можемо вважати, що $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}, x_{j_{l+1}}$ належать траєкторії одного солітона й крива $L = \{(r, \varphi) : r = f(\varphi)\}$ з ймовірністю $1 - \int_{s_\varepsilon(x)} f_\xi(z) dz$ визначає саму траєкторію .

Зауважимо, що чисельне моделювання траєкторії відокремленої хвилі, що рухається в анізотропному твердому тілі в області зростаючої щільності, проведене в роботі [358] показало, що траєкторія переважно прямолінійна або являє собою фрагменти спіралей.

У такому випадку логічно в процесі побудови траєкторій розглядати прямолінійні траєкторії або криві в класі функцій виду $r(\varphi(t)) = \alpha_1 e^{-\mu_1 \varphi(t)} + \alpha_2 e^{-\mu_2 \varphi(t)} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m \varphi(t)}$ (записані в полярній системі координат), що представляють собою суму логарифмічних спіралей. Нехай $x_{j_k} = r_{j_k} e^{i\varphi_{j_k}}$, $k = \overline{0, l}$. Тоді можемо одержати систему співвідношень виду:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1^{\varphi_0} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_0} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_0} &= r_{j_0}, \\ \alpha_1 \beta_1^{\varphi_1} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_1} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_1} &= r_{j_1}, \\ \dots \\ \alpha_1 \beta_1^{\varphi_l} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_l} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_l} &= r_{j_l}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

де $e^{-\mu_i} = \beta_i$, $i = \overline{1, m}$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $\varphi_0 = 0$. Як випливає з результатів робіт [358] - [359], система (6.2) має єдиний розв'язок для випадку $l = 2m - 1$ або $l = 2m$ якщо послідовність $r_{j_0}, r_{j_1}, \dots, r_{j_l}$ строго позитивна.

Покажемо, що якщо система (6.2) сумісна, то з ймовірністю 1 точки $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$ належать траєкторії однієї солітоноподібної хвилі.

Дійсно, розглянемо перші m рівнянь системи, з яких легко одержати співвідношення для параметрів $\alpha_i, i = \overline{1, m}$ як розв'язок відповідної СЛАР. Аналогічні розв'язки для цих же параметрів можна одержати, розглядаючи m рівнянь, починаючи із другого, третього й т.д. Розглянемо співвідношення, отримані для перших m рівнянь і рівнянь, починаючи з другого. Тоді прирівнюючи співвідношення, наприклад, для параметра α_1 , одержимо рівність двох виразів, один з яких містить значення $r_{j_0}, r_{j_1}, \dots, r_{j_m}$ а інший – $r_{j_1}, \dots, r_{j_{m+1}}$. Але ймовірність такої події дорівнює 0, якщо тільки точки $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{m+1}}$ не належать кривій виду:

$$L = \{(r, \varphi) : r = \alpha_1 e^{-\mu_1 \varphi} + \alpha_2 e^{-\mu_2 \varphi} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m \varphi}\}$$

Таким чином, одержали достатню умову приналежності точок спостережень $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{m+1}}$ траєкторії одного солітона. У цій умові головну роль відіграє питання сумісності системи (6.2), що еквівалентне існуванню розв'язку проблеми моментів для системи функцій Чебышева виду $\{t^{\varphi_i}, i = \overline{1, l}\}$.

6.2 Метод перевірки сумісності характеристичної системи .

Розглянемо допоміжну задачу виду:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \dots + \tilde{\alpha}_m &= r_{j_0}, \\ \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2 + \dots + \tilde{\alpha}_m \tilde{\beta}_m &= r_{j_1}, \\ \dots & \\ \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1^{2m-1} + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2^{2m-1} + \dots + \tilde{\alpha}_m \tilde{\beta}_m^{2m-1} &= r_{j_{2m-1}}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Якщо система (6.3) сумісна, то можемо визначити функцію $\tilde{r}(\varphi)$:
 $\tilde{r}(\varphi) = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1^\varphi + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2^\varphi + \dots + \tilde{\alpha}_m \tilde{\beta}_m^\varphi$. Аналогічно у випадку сумісності системи (6.2) визначимо функцію виду:

$$r(\varphi) = \alpha_1 \beta_1^\varphi + \alpha_2 \beta_2^\varphi + \dots + \alpha_m \beta_m^\varphi .$$

Нехай $f_i(\cdot), i = \overline{0, 2m-1}$ - деякі бієктивні відображення,
 $f_i : [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \rightarrow [i, i+1], i = \overline{0, 2m-2}, f_{2m-1} : [\varphi_{2m-1}, \infty] \rightarrow [2m-1, \infty]$, такі, що
 $f_i(\varphi_i) = i, f_i(\varphi_{i+1}) = i+1, i = \overline{0, 2m-2}, f_{2m-1}(\varphi_{2m-1}) = 2m-1$.

Визначимо наступні функції:

$$f(\varphi) = \sum_{i=0}^{2m-2} f_i(\varphi) \chi(\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]) + f_{2m-1}(\varphi) \chi(\varphi \in [\varphi_{2m-1}, \infty)), \text{ де } \chi(\cdot) - \text{ функція}$$

$$\text{Хевісайда; } \tilde{r}(\varphi): \tilde{r}(\varphi) = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1^\varphi + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2^\varphi + \dots + \tilde{\alpha}_m \tilde{\beta}_m^\varphi.$$

Очевидно, що $\tilde{r}(f(\varphi_i)) = r(\varphi_i) = r_i, i = \overline{0, 2m-1}$.

Покажемо, що існують такі відображення $f_i : [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \rightarrow [i, i+1]$, що
 $\tilde{r}(f(\varphi)) = r(\varphi)$ для будь-якого φ за виключенням, можливо, інтервалу, де
функція $r(\varphi)$ досягає мінімального значення. Останній випадок можливий,
якщо r_0, r_2, \dots, r_k утворюватимуть немонотонну послідовність.

Відзначимо, що функція $r(\varphi)$ або монотонна, або унімодальна, що має
точку мінімуму. Дійсно, монотонність очевидна при виконанні умов :

$$\beta_1 > 1, \beta_2 > 1, \dots, \beta_m > 1, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \dots, \alpha_m > 0;$$

$$0 < \beta_1 < 1, 0 < \beta_2 < 1, \dots, 0 < \beta_m < 1, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \dots, \alpha_m > 0.$$

Розглянемо випадок:

$$\beta_1 > 1, \beta_2 > 1, \dots, \beta_r > 1, 0 < \beta_{r+1} < 1, \dots, 0 < \beta_m < 1, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \dots, \alpha_m > 0. (6.4)$$

Нехай $\alpha_1 \ln \beta_1 + \alpha_2 \ln \beta_2 + \dots + \alpha_m \ln \beta_m > 0$. Тоді монотонність функції
впливає з (6.4) та нерівності :

$$\alpha_1 \ln \beta_1 \beta_1^\varphi + \alpha_2 \ln \beta_2 \beta_2^\varphi + \dots + \alpha_m \ln \beta_m \beta_m^\varphi > \alpha_1 \ln \beta_1 + \alpha_2 \ln \beta_2 + \dots + \alpha_m \ln \beta_m.$$

Нехай $\alpha_1 \ln \beta_1 + \alpha_2 \ln \beta_2 + \dots + \alpha_m \ln \beta_m < 0$. Тоді з умов (6.4) впливає:

$\exists \varphi_0 : \alpha_1 \ln \beta_1 \beta_1^{\varphi_0} + \alpha_2 \ln \beta_2 \beta_2^{\varphi_0} + \dots + \alpha_m \ln \beta_m \beta_m^{\varphi_0} > 0$. Крім того, $\forall \varphi_1 : \varphi_0 < \varphi_1$
виконується нерівність:

$$\alpha_1 \ln \beta_1 \beta_1^{\varphi_0} + \alpha_2 \ln \beta_2 \beta_2^{\varphi_0} + \dots + \alpha_m \ln \beta_m \beta_m^{\varphi_0} < \alpha_1 \ln \beta_1 \beta_1^{\varphi_1} + \alpha_2 \ln \beta_2 \beta_2^{\varphi_1} + \dots + \alpha_m \ln \beta_m \beta_m^{\varphi_1}.$$

Таким чином, функція $r(\varphi)$ в цьому випадку має єдину точку мінімуму.

Аналогічний результат отримуємо, коли α_i - довільні.

Розглянемо інтервал $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$, на якому функція $r(\varphi)$ монотонна. Функція $\tilde{r}(\varphi)$ буде монотонною на інтервалі $[k, k+1]$. Тоді можемо побудувати відображення $f_k : [\varphi_k, \varphi_{k+1}] \rightarrow [k, k+1]$ таке, що $\tilde{r}(f_k(\varphi)) = r(\varphi)$ на інтервалі $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ наступним способом: $f_k(\varphi) = \tilde{r}^{-1}(r(\varphi))$.

Нехай $f(\varphi) = \sum_{i=0}^{2m-2} f_i(\varphi)\chi(\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]) + f_{2m-1}(\varphi)\chi(\varphi \in [\varphi_{2m-1}, \infty))$.

Очевидно, що $\tilde{r}(f(\varphi_i)) = r(\varphi_i) = r_i, i = \overline{0, 2m-1}$. В такому випадку значення $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ знаходимо як розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m &= \tilde{r}(f(0)), \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_m\beta_m &= \tilde{r}(f(1)), \\ &\dots \\ \alpha_1\beta_1^{2m-1} + \alpha_2\beta_2^{2m-1} + \dots + \alpha_m\beta_m^{2m-1} &= \tilde{r}(f(2m-1)). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Система рівнянь (6.5) є системою моментних співвідношень для степеневій проблеми моментів, яка розв'язується відомим методом.

Таким чином, одержуємо необхідну умову спільності системи (6.3): якщо системи (6.4) та (6.3) сумісні, то сумісна і система (6.5). Помітимо, що на етапі перевірки сумісності відображення $f(\varphi)$ -невідоме (воно може не існувати, якщо система (6.3) несумісна). У найпростішому випадку відображення $f_i : [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \rightarrow [i, i+1]$ можна реалізувати як лінійні перетворення виду: $f_i(x) = ((i+1)\varphi_i - i\varphi_{i+1} - x)/(\varphi_i - \varphi_{i+1}), i = \overline{0, 2m-2}, f_{2m-1}(x) = (2m-1)x/\varphi_{2m-1}$. Очевидно, що з метою збільшення точності можемо розглянути відображення виду: $f_i : [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \rightarrow [i\Delta, (i+1)\Delta]$, де $\Delta(2m+1) = \varphi_{2m+1}$.

Розглянуті вище міркування дозволяють звести задачу перевірки сумісності системи (6.2) до задачі перевірки сумісності системи моментних співвідношень для степеневій проблеми моментів, яка розглянута вище.

Алгоритм перевірки сумісності систем (6.3) та (6.4) будуватимемо на основі Теорема 6.1., яку розглянемо далі. Зауважимо, що описаний вище алгоритм перевірки сумісності являє собою, по суті, і методом розв'язку експоненційної проблеми моментів, що дозволяє звести її до степеневій.

6.3 Деякі підходи до проблематики побудови прогнозної траєкторії солітоноподібної хвилі

Нехай $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_k, t_k)$, де x_1, x_2, \dots, x_k - точки вже ідентифікованої траєкторії солітоноподібної локалізованої хвилі у фазовому просторі, $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ - моменти часу.

Будемо вважати, що $x_k = (x_k^1, x_k^2)$. Використовуючи підхід, аналогічний до побудови інтерполяційного многочлена Лагранжа, можемо розглянути функцію виду:

$$f(x) = \sum_{l=2}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l-1}}^k \frac{\rho(x, x_j)}{\rho(x_{l-1}, x_j)} x_l, \quad (6.6)$$

де $\rho(x, y)$ - відстань між точками у просторі відповідної розмірності.

Очевидно, що остання функція задає відображення $x_k \rightarrow x_{k+1}$. Аналогічно можемо розглянути простір-час:

$$f(x, t) = \sum_{l=2}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l-1}}^k \frac{\rho(x, t, x_{i_j}, t_{i_j})}{\rho(x_{i_{l-1}}, t_{i_{l-1}}, x_{i_j}, t_{i_j})} (x_{i_l}, t_{i_l}), \quad (6.7)$$

де $\rho(x, t_1, y, t_2)$ - відстань між точками у просторі-часі відповідної розмірності. Очевидно, що функція (6.7) задає відображення $(x_{i_k}, t_{i_k}) \rightarrow (x_{i_{k+1}}, t_{i_{k+1}})$.

Відзначимо, що функцію (6.7) зручно використовувати при наявності відбивань хвилі, коли траєкторія є ламаною. Однак при цьому слід зауважити, що використання функцій виду (6.7) часто дає великі похибки.

Розглянемо полярну систему координат. Нехай траєкторія відокремленої хвилі в полярній системі координат описується функцією виду:

$$r(t) = \alpha_1 e^{-\mu_1 \varphi(t)} + \alpha_2 e^{-\mu_2 \varphi(t)} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m \varphi(t)}.$$

Нехай $x_i = r_i e^{\varphi_i}$. Тоді можемо записати систему співвідношень:

$$\begin{aligned} \alpha_1 e^{-\mu_1 \varphi_1} + \alpha_2 e^{-\mu_2 \varphi_1} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m \varphi_1} &= r_1, \\ \alpha_1 e^{-\mu_1 \varphi_2} + \alpha_2 e^{-\mu_2 \varphi_2} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m \varphi_2} &= r_2, \\ \dots & \\ \alpha_1 e^{-\mu_1 \varphi_k} + \alpha_2 e^{-\mu_2 \varphi_k} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m \varphi_k} &= r_k. \end{aligned}$$

Позначимо $e^{-\mu_i} = \beta_i, i = \overline{1, k}$. Тоді остання система матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1^{\varphi_1} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_1} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_1} &= r_1 \\ \alpha_1 \beta_1^{\varphi_2} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_2} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_2} &= r_2 \\ \dots & \\ \alpha_1 \beta_1^{\varphi_k} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_k} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_k} &= r_k \end{aligned} \quad (6.8)$$

Сумісність систем розглянута вище. Зупинимось зараз на практичних аспектах знаходження розв'язків систем (6.7)-(6.8). Розглянемо систему функцій $\{t^{\varphi_i}, i = \overline{1, k}\}$. Як вже відзначалось вище, така система утворює систему Чебишева при виконанні умов [360]: $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_k$. Як бачимо, система (6.38) фактично є системою моментних співвідношень для системи функцій $\{t^{\varphi_i}, i = \overline{1, k}\}$ чи визначає експоненційну проблему у випадку (6.7).

В частинному випадку, коли $\varphi_i = i - 1, i = \overline{1, k}$, отримуємо степеневу проблему моментів. Тоді основний результат можемо переформулювати так: якщо послідовність чисел r_0, r_2, \dots, r_k строго позитивна, то існує одне і тільки одне її представлення (6.8), причому при $k = 2m - 1$ точки зосередження мас співпадають з коренями многочлена $\det |r_i r_{i+1} \dots r_{i+m-1} t^i|_{i=0}^m$, а при $k = 2m$: $t \det |r_{i+1} \dots r_{i+m} t^i|_{i=0}^m$. Точки зосередження мас в нашому випадку - це $\beta_i, i = \overline{1, m}$. Тоді $\alpha_i, i = \overline{1, m}$ легко знайти, розв'язуючи СЛАР.

Відзначимо, що у випадку довільних значень $\varphi_i, i = \overline{1, k}$, $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_k$, отримати результат, аналогічний до наведеного вище, вдається лише для часткових випадків. Наприклад, виконання умови

$$\det | \beta_{i_1}^{\varphi_i} \beta_{i_2}^{\varphi_{i+1}} \dots \beta_{i_m}^{\varphi_{i+m-1}} \beta_{i_{m+1}}^{\varphi_i} |_{i=0}^m = 0 \quad \forall 0 \leq i_k \leq m, k = \overline{1, m+1}. \quad (6.9)$$

достатньо для того, щоб точки сосредоточення мас задачі (6.2) співпали з коренями многочлена $\det | r_i r_{i+1} \dots r_{i+m-1} t^{\varphi_i} |_{i=0}^m$. Це твердження легко отримати з співвідношень (6.8) та рівності виду:

$$\begin{aligned} \det | r_i r_{i+1} \dots r_{i+m-1} \beta_k^{\varphi_i} |_{i=0}^m &= \sum_{i_m=1}^m \alpha_{i_m} \det | r_i r_{i+1} \dots r_{i+m-2} \beta_{i_m}^{\varphi_{m-1+i}} \beta_k^{\varphi_i} |_{i=0}^m = \dots = \\ &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_m=1}^m \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_m} \det | \beta_{i_1}^{\varphi_i} \dots \beta_{i_{m-1}}^{\varphi_{m-2+i}} \beta_{i_m}^{\varphi_{m-1+i}} \beta_k^{\varphi_i} |_{i=0}^m. \end{aligned}$$

В такому випадку можемо скористатись підходом, описаним вище для відповідного класу функцій.

6.4 Деякі аспекти конструктивного розв'язку степеневі проблеми моментів

Нехай маємо систему рівнянь виду:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m &= r_0, \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m &= r_1, \\ \dots & \\ \alpha_1 \beta_1^{n-1} + \alpha_2 \beta_2^{n-1} + \dots + \alpha_m \beta_m^{n-1} &= r_{n-1}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

та виконується умова:

$$\beta_i \neq \beta_j, i \neq j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \quad (6.11)$$

$$n = 2m,$$

$$\alpha_j > 0, 1 > \beta_j > 0, j = \overline{1, m}.$$

В цьому випадку питання про сумісність та розв'язок системи (6.10) еквівалентне розв'язку степеневі проблеми моментів Маркова на інтервалі $(0,1)$ в її класичній постановці.

Лема 6.1. Нехай система (6.10) сумісна, виконуються умови (6.11). Тоді послідовність чисел $r_1, r_2, \dots, r_{2m-1}$ є строго позитивною відносно системи функцій $1, t, t^2, \dots, t^{2p-1}$, на інтервалі $[0, 1]$.

Дійсно, розглянемо довільний многочлен виду:

$Q_{2m-1}(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{2m-1} t^{2m-1}$ порядку $2m-1$. Тоді визначимо функціонал G наступним чином: $G(Q) = a_0 r_0 + a_1 r_1 + \dots + a_{2m-1} r_{2m-1}$. Нехай $Q_{2m-1}(t) \geq 0$ на інтервалі $(0, 1)$. Тоді маємо:

$$G(Q) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{2m-1} x_{2m-1} = \alpha_1 Q_{2m-1}(\beta_1) + \alpha_2 Q_{2m-1}(\beta_2) + \dots + \alpha_m Q_{2m-1}(\beta_m).$$

Покажемо, що існує таке i , що $Q_{2m-1}(\beta_i) > 0$. Припустимо, що це не так. Тоді

$$Q_{2m-1}(\alpha_i) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тоді цей многочлен буде мати вигляд:

$Q_{2m-1}(t) = (t - \beta_1)(t - \beta_2) \dots (t - \beta_m) P_{m-1}(t)$. Припустимо, що β_i не є коренем многочлена $P_{m-1}(t)$. Але тоді можемо вибрати малий окіл точки β_i так, щоб

знак многочлена $Q_{2m-1}(\alpha_i)$ змінювався при “переході через точку”. Оскільки

$\alpha_i \in (0, 1)$, то отримуємо протиріччя з тим, що многочлен $Q_{2m-1}(t) \geq 0$. Отже,

будь-яке число α_i , $i = \overline{1, m}$ є коренем многочлена $Q_{2m-1}(t)$. Але ж цей многочлен має не більше $2m-1$ коренів. Отримане протиріччя і доводить лему.

Таким чином, виконання умови (6.11) та сумісності системи (6.10) достатньо для строгої позитивності відповідної послідовності, а отже, і існування та єдиності розв’язку системи (6.10). Причому цей розв’язок може бути знайдений вказаним вище методом. Знайшовши достатньо умову сумісності системи (6.10), ми, фактично, отримаємо ще один шлях розв’язку степеневій проблеми моментів Маркова для деякого випадку (парне n , нижнє головне представлення).

Лема 6.2. Функція виду

$$f_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \alpha_1 \beta_1^n + \alpha_2 \beta_2^n + \dots + \alpha_m \beta_m^n$$

є випуклою.

Як відомо, функція є випуклою на деякій випуклій множині, якщо її гессіан є невід’ємно визначеною матрицею. Розглянемо гессіан

$$H = \left\| \frac{\partial f_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i, j = \overline{1, 2m}},$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2m}) \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m).$$

Легко бачити, що його елементи є такими:

$$h_{ij} = \begin{cases} n\beta_i^{n-1}, & j = m + i, 1 \leq i \leq m, \\ n\beta_i^{n-1}, & j = i - m, m \leq i \leq 2m, \\ n(n-1)\beta_i^{n-2}\alpha_i, & m \leq i \leq 2m, i = j, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases} \quad (6.12)$$

Перевіряємо невід'ємну визначеність за допомогою критерію Сельвестра.

Легко бачити, що всі діагональні мінори, крім останнього є нульовими.

Останній мінор рівний $k^{2m} \beta_1^{2n-2} \beta_2^{2n-2} \dots \beta_m^{2n-2} \geq 0$. Отже, функція випукла.

Лема 6.3. Область, задана співвідношеннями (6.10)-(6.11) є випуклою.

Справедливість твердження випливає з очевидних тверджень:

а) множина виду $\{x : f(x) \leq 0\}$ є випуклою, якщо випукла функція $f(x)$;

б) перетин випуклих множин є випуклою множиною.

Тоді випуклою буде і область (6.10)-(6.11) як перетин випуклих множин.

Розглянемо деякі необхідні умови сумісності системи (6.10).

Лема 6.4 Якщо система (6.10) сумісна, то виконується співвідношення:

$$r_0 > r_1 > \dots > r_{n-1}.$$

Твердження леми очевидне.

Лема 6.5 Якщо система (6.10) сумісна, то виконується співвідношення:

$$r_i > r_{i-1} + 2(r_{i-1} - r_{i-2}), i = \overline{2, n-1}.$$

Ця умова випливає з геометричного представлення точок r_i .

Лема 6.6

Послідовність $\frac{r_{i+1}}{r_i} = \text{const}, i = \overline{0, 2m-2}$, тоді і тільки тоді, коли

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m.$$

Доведення.

Розглянемо систему (6.10). Покажемо, що $\frac{r_{i+1}}{r_i} \geq \frac{r_i}{r_{i-1}}, i = \overline{0, 2m-2}$

Маємо:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_1 e^{-\mu_1(i+1)} + \alpha_2 e^{-\mu_2(i+1)} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m(i+1)}) (\alpha_1 e^{-\mu_1(i-1)} + \alpha_2 e^{-\mu_2(i-1)} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m(i-1)}) = \\
 &= \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m \alpha_l \alpha_p e^{-\mu_l(i+1) - \mu_p(i-1)} = \sum_{l=1}^m \alpha_l^2 e^{-2\mu_l} + \sum_{l=1}^m \sum_{\substack{p=1 \\ l \neq p}}^m \alpha_l \alpha_p e^{-\mu_l(i+1) - \mu_p(i-1)} = \\
 &= \sum_{l=1}^m \alpha_l^2 e^{-2\mu_l} + \sum_{l=p+1}^m \sum_{p=1}^m \alpha_l \alpha_p e^{-(\mu_l + \mu_p)i} (e^{\mu_l - \mu_p} + e^{\mu_p - \mu_l}) > \\
 &> \sum_{l=1}^m \alpha_l^2 e^{-2\mu_l} + 2 \sum_{l=p+1}^m \sum_{p=1}^m \alpha_l \alpha_p e^{-(\mu_l + \mu_p)i} = r_i^2.
 \end{aligned}$$

Відповідна нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$.

Використовуючи Лему 6.6, необхідну умову сумісності системи (6.10) можемо сформулювати наступним чином.

Лема 6.7 Якщо система (6.10) сумісна, то виконується наступна система

нерівностей: $r_0 > 0,$

$$\frac{r_{i-1}^2}{r_i} < r_i < r_{i-1}, i = \overline{1, 2m-2} \quad (6.13)$$

Нехай маємо систему виду:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = r_0, \\
 & \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m = r_1, \\
 & \dots \\
 & \alpha_1 \beta_1^{n-1} + \alpha_2 \beta_2^{n-1} + \dots + \alpha_m \beta_m^{n-1} = r_{n-1}.
 \end{aligned} \quad (6.14)$$

та виконуються умови:

$$n \leq 2m, \quad (6.15)$$

$$\alpha_j > 0, 1 > \beta_j > 0, j = \overline{1, m}. \quad (6.16)$$

Теорема. 6.1 Необхідною і достатньою умовою сумісності системи (6.14) є виконання системи нерівностей виду:

$$\begin{aligned} r_0 &> 0, \\ r_i^{\min} &\leq r_i \leq r_i^{\max}, i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

де r_i^{\min}, r_i^{\max} - розв'язки задач нелінійного програмування :

$$r_i^{\min} = \min(\alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i), \quad (6.18)$$

$$r_i^{\max} = \max(\alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i),$$

при умовах :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = r_0,$$

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m = r_1,$$

...

$$\alpha_1 \beta_1^{i-1} + \alpha_2 \beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_m \beta_m^{i-1} = r_{i-1}.$$

(6.19)

$$\alpha_j > 0, 1 > \beta_j > 0, j = \overline{1, m}.$$

Відзначимо, що відповідні мінімальні та максимальні значення можуть не досягаються, оскільки допустима область незамкнута. Тоді r_i^{\min}, r_i^{\max} визначимо як відповідне мінімальне та максимальне значення в області $\alpha_j \geq 0, 1 \geq \beta_j \geq 0, j = \overline{1, m}$.

Доведення

Необхідність є очевидною. Покажемо достатність. Нехай виконується система нерівностей (6.17). Покажемо, що система (6.14) при виконанні співвідношень (6.15)-(6.16) є сумісною. Будемо послідовно аналізувати підсистеми, що складаються з перших i рівнянь системи (6.14). Очевидно, що рівняння $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = r_0$, має розв'язки при виконанні нерівності $r_0 > 0$. Нехай сумісною є підсистема перших i рівнянь системи (6.14) та виконуються співвідношення $\beta_i \neq \beta_j, i \neq j, i, j = \overline{1, m}$. Позначимо відповідну допустиму область через Ω_i . Нехай r_{i+1} - таке число, що виконується

нерівність: $r_{i+1}^{\min} < r_{i+1} < r_{i+1}^{\max}$. Якщо існує така точка z в області Ω_i , що $f_{i+1}(z) = r_{i+1}$, то, в силу визначення $r_{i+1}^{\min}, r_{i+1}^{\max}$, сумісною є підсистема з перших $i+1$ рівнянь. Для виконання вказаної умови для будь-якого $r_{i+1}^{\min} < r_{i+1} < r_{i+1}^{\max}$ достатньо зв'язності області. Але в силу леми (6.3) область, що визначається співвідношенням (6.16) є зв'язною.

Розглянемо ситуацію, коли не виконується співвідношення :

$\beta_i \neq \beta_j, i \neq j, i, j = \overline{1, m}$. Тоді допустима область буде незв'язною. Вона розбивається на випуклі підмножини гіперплощинами виду $P_{ij} = \{(\alpha, \beta) : \beta_i = \beta_j, i \neq j\}, i, j = \overline{1, m}$, які не належать допустимій області. Припустимо, що точка z така що $\{z : f_{i+1}(z) = r_{i+1}\} \cap \Omega_i = \emptyset$. Однак, звідси випливатиме, що $\{z : f_{i+1}(z) = r_{i+1}\} \cap \Omega_i$ належить відповідній гіперплощині і не існує точки, яка б їй не належала. Однак очевидно, що $\{z : f_{i+1}(z) = r_{i+1}\} \cap \Omega_i$ не є гіперплощиною, що впливає з нелінійності $f^n(z)$, що означає сумісність перших $i+1$ рівнянь. Теорема доведена.

Будемо знаходити відповідні мінімальні та максимальні значення.

Введемо функцію Лагранжа : $L(y, \alpha, \lambda) = \alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j (\alpha_1 \beta_1^j + \alpha_2 \beta_2^j + \dots + \alpha_m \beta_m^j - r_j)$. Запишемо систему співвідношень для знаходження стаціонарних точок функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \beta_1^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \beta_1^j = 0, \\ \beta_2^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \beta_2^j = 0, \\ \dots \\ \beta_m^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \beta_m^j = 0, \end{cases} \quad (6.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\beta_1^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} j\lambda_j\beta_1^{j-1})\alpha_1 = 0, \\ (i\beta_2^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} j\lambda_j\beta_2^{j-1})\alpha_2 = 0, \\ \dots \\ (i\beta_m^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} j\lambda_j\beta_m^{j-1})\alpha_m = 0, \end{array} \right. \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m &= r_0, \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_m\beta_m &= r_1, \\ \dots \\ \alpha_1\beta_1^{i-1} + \alpha_2\beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_m\beta_m^{i-1} &= r_{i-1}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Нехай $P_i(t) = t^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j t^j$. Із систем (6.20)-(6.22) випливає, що значення

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ - корені цього многочлена кратності ≥ 2 . Оскільки $i < 2m$, то звідси випливає, що (6.20)-(6.22) несумісна при виконанні умов (6.16). Отже, будемо аналізувати граничні точки допустимої області.

6.4.1 Знаходження точок мінімуму цільової функції допоміжної задачі нелінійного програмування в умові теореми про сумісність

Розглянемо випадок, когда число i -парне. Нехай виконується умова:

$\beta_k \neq \beta_j, k \neq j, k = \overline{1, p}, j = \overline{1, p}, \beta_p = \beta_{p+1} = \dots = \beta_m$, де $p = \left[\frac{i}{2} \right]$, $[]$ - ціла частина

числа. Система співвідношень (6.22) будет мати вигляд :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \bar{\alpha}_p &= r_0, \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \bar{\alpha}_p\beta_p &= r_1, \\ \dots \\ \alpha_1\beta_1^{i-1} + \alpha_2\beta_2^{i-1} + \dots + \bar{\alpha}_p\beta_p^{i-1} &= r_{i-1}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

де $\bar{\alpha}_p = \alpha_p + \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_m$.

Можна показати, що послідовність, яка допускає представлення (6.23) строго позитивною. Тоді точки зосередження мас β_i можуть бути знайдені

як корені многочлена $\det |r_i r_{i+1} \dots r_{i+p-1} t^i|_{i=0}^p$, а значення α_i - як розв'язки відповідної СЛАР. Тоді розв'язки $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ систем (6.20)-(6.22) мають таку структуру: $s = (\bar{y}, \bar{\alpha}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, z_p, z_{p+1}, \dots, z_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p, \beta_p, \dots, \beta_p)$, де z_p, \dots, z_m - такі невід'ємні числа, що $z_p + \dots + z_m = \alpha_p^-$,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p^-, \beta_1, \dots, \beta_p$ - розв'язки системи (6.22).

Покажемо, що цільова функція досягає мінімум в стаціонарних точках функції Лагранжа.

Лема 6.8 Нехай $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda})$ - розв'язок системи (6.20)-(6.22),

$\bar{\alpha} = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*), \bar{\beta} = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*), \bar{\lambda} = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{n-1}^*),$

$f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \alpha_1^* (\beta_1^*)^i + \alpha_2^* (\beta_2^*)^i + \dots + \alpha_m^* (\beta_m^*)^i.$

Тоді виконується співвідношення: $L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}) = -\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j.$

Доведення

Маємо:

$$L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}) = \alpha_1^* \beta_1^{*i} + \alpha_2^* \beta_2^{*i} + \dots + \alpha_m^* \beta_m^{*i} + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j^* (\alpha_1^* \beta_1^{*j} + \alpha_2^* \beta_2^{*j} + \dots + \alpha_m^* \beta_m^{*j} - r_j) + \\ + \lambda_0^* (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \dots + \alpha_m^* - r_0) = \alpha_1^* P_i(\beta_1^*) + \dots + \alpha_m^* P_i(\beta_m^*) - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j = -\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j.$$

Лема 6.9 Функція $\alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i$ досягає свого глобального мінімуму в будь-якій точці, що є розв'язком (6.20)-(6.22).

Доведення

Очевидно, що виконується співвідношення:

$f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \lambda) = L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda})$. Маємо:

$$L(y, \alpha, \lambda) = \alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j (\alpha_1 \beta_1^j + \alpha_2 \beta_2^j + \dots + \alpha_m \beta_m^j - r_j) \\ = \alpha_1 (\beta_1^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_1^j) + \alpha_2 (\beta_2^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_2^j) + \dots + \alpha_m (\beta_m^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_m^j) - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j =$$

$$= \alpha_1 P_i(\beta_1) + \alpha_2 P_i(\beta_2) + \dots + \alpha_m P_i(\beta_m) + L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \lambda) \geq L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \lambda) = f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}),$$

$$P_i(t) = t^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* t^j = \prod_{k=0}^p (t - \beta_k^*)^2.$$

Нехай i -непарне. Розглянемо такі точки, для яких виконується

$$\beta_{p+1} = \dots = \beta_m = 0, \text{ де } p = [i/2]. \quad (6.24)$$

Тоді система (6.22) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p + \alpha_{p+1} &= r_0, \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_p \beta_p &= r_1, \\ \dots & \\ \alpha_1 \beta_1^{i-1} + \alpha_2 \beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_p \beta_p^{i-1} &= r_{i-1}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

В цьому випадку система (6.25) має єдиний розв'язок (послідовність чисел r_0, r_1, \dots, r_{i-1} допускає єдине нижнє головне представлення), яке можна знайти наступним способом. Точки зосередження мас знаходимо як корені многочлена $t \det |r_{j+1} \dots r_{j+p} t^j|_{j=0}^p$, вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*)$ знаходимо як розв'язок СЛАР. Доведення того факту, що цільова функція досягає мінімуму в точності повторює відповідне доведення в попередньому випадку. Зауважимо лише, що $\lambda_0^* = 0$ и $P_n(t) = t(t - \alpha_1)^2(t - \alpha_2)^2 \dots (t - \alpha_p)^2 \geq 0, t \in [0, 1]$.

6.4.2 Знаходження точок максимуму цільової функції допоміжної задачі нелінійного програмування

Маємо систему (6.20)-(6.22). При $i < 2m$ вона несумісна. Нехай i – парне. Розглянемо умови: $\beta_m = \beta_{m-1} = \dots = \beta_{i/2+1} = 1, \beta_{i/2} = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} L(\beta, \alpha, \lambda) &= \alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_{[i/2]-1} \beta_{[i/2]-1}^i + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j (\alpha_1 \beta_1^j + \alpha_2 \beta_2^j + \dots + \alpha_{[i/2]-1} \beta_{[i/2]-1}^j + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m - r_j) + \\ &+ \lambda_0 (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m - r_0). \end{aligned}$$

Система, що описує стаціонарні точки функції Лагранжа має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \beta_1^j = 0, \beta_2^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \beta_2^j = 0, \\ \dots \\ \beta_{[i/2]-1}^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \beta_{[i/2]-1}^j = 0. \\ 1 + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j = 0, \lambda_0 = 0, \end{array} \right. \quad (6.26)$$

$$(i\beta_1^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} j\lambda_j \beta_1^{j-1})\alpha_1 = 0$$

$$(i\beta_2^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} j\lambda_j \beta_2^{j-1})\alpha_2 = 0$$

...

$$(i\beta_{[i/2]-1}^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} j\lambda_j \beta_{[i/2]-1}^{j-1})\alpha_{[i/2]-1} = 0, \quad (6.27)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = r_0,$$

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_{[i/2]-1}\beta_{[i/2]-1} + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m = r_1, \quad (6.28)$$

...

$$\alpha_1\beta_1^{i-1} + \alpha_2\beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_{[i/2]-1}\beta_{[i/2]-1}^{i-1} + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m = r_{i-1}.$$

Розглянемо многочлен виду: $P_i(t) = t(t-1)(t-\beta_1)^2 \dots (t-\beta_{[i/2]-1})^2$. З систем

(6.26)-(6.27) випливає, що $0, 1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{[i/2]-1}$ -корені многочлена $t^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j t^j$,

причому $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{[i/2]-1}$ мають ранг 2. Звідси можемо знайти значення

$$\lambda_j^*, j = \overline{3, i-1}, \text{ зокрема } \lambda_0 = 0, \lambda_1 = -\beta_1^2 \dots \beta_{[i/2]-1}^2.$$

Відзначимо, що система (6.28) сумісна. Дійсно, послідовність r_1, r_2, \dots, r_m , що допускає представлення (6.28) строго позитивна. Розглянемо підсистему

$$\alpha_1\beta_1^2 + \alpha_2\beta_2^2 + \dots + \alpha_{[i/2]-1}\beta_{[i/2]-1}^2 = r_2 - (\alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m),$$

...

$$\alpha_1\beta_1^{i-1} + \alpha_2\beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_{[i/2]-1}\beta_{[i/2]-1}^{i-1} = r_{i-1} - (\alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m).$$

Вона має єдиний розв'язок відносно змінних $\alpha_1, \beta_1^1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{[i/2]-1}, \beta_{[i/2]-1}$.

Підставляючи цей розв'язок в рівняння

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_{[i/2]-1} \beta_{[i/2]-1} + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m = r \quad \text{знайдемо} \quad \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m.$$

Тоді з рівняння $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = r_0$ знаходимо $\alpha_{[i/2]}$.

Повторюючи міркування аналогічних лем, легко показати, що функція $\alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i$ досягає максимуму в точці $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda})$, що є розв'язком системи (6.26)-(6.28). Дійсно, нехай $\bar{\alpha} = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*)$, $\bar{\beta} = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*)$, $\bar{\lambda} = (0, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{n-1}^*)$, $f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \alpha_1^* (\beta_1^*)^i + \alpha_2^* (\beta_2^*)^i + \dots + \alpha_m^* (\beta_m^*)^i$.

Тоді виконується співвідношення: $L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}) = -\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j$.

$$\begin{aligned} \text{Дійсно, } L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}) &= \alpha_1^* \beta_1^{*i} + \alpha_2^* \beta_2^{*i} + \dots + \alpha_{[i/2]-1}^* \beta_{[i/2]-1}^{*i} + \alpha_{[i/2]+1}^* + \dots + \alpha_m^* + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j^* (\alpha_1^* \beta_1^{*j} + \alpha_2^* \beta_2^{*j} + \dots + \alpha_{[i/2]-1}^* \beta_{[i/2]-1}^{*j} + \alpha_{[i/2]+1}^* + \dots + \alpha_m^* - r_j) + \\ &+ \lambda_0^* (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \dots + \alpha_m^* - r_0) = \\ &= \alpha_1^* P(\beta_1^*) + \dots + \alpha_{[i/2]-1}^* P(\beta_{[i/2]-1}^*) + (\alpha_{[i/2]+1}^* + \dots + \alpha_m^*) P(1) - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j + \lambda_0^* \alpha_{[i/2]}^* = \\ &= \lambda_0^* \alpha_{[i/2]}^* - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j = -\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j \end{aligned}$$

Лема 6.10 Функція $\alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i$ досягає свого глобального максимуму в точці, що є розв'язком системи (6.26)-(6.28).

Доведення

$f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda})$ в силу (6.28). Тоді

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= L(\alpha, \beta, \bar{\lambda}) = \alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* (\alpha_1 \beta_1^j + \alpha_2 \beta_2^j + \dots + \alpha_m \beta_m^j - r_j) = \\ &= \alpha_1 (\beta_1^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_1^j) + \alpha_2 (\beta_2^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_2^j) + \dots + \alpha_m (\beta_m^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_m^j) - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j = \end{aligned}$$

$$= \alpha_1 P_i(\beta_1) + \alpha_2 P_i(\beta_2) + \dots + \alpha_m P_i(\beta_m) + L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}) \leq f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}),$$

$P_i(t) = t(t-1)(t-\beta_1)^2 \dots (t-\beta_{i/2-1})^2$. Лема доведена.

Нехай i -непарне, $\beta_m = \beta_{m-1} = \dots = \beta_{i/2+1} = 1$. Тоді Функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L(y, \alpha, \lambda) = \alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_{[i/2]} \beta_{[i/2]}^i + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m + \\ + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j (\alpha_1 \beta_1^j + \alpha_2 \beta_2^j + \dots + \alpha_{[i/2]} \beta_{[i/2]}^j + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m - r_j) + \lambda_0 (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m - r_0)$$

Система, яка визначає стаціонарні точки функції Лагранжа має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \beta_1^j = 0, \\ \beta_2^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \beta_2^j = 0, \\ \dots \\ \beta_{[i/2]}^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \beta_{[i/2]}^j = 0, 1 + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j = 0, \end{array} \right. \quad (6.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\beta_1^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} j\lambda_j \beta_1^{j-1})\alpha_1 = 0, \\ (i\beta_2^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} j\lambda_j \beta_2^{j-1})\alpha_2 = 0, \\ \dots \\ (i\beta_{[i/2]}^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} j\lambda_j \beta_{[i/2]}^{j-1})\alpha_{[i/2]} = 0, \end{array} \right. \quad (6.30)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = r_0,$$

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_{[i/2]} \beta_{[i/2]} + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m = r_1,$$

...

$$\alpha_1 \beta_1^{i-1} + \alpha_2 \beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_{[i/2]} \beta_{[i/2]}^{i-1} + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m = r_{i-1}.$$

Розглянемо многочлен виду: $P_i(t) = (t-1)(t-\beta_1)^2 \dots (t-\beta_{[i/2]})^2$. З систем

(6.29)-(6.30) випливає, що $1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{[i/2]}$ -корені многочлена $t^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j t^j$,

причому $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{[i/2]}$ ранга ≥ 2 . Звідси можемо знайти значення

$$\lambda_j^*, j = \overline{3, i-1}, \text{ зокрема } \lambda_0 = -\beta_1^2 \dots \beta_{i/2-1}^2$$

Зауважимо, що система (6.31) – сумісна. Дійсно, послідовність r_1, r_2, \dots, r_m , строго позитивна. Розглянемо підсистему

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_{[i/2]} \beta_{[i/2]} + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m = r_1,$$

...

$$\alpha_1 \beta_1^{i-1} + \alpha_2 \beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_{[i/2]} \beta_{[i/2]}^{i-1} + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m = r_{i-1}.$$

Вона має єдиний розв'язок відносно $\alpha_1, \beta_1^1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{[i/2]}, \beta_{[i/2]}$.

Підставляючи цей розв'язок у рівняння $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = r_0$ знайдемо $\alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m$.

Лема 6.11 Нехай вектор $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda})$ є розв'язком системи (6.29)-(6.31),

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*) \quad \bar{\beta} = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*) \quad \bar{\lambda} = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{n-1}^*),$$

$$f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \alpha_1^* (\beta_1^*)^i + \alpha_2^* (\beta_2^*)^i + \dots + \alpha_m^* (\beta_m^*)^i.$$

Тоді виконується співвідношення: $L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}) = -\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j$.

Доведення

Маємо:

$$\begin{aligned} L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}) &= \alpha_1^* \beta_1^{*i} + \alpha_2^* \beta_2^{*i} + \dots + \alpha_{[i/2]}^* \beta_{[i/2]}^{*i} + \alpha_{[i/2]+1}^* + \dots + \alpha_m^* + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j^* (\alpha_1^* \beta_1^{*j} + \alpha_2^* \beta_2^{*j} + \dots + \alpha_{[i/2]}^* \beta_{[i/2]}^{*j} + \alpha_{[i/2]+1}^* + \dots + \alpha_m^* - r_j) + \\ &+ \lambda_0^* (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \dots + \alpha_m^* - r_0) = \alpha_1^* P(\beta_1^{*i}) + \dots + \alpha_{[i/2]}^* P(\beta_{[i/2]-1}^{*i}) + \\ &+ (\alpha_{[i/2]+1}^* + \dots + \alpha_m^*) P(1) - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j = -\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j. \end{aligned}$$

Лема 6.12 Функція $\alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i$ досягає свого глобального максимуму в точці, що є розв'язком системи (6.29)-(6.31).

Доведення

Маємо: $f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda})$. Тоді

$$f(\alpha, \beta) = L(\alpha, \beta, \bar{\lambda}) = \alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* (\alpha_1 \beta_1^j + \alpha_2 \beta_2^j + \dots + \alpha_m \beta_m^j - r_j) =$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1(\beta_1^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_1^j) + \alpha_2(\beta_2^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_2^j) + \dots + \alpha_m(\beta_m^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_m^j) - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j = \\
&= \alpha_1 P_i(\beta_1) + \alpha_2 P_i(\beta_2) + \dots + \alpha_m P_i(\beta_m) + L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}) \leq f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \\
P_i(t) &= (t-1)(t-\beta_1)^2 \dots (t-\beta_{[i/2]})^2.
\end{aligned}$$

Відзначимо, що підхід до перевірки сумісності описаний вище, може бути використаний для перевірки сумісності різних систем нелінійних рівнянь.

Розглянемо, наприклад, систему нелінійних рівнянь виду :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_2, \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_m, \end{cases}$$

де $a_i \in R^1, i = \overline{1, m}$ - деякі параметри, $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ - функції, що не залежать від параметрів a_i , $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega \subset R^m$, де Ω - деяка обмежена, замкнута та зв'язна множина.

Нехай при деякій умові A_1 непорожньою є множина, що задовольняє, наприклад, перше рівняння системи. Тоді необхідною та достатньою умовою сумісності є така:

$$\begin{cases} A_1, \\ a_i^{\min} < a_i < a_i^{\max}, i = \overline{2, m}, \end{cases}$$

де $a_i^{\min} - a_i^{\max}$ є відповідно мінімальне та максимальне значення функцій $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при умовах:

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega \subset R^m, \\
&\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_2, \\ \dots\dots\dots \\ f_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i-1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Відзначимо, що результат залишається в силі і для систем виду:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1, f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1) = a_2, \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}) = a_m. \end{cases}$$

Проблема полягає лише у знаходженні відповідних мінімальних та максимальних значень.

6.5 Модель сейсмічного процесу, що враховує солітонну складову

Незважаючи на те, що на сьогоднішній день відомі сотні передвісників землетрусів та низка теорій, що пояснюють їх виникнення, проблема прогнозування в багатьох її аспектах залишається відкритою. Одним з найбільш поширених кількісних методів оцінки сейсмічної небезпеки є сейсмічне районування, яке полягає у позначенні відповідних територій в залежності до інтенсивності сейсмічних струшувань (сейсмічної бальності), що перевищується (не перевищується) протягом певного інтервалу часу з заданою ймовірністю [409]. Приклад карти сейсмічного районування території України наведено на рис.6.0.



Рис.6.0 Карта сейсмічного районування території України

Карти сейсмічного районування будуються на основі статистичних даних про поштовхи відповідної магнітуди протягом певного інтервалу часу з врахуванням додаткової інформації, зокрема, про геологічну будову земної кори у відповідному регіоні, структуру та динаміку розломів.

Очевидно, що врахування будь-яких додаткових фізичних механізмів, які впливають на сейсмічні поштовхи, дасть можливість скорегувати відповідні ймовірності. В якості таких механізмів пропонуються процеси виникнення та поширення локалізованих солітоноподібних збурень в зонах сейсмічної активності. Проходячи через зону накопичення сейсмічної енергії локалізована хвиля, очевидно, впливатиме на ймовірність поштовху і може виступати в якості його “спускового механізму”. В основі нашого припущення лежать як теоретичні підтвердження існування відокремлених хвиль в твердому тілі так і експериментальні дослідження існування таких хвиль.

Зауважимо, що землетруси часто виникають на глибинах порядку поверхні Мохоровичича [8], яка також являє собою умовну границю між середовищами з різною густиною. За деякими оцінками, густина нижче від поверхні Мохо, зростає в декілька разів. В такому випадку, поверхня Мохоровичича може розглядатись як границя середовищ і для опису явищ, які там відбуваються, можна використовувати з певним рівнем наближення різноманітні підходи, зокрема, рівняння типу мілкої води, підхід, що враховує анізотропію, структурно-феноменологічний підхід, якщо враховувати вкраплення з різною густиною та наявність блоків. Усі ці моделі допускають солітонні розв’язки. Аналог з мілкою водою, зокрема, підтримує той факт, що речовина нижче від поверхні Мохо знаходиться у в’язкому стані за рахунок високого тиску.

Якщо проаналізувати причини виникнення солітоноподібних хвиль, то можна зауважити, що необхідною умовою є рух, тобто середовище повинне бути динамічним. Тоді причиною виникнення таких хвиль є дисперсія швидкостей окремих фрагментів рухомого середовища. В нашому випадку

таким рухом очевидно є обертання Землі навколо своєї осі. В процесі такого обертання очевидно виникає дисперсія швидкостей окремих блоків, що і може бути причиною виникнення солітоноподібних хвиль. Причиною солітоноподібних хвиль можуть бути і самі поштовхи-адже під час землетрусу виникають дуже складного характеру рухи як поперечного так і поздовжнього характеру. Тоді солітони можуть бути причиною афтершоків.

Аналіз швидкостей солітоноподібних хвиль для реальних сейсмічних процесів показує, що вони менші за швидкості сейсмічних хвиль. В рамках аналізу рівнянь руху анізотропного твердого тіла можна побачити, що швидкість солітона в земній корі може бути довільною і залежить лише від початкових умов його виникнення. З часом вона падає за рахунок неоднорідності середовища. Таким чином легко пояснити залежність між собою серій вторинних поштовхів, яка виявлена статистичними методами. В рамках аналізу S-P хвиль це зробити неможливо, оскільки час між окремими поштовхами є досить великим і не відповідає швидкості S-P хвиль .

Специфікою сейсмічних процесів у певному регіоні є наявність деякої кількості поштовхів, серед яких , як правило, є поштовх найбільшої енергії (магнітуди). Часто перед основним поштовхом відбувається декілька поштовхів значно меншої магнітуди (їх називають форшоками). Після основного поштовху, як правило, відбувається серія поштовхів меншої магнітуди (афтершоки). Зауважимо, що трапляються випадки, коли форшоки чи афтершоки є відсутніми чи їх неможливо ідентифікувати. Будемо вважати, що основний поштовх може спричинити появу одного чи кількох солітоноподібних хвиль, які рухаються в різних напрямках від гіпоцентру землетрусу. Кожна така хвиля, проходячи через зону накопичення сейсмічної енергії, спричиняє новий землетрус, який, в свою чергу, може породити нові солітони. Одримуємо лавиноподібний процес породження солітоноподібних хвиль та афтершокових поштовхів.

Під землетрусом (поштовхом) розумітимемо вектор (x, t, μ) , де x -

гіпоцентр, $(x \in \Omega)$, t - час поштовху ($t \in R^+$), μ - енергія (магнітуда).

В якості формальної моделі середовища, де відбувається процес виникнення та поширення солітоноподібних хвиль, що можуть бути генераторами сейсмічних поштовхів, будемо розглядати динамічну систему виду:

$$\Sigma = \{T, \Omega, G_0, E, Y, S, I\}, \quad (6.32)$$

де $T = [t_0, t_1] \subset R$ - часовий інтервал; $\Omega \subset R^3$ - фазовий простір; $G_0 \subset \Omega \times T \times M$ - початкова множина землетрусів; E - функція розподілу накопичення сейсмічної енергії; $\Omega(E)$ - відповідний простір функцій; $Y: T \times \Omega \rightarrow \Omega$ - оператор, що визначає траєкторії солітоноподібних хвиль; $S_t \subset \Omega$ - множина координат солітоноподібних хвиль в момент часу t , $S = \{S_t, t \in [t_0, t_1]\}$; $I: \Omega \times \Omega(E) \times S \times T \times M(T) \rightarrow [0, 1]$ - функціонал, який описує ймовірність виникнення землетрусу певної магнітуди в заданий момент часу в заданій точці за рахунок солітонних механізмів.

Для побудови моделі визначимо її компоненти. В якості вихідних даних будемо розглядати послідовність виду: $(x_1, t_1, \mu_1), (x_2, t_2, \mu_2), \dots, (x_k, t_k, \mu_k)$, де x_1, x_2, \dots, x_k - гіпоцентри землетрусів, $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ - моменти поштовхів, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ - магнітуди.

Функція накопичення сейсмічної енергії може бути побудована за рахунок збору експериментальних даних, аналізу передвісників. Зауважимо, що описана далі методика прогнозування може і не враховувати останню функцію.

Нехай $\mu(x, t)$ - скалярне випадкове поле, що описує інтенсивність землетрусу в точці x в момент часу t (за шкалою Медведєва-Шпонхойера-Карника інтенсивності землетрусів визначаються в діапазоні 1-12 балів). В такому випадку задачу районування можемо формалізувати наступним способом: для кожної точки x визначається таке значення M , що $P\{\mu(x, t) > M, t \in [0, 50]\} = \varepsilon$. Відповідне значення знаходиться з каталогів

землетрусів в даній точці протягом відповідного періоду спостережень (на рис.6.0-50 років, $\varepsilon = 0.1$).

Як розглядалось вище, існує низка підходів, що дозволяють визначити ймовірність того, чи належить деяка множина точок спостережень $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l})$ траєкторії однієї і тої ж відокремленої хвилі. При виконанні певних умов така ймовірність рівна 1 чи близька до 1. В інших випадках можемо запропонувати процедуру її оцінки в процесі спостережень сейсмічних поштовхів. Нехай, наприклад, виконується умова: кожна наступна точка x_{j_k} послідовності $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$ знаходиться у визначеній області $A_k \subset \Omega$. Тоді з геометричного означення ймовірності у випадку припущення про незалежність подій матимемо подію, ймовірність якої $\prod_{k=1}^l \mu\{A_k\} / \mu\{\Omega\}$. Таким чином, можна стверджувати про залежність між собою відповідних точок, яка можлива в нашому випадку лише при наявності солітона.

Нехай $\tilde{x} = (x_{j_1}, t_1, x_{j_2}, t_2, \dots, x_{j_l}, t_l)$. Розглянемо випадкові події:
 $A(x, t, M) = \{ \text{в точці } x \text{ в момент часу } t \text{ відбувся поштовх магнітуди } > M \}$,
 $Is(\tilde{x}) = \{ \text{солітоноподібна хвиля, що ідентифікується за послідовністю } x_{j_1}, t_1, x_{j_2}, t_2, \dots, x_{j_l}, t_l, \text{ існує} \}$,
 $S(\tilde{x}, y, t) = \{ \text{солітоноподібна хвиля, що ідентифікується за послідовністю } x_{j_1}, t_1, x_{j_2}, t_2, \dots, x_{j_l}, t_l, \text{ зумовлює поштовх з гіпоцентром в точці } y \text{ в момент часу } t \}$,
 $Id(\tilde{x}, y, t) = \{ \text{солітоноподібна хвиля, що ідентифікується за послідовністю } x_{j_1}, t_1, x_{j_2}, t_2, \dots, x_{j_l}, t_l \text{ знаходиться в точці } y \text{ в момент часу } t \}$,
 $E(x, t, M) = \{ \text{в точці } x \text{ в момент часу } t \text{ накопичилась сейсмічна енергія, достатня для виникнення поштовху магнітуди } > M \}$,
 $NS = \{ \text{поштовх не зумовлений солітоноподібними хвилями} \}$.

Тоді

$$P\{A(x, t, M)\} = P\{\mu(x, t) > M\} = P\{\mu(x, t) > M / S(\tilde{x}, x, t)\}P\{S(\tilde{x}, x, t)\} + \\ + P\{\mu(x, t) > M / \bar{S}(\tilde{x}, x, t)\}P\{\bar{S}(\tilde{x}, x, t)\} = P\{\mu(x, t) > M / S(\tilde{x}, x, t)\},$$

$$\begin{aligned}
& P\{E(x, t, M)\}P\{E(x, t, M)\}P\{S(\tilde{x}, x, t)\} + P\{\mu(x, t) = M / \bar{S}(\tilde{x}, x, t)\}P\{\bar{S}(\tilde{x}, x, t)\} = \\
& = P\{E(x, t, M)\}P\{S(\tilde{x}, x, t) / Is(\tilde{x})\}P\{Is(\tilde{x})\} + \\
& + P\{\mu(x, t) = M / \bar{S}(\tilde{x}, x, t), E(x, t, M)\}P\{\bar{S}(\tilde{x}, x, t)\}P\{E(x, t, M)\}, \\
& P\{S(\tilde{x}, x, t)\} = \int_G P\{S(\tilde{x}, x, t) / Id(\tilde{x}, y, t)\}P\{Id(\tilde{x}, dy, t)\}.
\end{aligned}$$

У випадку, коли солітоноподібна хвиля проходить на певній відстані від точки, для якої необхідно розрахувати ймовірність поштовху, необхідно конкретизувати її вплив. Такий вплив в найпростішому випадку опишемо функцією $f_{N(x, \varepsilon)}(z)$ ($N(x, \varepsilon)$ -випадкова величина, що має нормальний розподіл):

$$P\{S(\tilde{x}, x, t) / Id(\tilde{x}, y, t) = f_{N(x, \varepsilon)}(x - y)P\{S(\tilde{x}, x, t) / Id(\tilde{x}, x, t)\}.$$

Розглянемо випадок, коли може існувати n солітоноподібна хвиль, які знаходяться в деякому околі точки накопичення сейсмічної енергії. Моделювання процесів взаємодії солітоноподібних хвиль показує, що при їх взаємодії не відбувається зростання амплітуд. Тому при розрахунку ймовірності поштовху будемо вважати, що не виникають додаткові ефекти, пов'язані з взаємодією хвиль, що впливають на ймовірність поштовху.

Розглянемо випадкові події: $S_i(x, t) = \{ i\text{-та солітоноподібна хвиля зумовлює поштовх в точці } x \text{ в момент часу } t \}$, $S_{ij} = \{ i\text{-та та } j\text{-та солітоноподібна хвилі при їх взаємодії зумовлюють поштовх в точці } x \text{ в момент часу } t \}$, Тоді неперетинними будуть події: $S_{i_1 i_2 \dots i_k} \bar{S}_{i_{k+1}} \dots \bar{S}_{i_n}, 1 \leq k \leq n$.

Використовуючи формулу повної ймовірності, маємо:

$$\begin{aligned}
& P\{\mu(x, t) > M\} = \\
& \sum_{i_1 i_2 \dots i_k}^n P\{Is(i_1)\}P\{Is(i_2)\} \dots P\{Is(i_k)\}P\{S_{i_1 i_2 \dots i_k}(x, t)\}P\{E(x, t, M)\}P\{\bar{S}_{i_{k+1}}\} \dots P\{\bar{S}_{i_n}\} \\
& ++ P\{\mu(x, t) > M / NS, E(x, t, M)\}P\{NS\}P\{E(x, t, M)\},
\end{aligned}$$

де $i_1, i_2, \dots, i_k, 1 \leq k \leq n$ -усі підмножини з множини індексів $\{1, 2, \dots, n\}$, що містять k елементів, $1 \leq k \leq n, P\{S_i(x, t)\} = P\{S_i(x, t) / Is(i)\}P\{Is(i)\}$.

Звідси

$$P\{\mu(x, t) > M\} > \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k}^n P\{Is(i_1)\}P\{Is(i_2)\} \dots P\{Is(i_k)\}P\{S_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x, t) / Is(i_1, i_2, \dots, i_k)\}P\{E(x, t, M)\}P\{\bar{S}_{i_{k+1}}\} \dots P\{\bar{S}_{i_n}\}.$$

Зауважимо, що ймовірність $P\{S_i / Is(i)\}$ можна оцінити, аналізуючи відповідний процес форшокових поштовхів (знаходиться частота події, яка полягає в тому, що епіцентр форшоку співпадає з положенням прогнозної локалізованої хвилі у відповідний момент часу). Аналогічно можна оцінити $P\{S_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x, t)\}$.

Таким чином, для обрахунку ймовірності поштовху (частковий випадок функціонала L), що відбувається в результаті проходження відокремленої хвилі через області, де накопичується сейсмічна енергія, необхідно робити оцінки траєкторій солітоноподібних хвиль за результатами спостережень їх окремих точок.

У відповідності з підходом, описаним в п. 6.4.1, метод прогнозування, що пропонується, полягає у виділенні з загальної сукупності землетрусів підпоследовностей, викликаних однією і тою ж солітоноподібною хвилею та побудові гіпотетичної траєкторії для кожної такої хвилі. Знаючи відстань між окремими поштовхами вздовж траєкторії можна оцінити швидкість. Знаючи окремі точки траєкторії, можна зробити оцінку самої траєкторії. Маючи оцінки швидкості та траєкторії кожної солітоноподібною хвилі, можна оцінити її положення в будь-який момент часу. Тоді можна оцінити сукупність положень солітоноподібних хвиль в будь-який момент часу та уточнити ймовірність поштовху.

В якості вихідних даних будемо розглядати послідовність виду:

$(x_1, t_1, \mu_1), (x_2, t_2, \mu_2), \dots, (x_k, t_k, \mu_k)$, де x_1, x_2, \dots, x_k - гіпоцентри землетрусів, $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ - моменти поштовхів, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ - магнитуди.

Зауважимо, що на етапі попереднього аналізу даних можемо розглядати два підходи. Перший враховує вплив відокремлених хвиль з врахуванням їх руху вглиб Землі чи до поверхні (тоді матимемо тривимірну

модель), другий—лише хвилі, які рухаються на рівні поверхні Мохоровичича в обмеженому районі, коли можемо обмежитись двохвимірним випадком.

Для ідентифікації траєкторій відокремлених хвиль застосуємо загальний підхід, описаний вище. Спосіб прогнозування руху локалізованих солітоноподібних хвиль наступний.

1. Визначаємо швидкості $\tilde{v}_{ij} = \frac{\rho(x_j, x_i)}{t_j - t_i}$, $j > i, i, j = 1, 2, \dots, n$ ($\rho(\cdot)$ -відстань між

гіпоцентрами).

2. З усієї послідовності землетрусів виділяються підпослідовності $(x_{i_1}, t_{i_1}), (x_{i_2}, t_{i_2}), \dots, (x_{i_k}, t_{i_k})$ з врахуванням критеріїв:

$$\text{А) } \tilde{v}_1 > \tilde{v}_2 > \dots > \tilde{v}_{k-1}$$

$$\text{Б) } \tilde{v}_r \leq \tilde{v}_{r-1} + \frac{\tilde{v}_{r+1} - \tilde{v}_{r-1}}{\bar{t}_{r+2} - \bar{t}_r} (\bar{t}_{r+1} - \bar{t}_r), \text{ де } \bar{t}_r = t_{i_r} \text{ або } \bar{t}_r = \frac{t_{i_r} - t_{i_{r-1}}}{2},$$

$$\tilde{v}_r = \frac{\rho(x_{i_{r+1}}, x_{i_r})}{t_{i_{r+1}} - t_{i_r}}, r = 1, 2, \dots, k-1$$

3. Для кожної виділеної підпослідовності землетрусів визначається прогнозна швидкість:

$$\tilde{v}_k(t) = Ce^{-\mu(t-t_{i_{k-2}})}, \mu = -\frac{\ln(\tilde{v}_{k-1}/\tilde{v}_{k-2})}{t_{i_k} - t_{i_{k-1}}}, C = \tilde{v}_{k-1}e^{\mu(t_{i_k} - t_{i_{k-2}})}$$

4. Для кожної підпослідовності для заданого моменту часу визначаємо прогнозу криву траєкторії солітоноподібної хвилі (в найпростішому випадку як криву, яка в полярній системі координат має вигляд: $r = c_1 e^{\mu_1(\varphi - \varphi_0)} + c_2 e^{\mu_2(\varphi - \varphi_0)} + \dots + c_m e^{\mu_m(\varphi - \varphi_0)}$, ($\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, c_1, c_2, \dots, c_m, \varphi_0$ -деякі параметри, оцінка яких здійснюється з врахуванням гіпоцентрів)

5. Для кожної підпослідовності для заданого моменту часу визначаємо положення солітона з врахуванням швидкості руху та прогнозу траєкторії. Області, утворені проекцією координат усіх солітоноподібних хвиль на поверхню Землі, вважаються сейсмо-небезпечними в даний момент часу.

6.6 Інформаційна система та приклади моделювання

Очевидно, що реалізувати описані вище методи ідентифікації траєкторій відокремлених хвиль, що можуть спричинити сейсмічні поштовхи, неможливо без комп'ютерної програми.

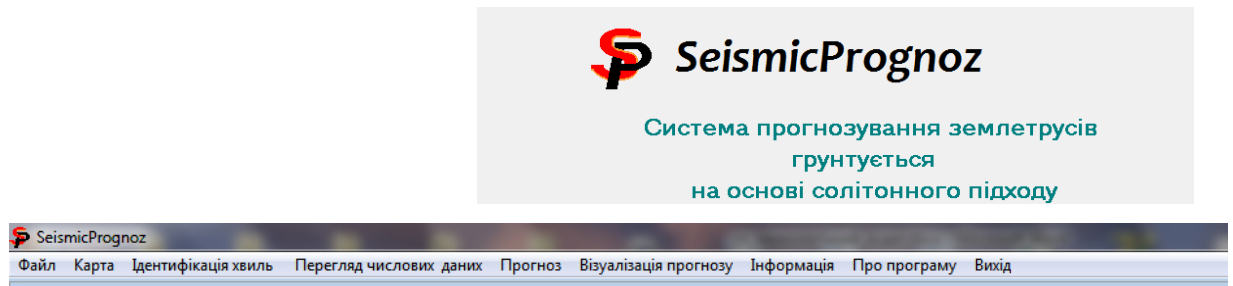


Рис.6.1 Головне меню програми

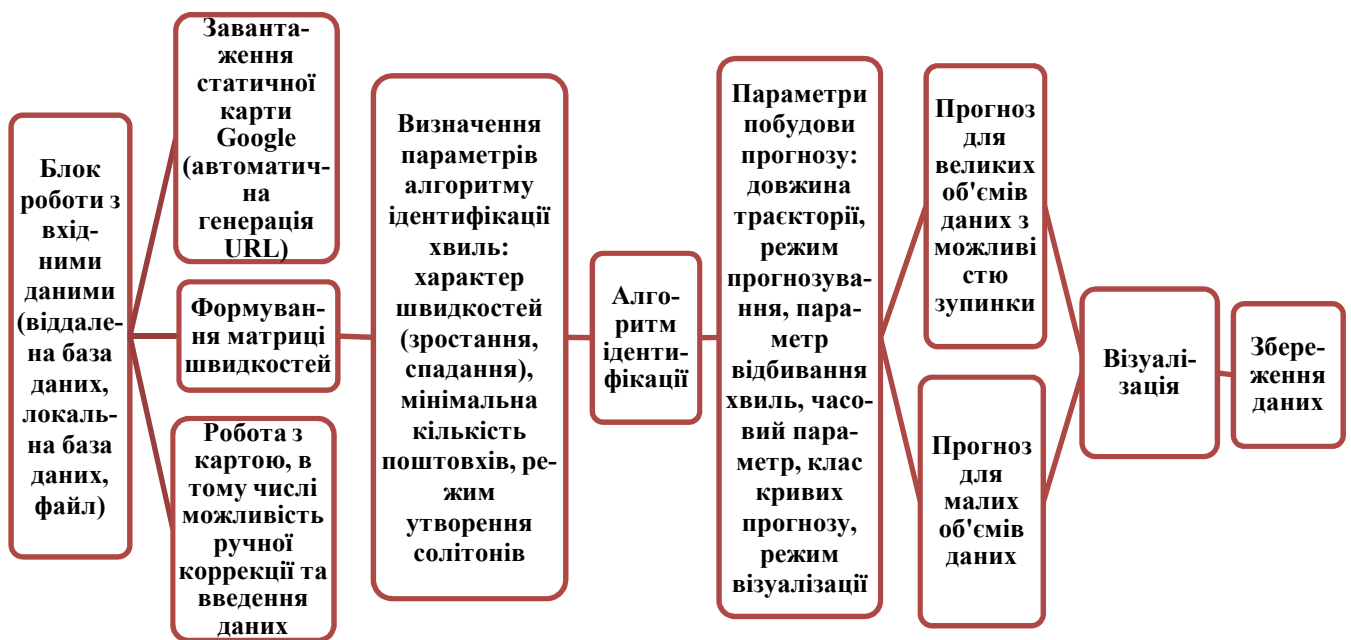


Рис.6.2. Основні компоненти програмного комплексу

Тому був розроблений програмний комплекс, який має наступні функціональні компоненти: підсистему отримання вхідних даних шляхом підключення до віддалених баз даних та формування відповідних SQL-запитів; підсистему візуалізації поштовхів та корекції даних, що базується на використанні статичних карт Google та Google API; підсистему аналізу

вхідних даних, яка включає формування матриці швидкостей та алгоритм ідентифікації траєкторій солітоноподібних хвиль на основі методів, описаних вище; підсистему побудови прогнозу траєкторій та їх візуалізації.

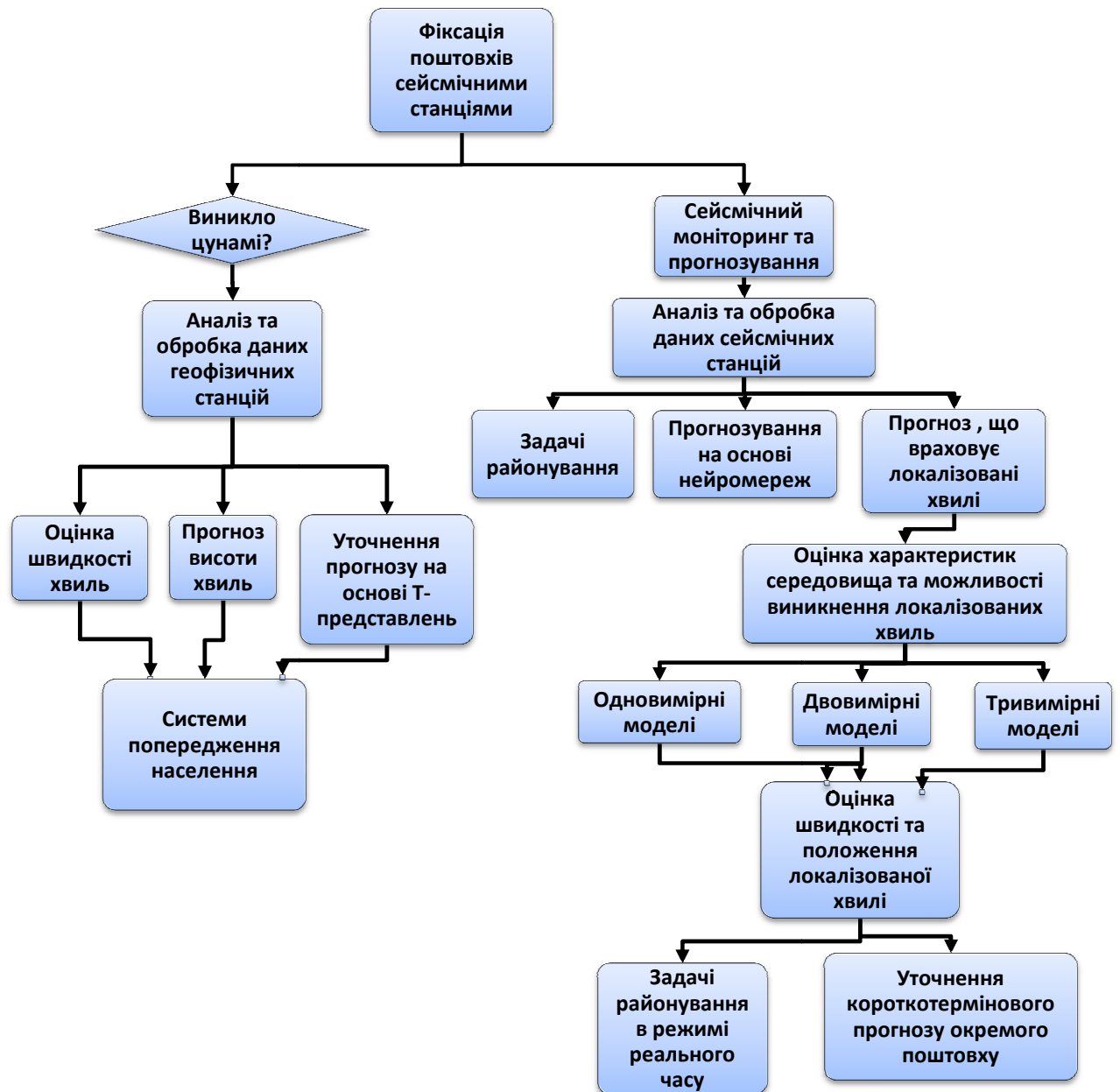
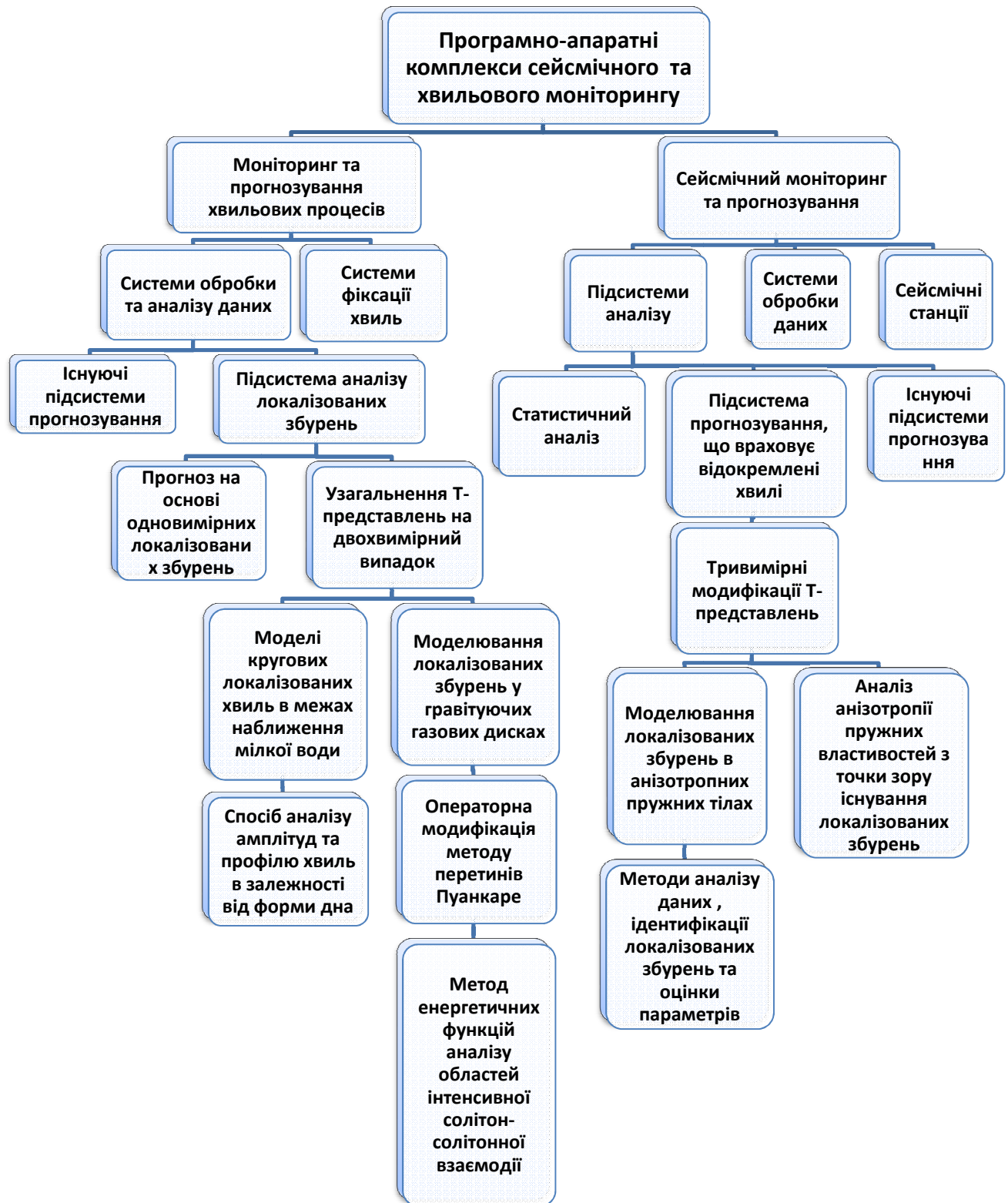


Рис.6.3. Концептуальна модель побудови прогнозів в системах сейсмічного та хвильового моніторингу



жсу моніторингу
підсистему аналізу

На рис.6.1 зображено пункти головного меню програмної системи, 6.2- основні компоненти програмного комплексу, 6.3- концептуальну модель побудови прогнозів в системах сейсмічного та хвильового моніторингу.

Програма працює в локальній тестовій версії та як підпрограма глобальної системи прогнозування, що розробляється в відділі сейсмічної небезпеки Інституту геофізики НАН України. В програмі реалізована багатопотокова обробка даних, оскільки алгоритм ідентифікації має поліноміальну складність та вимагає значного часу роботи при наявності великої кількості поштовхів а також виникає потреба призупиняти та продовжувати розрахунки, формувати проміжні вихідні файли. Програма дозволяє автоматично формувати URL для отримання відповідної карти Google в залежності від вибраної області дослідження та координат відповідних поштовхів та має низку параметрів для налаштування алгоритму ідентифікації солітоноподібних хвиль та прогнозування їх траєкторій.

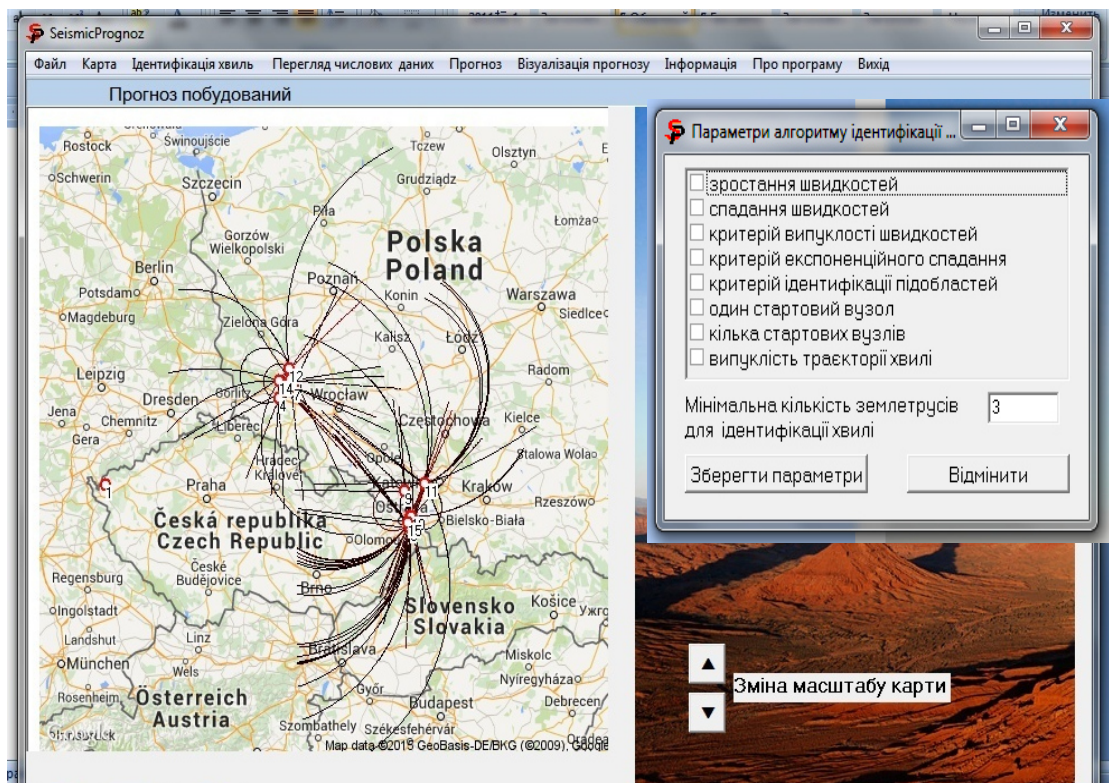


Рис.6.5. Ідентифікація солітоноподібних хвиль для сейсмічного процесу в районі Польщі-Чехії, 2013 рік

На рис.6.4 зображена структура програмно-апаратного комплексу моніторингу сейсмічних та хвильових процесів, що містить підсистему аналізу локалізованих збурень.

Приклад 1 Ідентифікація солітоноподібних хвиль для сейсмічного процесу в районі Польщі-Чехії, 2013 рік

На Рис.6.5 зображено приклад траєкторій солітоноподібних хвиль для регіону Польщі та Чехії. Відомою є інформація про гіпоцентри та час початку 15 землетрусів, що відбулись в цьому регіоні на протязі 3 днів у 2014 році. Їх епіцентри позначені цифрами від 0 до 14 в порядку зростання моментів часу їх початку. Прогнозні траєкторії зображені на малюнку кривими .

Приклад 2 Землетрус в районі Японського архіпелагу.

Розглянемо результати моделювання, які були отримані при аналізі кількох землетрусів, що відбулись в районі Японських островів за 3 доби перед землетрусом магнітудою 8.9 (який відбувся 11 березня 2011 року). На рис.6.6 цифрами від 0 до 12 позначені епіцентри форшоків, епіцентр головного поштовху позначено кругом максимального радіусу (він знаходиться поблизу епіцентру форшоку з номером 1). Кривими та прямими лініями позначено прогнозні траєкторії солітоноподібних хвиль, розраховані за допомогою розробленого програмного забезпечення до моменту основного поштовху. При оцінці траєкторій солітоноподібних хвиль враховані гіпотетичні швидкості солітоноподібних хвиль та можливість їх відбивання від областей з підвищеною густиною порід. За допомогою методу аналізу швидкостей, описаного вище, ідентифікувались поштовки, які знаходились на одній гіпотетичній траєкторії. Самі траєкторії апроксимувались деякими кривими, проводилась оцінка швидкості. Як бачимо, форшоки розташувались таким чином, що велика кількість можливих траєкторій солітоноподібних хвиль проходить через область, де відбувся максимальної магнітуди поштовх.

Явно прослідковується своєрідний ефект фокусування солітоподібних хвиль в точці, де відбувся основний поштовх.

Відзначимо, що за характером траєкторій хвилі-генератори можна поділити на дві групи: що мають гладкі криволінійні траєкторії та ламані, утворені за рахунок відбивань (на ділянках, що безпосередньо граничать з гіпоцентром основного поштовху).

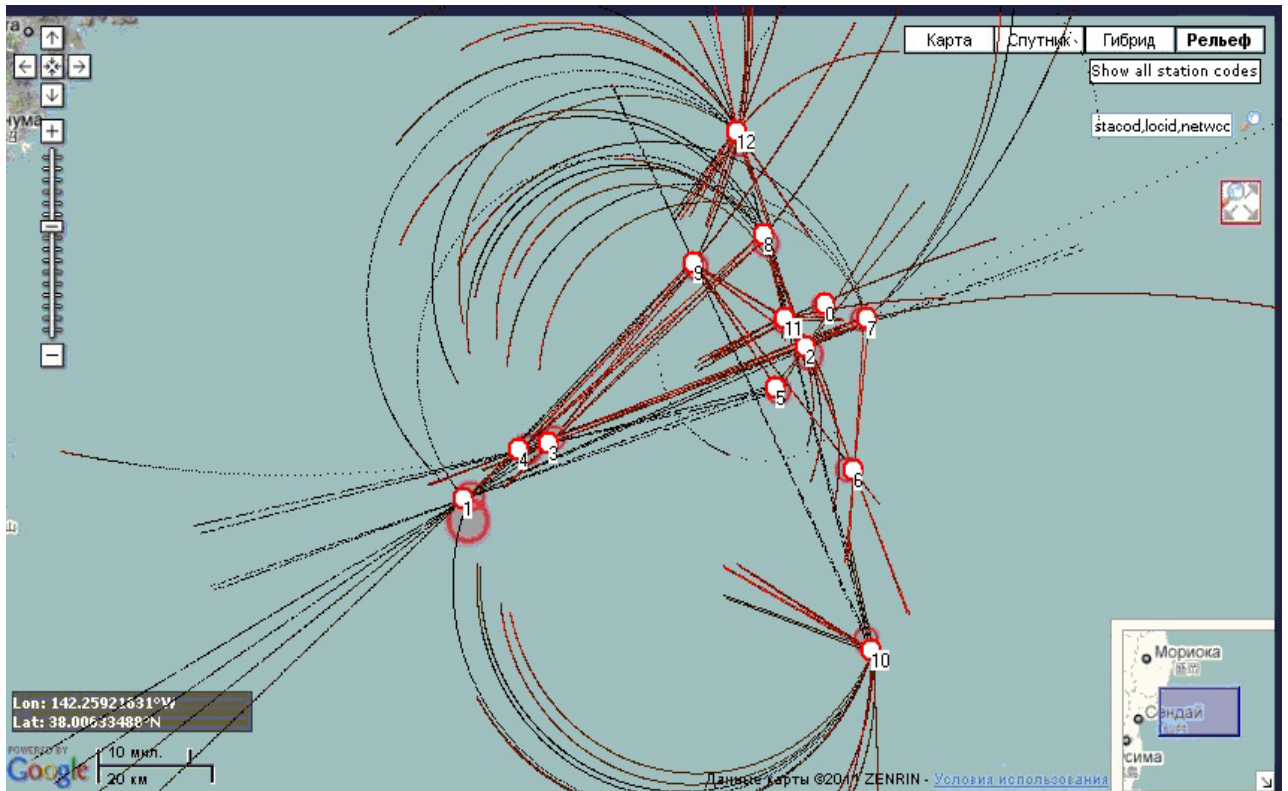


Рис.6.6. Модель сейсмічного процесу в районі Японських островів, 8-11 березня 2011 р.

Аналіз швидкостей показує, що до моменту основного поштовху саме хвилі другого типу досягли точки гіпоцентру, хвилі ж першого типу не встигли до цього моменту часу (відзначимо, що оцінки були взяті досить грубі і окремі з хвиль першого типу насправді також могли дійти до точки, де відбувся основний поштовх). Однак, хвилі, що досягли точки фокусування пізніше, могли бути генераторами численних афтершоків, які відбулись після основного поштовху під час японського землетрусу 11 березня.

Таким чином, для поштовху, що відбувся в районі м. Фукусіма 2011 р. місце головного поштовху потрапило в область зосередження максимальної

кількості прогнозних локалізованих хвиль діаметром 10 км. а оцінка швидкостей руху відповідних збурень дозволила оцінити довжину тривожного періоду тривалістю 7 год (форшокова активність при цьому становила в середньому 2 год. між окремими поштовхами).

Приклад 3 Побудова короткотермінового прогнозу землетрусів на прикладі серії афтершоків в районі острова Суматра

Розглянемо методологію побудови короткотермінового прогнозу на прикладі серії землетрусів, які відбулися в районі острова Суматра з 26.10.10 по 28.10.10. На рис.6.7 зображено приклад прогнозу для регіону, що знаходиться на південному заході від острова Суматра.

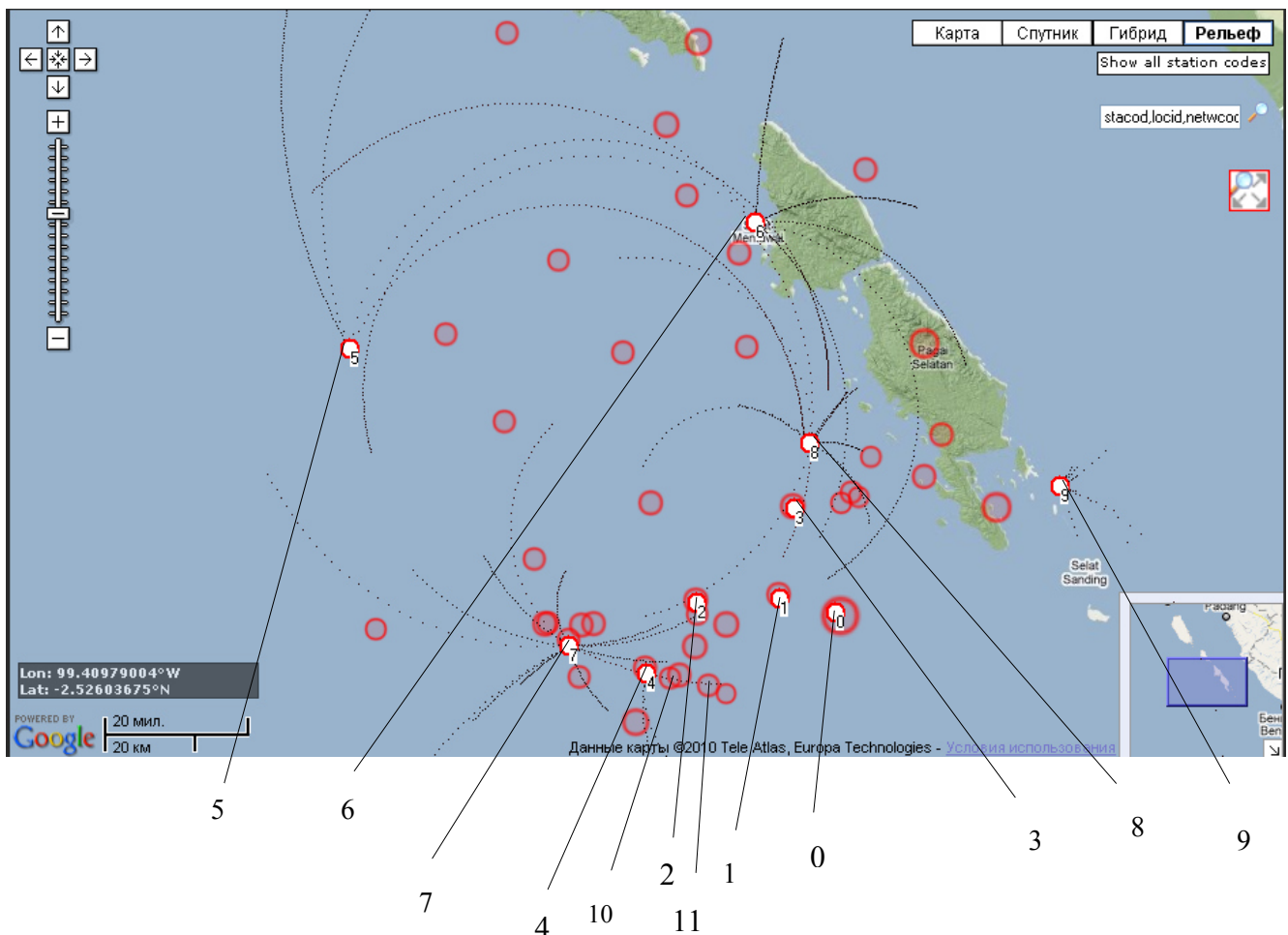


Рис.6.7. Моделювання траєкторій солітоноподібних хвиль під час сейсмічного процесу в районі о.Суматра

Відомою є інформація про гіпоцентри та час початку десяти землетрусів, що відбулись в цьому регіоні в період з 26.10.10 по 27.10.10, їх епіцентри позначені цифрами від 0 до 9 в порядку зростання моментів часу їх початку. Прогнозні траєкторії зображені на малюнку кривими. Епіцентр прогнозованого землетрусу – 11. У відповідності з заявленим способом, прогнозований землетрус був зумовлений солітоном з погнозною траєкторією 10. Червоним кольором відмічені області, де перетинається максимальна кількість прогнозних траєкторій міграції гіпоцентрів для інтервалу часу 200 хв. Номерами позначені епіцентри землетрусів, які відбулися раніше. Зауважимо, що причину основного поштовху ми не розглядаємо, а лише послідовність (рій) афтершоків.

Приклад 5 Прогнозування поштовху в районі Чилі, 2014 р.

На рис.6.8 показано інформацію про поштовхи, що відбулись перед основним поштовхом останнього великого землетрусу біля узбережжя Чилі.

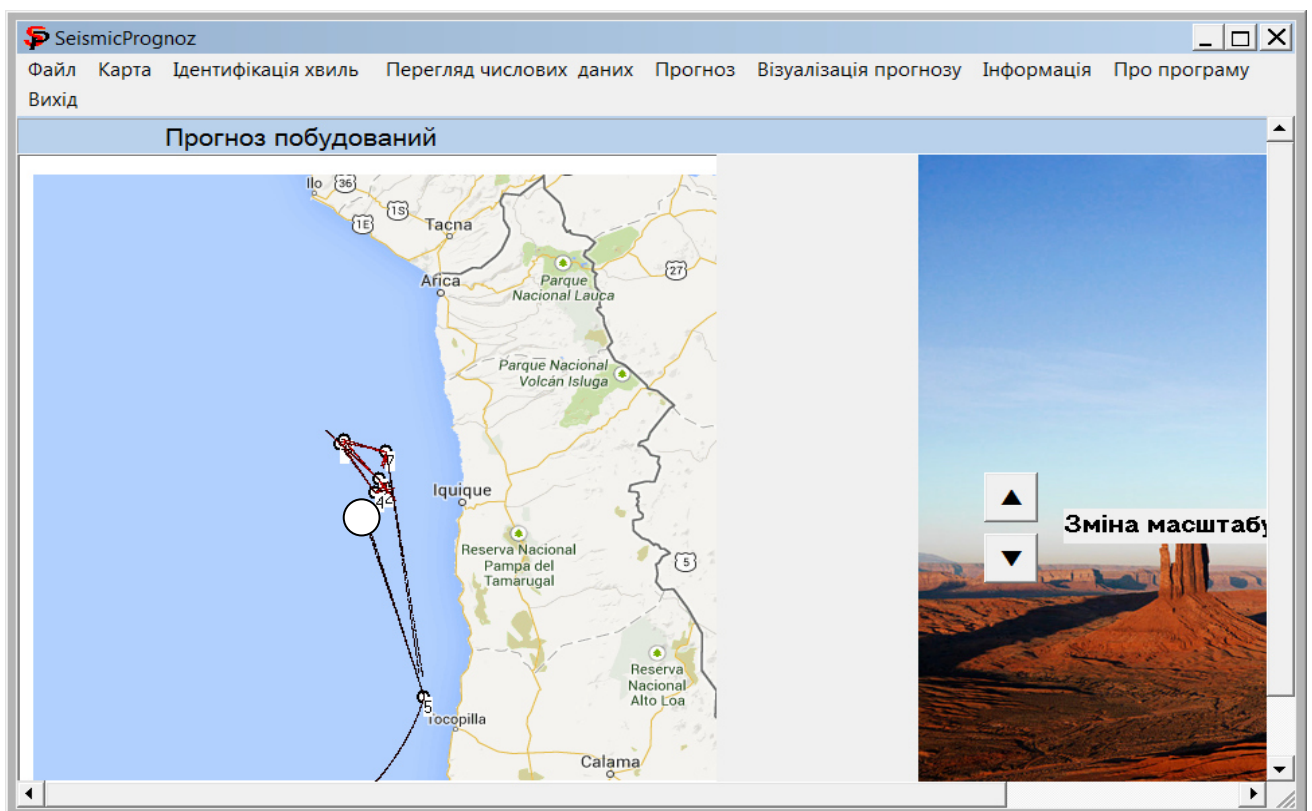


Рис.6.8. Прогнозування поштовху в районі Чилі, 2014 р.

Показано результати солітонного аналізу послідовностей поштовхів та побудовано прогнозні траєкторії відокремлених хвиль. Область основного

поштовху зображена кругом. Як бачимо, зафіксовано прогнозну траєкторію солітоноподібної хвилі, що потрапила в область, де відбувся основний поштовх в момент самого поштовху.

6.7 Висновки до розділу

Таким чином, в розділі розглянуто проблему оцінювання траєкторій відокремлених хвиль деформації за результатами спостережень окремих їх точок. При цьому запропоновано деякі підходи до побудови прогнозних траєкторій, що базуються на узагальненнях інтерполяційних многочленів Лагранжа а також пропонується знаходити траєкторії в класі функцій, що являють собою суму експонент у полярній системі координат.

Задача оцінки параметрів відповідних кривих привела до експоненційної проблеми моментів. В роботі запропоновано деяку наближену процедуру, за допомогою якої можна знаходити точки зосередження мас (параметри кривих в класі сум експонент). В основі відповідної процедури лежить побудова системи бієктивних відображень часових інтервалів між окремими поштовхами на інтервали одиничної довжини. Тоді задача знаходження центрів мас експоненційної проблеми моментів зводиться до аналогічної задачі степеневі проблеми моментів, яка добре вивчена.

Методи оцінки траєкторій відокремлених хвиль, що запропоновані в даному розділі, становлять теоретичну основу для побудови прогнозів окремих поштовхів в рамках «солітонних» моделей сейсмічного процесу.

Запропонована математична модель процесу виникнення послідовностей землетрусів, що враховує вплив відокремлених хвиль солітонного типу як «спускових механізмів» окремих поштовхів. У результаті моделювання показано, що відокремлені хвилі солітонного типу можуть бути генераторами сейсмічних поштовхів, проходячи через зони накопичення сейсмічної енергії. Особливо це стосується випадків, коли декілька таких хвиль взаємодіють, мають місце ефекти їх фокусування в деякій області.

Запропоновані методи моделювання сейсмічних процесів ефективні у випадках, коли геофізика сейсмічного процесу аналогічна тому, який відбувався, наприклад, в районі Японських островів у 2011 році.

В роботі розроблено програмний комплекс, який дозволяє проводити аналіз даних сейсмічних станцій стосовно окремих сейсмічних поштовхів, ідентифікувати окремі солітоноподібні локалізовані збурення, будувати оцінки їх траєкторій та прогнози руху. Відповідний комплекс має важливе практичне значення для уточнення сейсмічного районування територій в режимі реального часу.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано нові науково-обґрунтовані результати, що в сукупності вирішують важливу науково-прикладну проблему, сутність якої полягає в підвищенні ефективності систем сейсмічного та хвильового моніторингу шляхом створення теоретико-математичних основ комп'ютерного моделювання процесів генерації, поширення і взаємодії локалізованих солітоноподібних збурень в суцільних середовищах та розробки відповідних програмних комплексів.

Отримані нові наукові та практичні результати роботи мають переваги перед наявними рішеннями.

1. З вивчених джерел випливає, що існуючі програмно-апаратні комплекси сейсмічного та хвильового моніторингу, як правило, не містять ефективних підсистем прогнозування через неврахування низки фізичних факторів та відсутність адекватних математичних моделей відповідних фізичних процесів, зокрема процесів поширення локалізованих солітоноподібних збурень та їх взаємодії. Виходячи з цього, створено нові математичні моделі, що враховують наявність солітоноподібних локалізованих збурень та їх властивості, зокрема, характер траєкторій і дозволяють подолати вказані недоліки відповідних програмно-апаратних комплексів.

2. Запропоновано новий конструктивний спосіб представлення профілю локалізованих солітоноподібних збурень (Т-представлення), що має переваги слабких асимптотичних представлень типу δ -солітонів в частині їх універсальності, є зручним для знаходження форми та траєкторій відокремлених хвиль, допускає використання у просторових випадках та дозволяє моделювати як солітони так і локалізовані хвилі, які не є солітонами.

3. На основі Т-представлень розроблено чисельний метод моделювання процесів взаємодії одновимірних локалізованих збурень типу солітонів, антисолітонів та їх комбінацій (бризерів), що відрізняється,

зокрема, розрахунком амплітудних характеристик та профілю хвильових взаємодій у заданих контрольних точках та дозволяє вивчати ефекти взаємодії і динаміки змін в часі довільних початкових локалізованих збурень. Метод моделювання має загальний характер і може бути використаний для дослідження одновимірних локалізованих солітоноподібних збурень в середовищах, динамічні властивості яких описуються диференціальними рівняннями, що містять нелінійні та дисипативні компоненти, зокрема, рівняннями типу Кортевега-де Вріза. Відповідні розрахунки здійснені в системах автоматизованого проектування та зіставлені з результатами експериментів, виконаних на установках Національного університету водного господарства та природокористування. Середня відносна похибка відхилення експериментального та теоретичного профілю локалізованої хвилі в основній області її локалізації становить 10%.

4. Відповідна методика моделювання одновимірних відокремлених хвиль поширена на двовимірний випадок, на основі чого вдосконалені методи моделювання локалізованих збурень та дослідження їх траєкторій у областях змінної густини для моделей типу мілкої води – моделі мілкої води, що враховує поверхню дна та моделі тонкого гравітуючого газового диску та розроблені відповідні програмні комплекси, зокрема:

а) запропоновано математичну модель кругових локалізованих хвиль в межах наближення мілкої води, яка дозволяє точніше описувати поведінку хвиль типу цунамі в залежності від поверхні дна (зокрема, при їх наближенні до берега), проведено відповідні чисельні розрахунки в системах автоматизованого проектування;

б) побудовано математичні моделі процесів поширення локалізованих солітоноподібних збурень у гравітуючих газових дисках, що відрізняються використанням інфінітізимальних представлень локалізованих збурень в межах заданої точності та на основі яких створені підсистеми прогнозування траєкторій локалізованих збурень у системах автоматизованого

проектування; чисельні експерименти дозволили виявити низку специфічних властивостей відповідних локалізованих збурень, зокрема явищ фокусування хвиль типу антисолітонів та їх відштовхування у областях змінної густини;

5. Запропоновано нові моделі динамічних систем, які відрізняються врахуванням солітонної компоненти та застосуванням спеціальних енергетичних функцій для дослідження ефектів «солітон-солітонної» взаємодії, що дозволило прогнозувати виникнення областей інтенсивної взаємодії відокремлених хвиль у середовищах, де можлива генерація та поширення відповідних локалізованих збурень. Створено нову математичну модель взаємодії траєкторій відокремлених хвиль та областей стрімкої зміни густини за умов значної інтенсивності виникнення таких хвиль, яка відрізняється використанням операторних модифікацій методу перетинів Пуанкаре, що дозволило пояснити один з можливих механізмів формування спіральних хвиль щільності, зокрема в газових дисках, за рахунок взаємодії локалізованих солітоноподібних збурень та областей сильної контрастності густини, встановити умови апроксимації орбіт дискретних динамічних систем, що визначаються операторними перетвореннями, кривими в класі логарифмічних спіралей та розробити програмний комплекс для дослідження динаміки природних об'єктів (які утворюються за рахунок фізичних механізмів, пов'язаних з локалізованими солітоноподібними збуреннями) за їх морфологічною структурою. Застосування відповідного програмного забезпечення дозволяє отримати дискретні множини точок, що моделюють морфологічну структуру відповідних об'єктів (зокрема, спіральні хвилі щільності в гравітуючих газових дисках, області хмарності циклонів) відносно відхилення яких в межах відповідних усереднених метрик становить 15%.

6. Розроблено чисельний метод моделювання локалізованих солітоноподібних збурень у анізотропних пружних середовищах, що відрізняється застосуванням спеціальних тривимірних модифікацій Т-

представлень у яких, зокрема, амплітудні функції залежать від густини середовища та проведено відповідні чисельні експерименти. Проаналізовано типи анізотропії пружних властивостей матеріалів з точки зору існування локалізованих солітоноподібних хвиль в межах класичної теорії анізотропного твердого тіла. Показано, що локалізовані збурення типу δ -солітонів існують при наявності анізотропії пружних властивостей, вищої від орторомбічної сингонії та одержано необхідні та достатні умови, яким повинні задовольняти пружні сталі для існування відповідних хвиль. В результаті зіставлення чисельних розрахунків пружних сталей з експериментальними даними для гірських порід, зокрема, гранітоїдів отримано оцінки швидкості солітоноподібних збурень та показано, що вона з точністю до 11% співпадає з швидкістю поширення поздовжніх сейсмічних хвиль на глибині поверхні Мохоровичича.

7. На основі властивостей поширення солітоноподібних збурень у анізотропних тілах, інформації про зростання анізотропії пружних властивостей гірських порід у зонах накопичення сейсмічної енергії вдосконалено існуючі моделі сейсмічних процесів шляхом врахування локалізованих солітоноподібних збурень як “спускових механізмів” окремих поштовхів, що дозволяє уточнювати сейсмічне районування шляхом врахування областей сейсмічної небезпеки, які змінюються в режимі реального часу. Отримано відповідні ймовірнісні оцінки для кожної області, що залежать, зокрема, від характеру вхідних даних.

8. Отримали подальший розвиток методи обробки та інтелектуального аналізу результатів спостережень точок взаємодії локалізованих хвиль та областей стрімкої зміни густини шляхом модифікації оцінок параметрів, в основі яких лежить конструктивне розв’язання експоненційної проблеми моментів, що дало змогу розробити ефективні алгоритми моніторингу та моделювання солітонної складової сейсмічних процесів на основі даних сейсмічних станцій.

9. Розроблено програмний комплекс для дослідження солітонної складової сейсмічних процесів, який дозволяє доповнювати карти сейсмічного районування областями зосередження локалізованих хвиль, що змінюються в режимі реального часу та здійснювати уточнення прогнозів сейсмічних поштовхів за умови ідентифікації локалізованих збурень в областях сейсмічної активності. Відповідний комплекс працює в локальній, мережевій версіях і може використовуватись як додаткова підсистема у існуючих програмно-апаратних комплексах сейсмічного моніторингу.

На основі низки досліджень сейсмічних процесів, що відбувались, зокрема, в районах Японських островів (2011 р.), о. Суматра (2013 р.), Чилі (2014 р.), Чехії та Польщі (2013 р.) показано, що епіцентр основного поштовху у відповідний момент часу потрапляв в область локалізації прогнозованих хвиль, яка займає 2-5% від усієї площі регіону, де відбувався сейсмічний процес. При цьому виявлено випадки (зокрема, для землетрусу в префектурі Фукусіма, Японія, 2011 р.), коли в момент основного поштовху в районі його гіпоцентру зосереджувалась значна кількість прогнозованих локалізованих збурень, що дозволило уточнити тривожний період у відповідній області (для землетрусу в префектурі Фукусіма, наприклад, такий період тривав 7 год., це становить 5% від тривалості усього періоду форшокових та афтершокових поштовхів) та є вагомим підтвердженням адекватності моделі та перспектив подальшого її використання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ablowitz M. J. The inverse scattering transform Fourier analysis for nonlinear problems / M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, Segur H. // Stud. Appl. Math.–1974. –Vol. 53.– P. 249–315.
2. Adomian G. The fifth-order Korteweg–de Vries equation./ G.Adomian// Internet J. Math. and Math. Sci.–1996.– Vol. 19, No. 2 .–C. 415.
3. Alvaro H. Salas Exact solutions for a third-order KdV equation with variable coefficients and forcing term/ H. S. Alvaro, C.A.Gomez // Mathematical problems in engineering.–2009.–Volume 2009.–P.214–222.
4. Asaraii A. Infinite series method for solving the improved modified KdV equation/ A. Asaraii // Studies in Mathematical Sciences.–2012. – Vol.4. – No.2. – P.25–31.
5. Beatty M. F. Topics in finite elasticity: hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues—with experiments/M.F.Beatty //Appl. Mech. Rev. –1987. –V. 40.–P. 1699–1733.
6. Bedford A. Jump conditions and boundary conditions for a multicontinuum theory for composite elastic materials /A. Bedford // Acta Mech.–1973. – V. 17. – №2.– P. 191 – 199.
7. Bedford A. A Multi-continuum theory for composite elastic materials / A.Bedford, M. Stern //Acta Mech.–1972.– V. 14. – № 1.– P. 85 – 102.
8. Bedford A. On a generalised effective stiffness theory/ A. Bedford, D.S. Drumheller // Trans. ASME., J. Appl. Mech.– 1974.– V. 41. – № 1.– P. 305 – 307.
9. Bedford A. On modeling the dynamics of composite materials/ A. Bedford, D.S.Drumheller, H.J. Sutherland // In mechanics today, ed. S. Neman–Nasser– 1976. – V. 3.– P. 1 – 54.
10. Bedford A. On wave propagation on in fiber– reinforced materials/ A.Bedford, M. Stern // Trans. ASME. J. Appl. Mech.– 1970. –V. 37. – № 4. – P.– 1190 – 1192.

11. Bedford A. Toward a diffusing continuum theory of composite materials/ A.Bedford, M. Stern // Trans. ASME. ,J. Appl. Mech. – 1971. – V. 38. – № 1. – P. 8 – 14.
12. Benjamin T. B. On cnoidal waves and bores/ T.B.Benjamin, MJ. Lighthill // Proc. Royal Society. Ser. A. Vol. 224. – 1954. – P.448 – 460.
13. Beresnev I. A. Seismological evidence for nonlinear elastic ground behavior during large earthquakes / I.A.Beresnev, K.–L.Wen, Y.T. Yeh//Soil dynamics and earthquake engineering. –1995. –V. 14. –P.103–114.
14. Bila N., Mansfield E., Clarkson P. Symmetry group analysis of the shallow water and semi–geostrophic equations // Q. J. Mech. Appl. Math.– 2006.– V. 59. –P. 95–123.
15. Bjussinesq J. Théorie de l'intumescence liquide, appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire / J. Bjussinesq// Compt. Ren. Acad. Sei. Paris. 72. – 1871. –P.755 –759.
16. Bland D. R. The Theory of Linear Viscoelasticity/D.R. Bland–Clarendon Press., Oxford.–1960.
17. Capriz G. Continua with microstructure/G.Capriz // Springer Tracts in Nat. Phil. –1989. – Springer, Berlin. –V.35.
18. Cermelli P. Growth and decay of waves in microstructured solids/ P. Cermelli , F.Pastrone // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. – 1997. – V. 46. –p. 32.
19. Christov C.I. An Implicit Difference Scheme for the Long–Time Evolution of Localized Solutions of a Generalized Boussinesq System/ C.I. Christov , G.A.Maugin // J. Korean. Phys. Soc. –1995.– V. 116.– P. 39–51.
20. Christov C.I. Dissipative solitons/ C.I. Christov , M.G.Velarde // Physica D. – 1995.– V. 86.–P. 323–347.
21. Christov C.I. Implicit time splitting for fourth–order parabolic equations/C.I.Christov, J. Pontes, F.D. Walgrae, and M.G.Velarde // Comput. Methods

Appl. Mech. –1997. –V. 148.–P. 209–224.

22. Christov C.I. Inelastic Interactions of Boussinesq Solitons/ C.I. Christov , M.G.Velarde // Intern. J. Bif. Chaos. – 1994.– V. 4.– P. 1095–1112.

23. Christov M.A. Fourier–Galerkin method for localized solutions of the sixth–order generalized boussinesq equation/ M.A. Christov ,C.I.Christov // Proc. Intern. Conf. on Dynamical Systems and Differential Equations. – Atlanta, USA, May 18–21.– 2000.–P.121–130.

24. Christov M.A. Fourier–Galerkin Method for Localized Solutions of the Equations with Cubic Nonlinearity/ M.A. Christov, C.I.Christov // J. Comp. Anal. Appl. –2002.– V. 4.–P. 63–77.

25. Collet B. Lattice approach for shear horizontal solitons in cubic crystal elastic plates/ B.Collet // Materials Science Forum. –1993. –V. 123–125. –P. 417–426.

26. Collet B. Nonlinear dynamics of localized modes in elastic thin plates/ B.Collet, J.Pouget // Proceedings of the 2nd European Oscillation Conference, Prague, September 9–13. – 1996.– P. 113–118.

27. Conte R. A perturbative Painleve approach to nonlinear differential equations/ R.Conte, A.Fordy, A.Pickering // Physica D. – 1993. – V. 69. –P. 33–58.

28. Conte R. Invariant Painleve analysis of partial differential equations/ R.Conte // Phys. Lett. A . – 1989. – V. 140.– P. 383–390.

29. Conte R. Link between solitary waves and projective Riccati equations/R. Conte, M.Musette// J. Phys. A. Math.Gen.V. – 1992. – V. 25. –P. 5609–5623.

30. Cosserat E. et F. Théorie des Corps Déformables/ E. Cosserat //Librairie Scientifique A. Hermann et Fils. – Paris. – 1909.

31. Crighton D.G. Applications of KdV/ D.G.Crighton // Acta Applicandae Mathematicae. – 1995. – V. 39.– P. 39–67.

32. Dai H. H. Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney–Rivlin rod/H.H. Dai // Acta Mech. – 1998. – V. 127.–P. 193–207.

33. Daily J.W. Characteristics of the solitary wave /J.W.Daily, S.C. Stephan // Proc. ASCE. Dez. – 1951. – Vol. 77. – №107. –P.1–13.
34. Danilov V. G. Weak asymptotic method for the study of propagation and interaction of infinitely narrow δ -solitons/V. G. Danilov , Omel'yanov //Electronic Journal of Differential Equations. –2003. – Vol. (2003). – No. 90. – pp. 1–27.
35. Doronin G.G. Well and ill-posed problems for the KdV and Kawahara equations/ Gleb G. Doronin , Nikolay A. Larkin // Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) – 2008.– v.26 1–2. – P. 133–137.
36. Drazin P.G. Solitons: an introduction/P.G. Drazin and R. S.Johnson // Cambridge Univ. Press. – Cambridge. – 1989.
37. El-Azab M. S. Convergence of Adomain method for solving KDV–Burger equation. / M. S. El-Azab, I. L. El-Kalla //International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST). – May.–2012. – Vol. 4 – No.05.
38. Elmer F.J. Nonlinear dynamics of dry friction/ F.J. Elmer // J. Phys. A: Math. Gen. – 1997. – V. 30. – P. 6057–6063.
39. Elwaki S. A. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations/ S. A. Elwakil, S. K.EL-Labany, S. K. Zahran , M. A. Sabry//Phys. Lett. A.299. – 2002. – P. 179–188.
40. Engelbrecht J. Deformation waves in thermoelastic media and the concept of internal variables/ J.Engelbrecht, G.A.Maugin // Arch. Appl. Mech. – 1996. – V.66. – P. 200–207.
41. Engelbrecht J. Nonlinear wave dynamics. Complexity and simplicity/ J.Engelbrecht//Kluwer. The Netherlands. – 1997.
42. Engelbrecht J. Nonlinear wave processes of deformation in solids/ J. Engelbrecht, A.Berezovski, A. Salupere// Pitman. Boston. – 1983.
43. Engelbrecht J. Nonlinear waves in nonlocal media/ J. Engelbrecht and M.Braun // Appl. Mech. Rev. – 1998. – V. 51. – No 8. –P. 475–488.

44. Engelbrecht J. On the possible amplification of nonlinear seismic waves/ J. Engelbrecht and Y.Khamidullin // *Phys. Earth Planet. Inter.* – 1988. – V. 50. – P. 39–45.
45. Engelbrecht J. One–Dimensional Deformation waves in Nonlinear Viscoelastic Media/ J.Engelbreeht // *Wave Motion.* – 1979. – V. 1. –P. 65–74.
46. Engelbrecht J. Wave hierarchy in microstructured solids/ J. Engelbreeht, P. Cermelli and F.Pastrune // *Geometry, Continua and Microstructure/ Ed. Maugin G.A. Herman Publ. Paris.* – 1999. –P. 99–111.
47. Erbay S. Coupled modified Kadomtsev–Petviashvili equations in dispersive elastic media/ S.Erbay // *Intern. J. Nonl. Mech.* – 1999. – V.34. – P. 289–297.
48. Erbay S. Nonlinear wave modulation in micropolar elastic media–I. longitudinal waves; II. Transverse waves/S.Erbay, H.A.Erbay, and S.Dost // *Int. J. Engng. Sci.* – 1991. – V. 29. – 859–868.
49. Ericksen J.L. Exact theory of stress and strain in rods and shells/ J.L.Ericksen, C. Truesdell // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1958. – V. 1. – N 4. – P. 295 – 323.
50. Eringen A.C. Nonlinear theory of micro–elastic solids. Part 1,2/ A.C. Eringen and E.S.Suhubi // *Intern. J. Eng. Sci.* – 1964. – V. 2. – P. 189–203; 389–404.
51. Erofeev V.I. Longitudinal strain waves in non–linearly elastic media with couple stresses/ V.I. Erofeev, A.I.Potapov // *Int. J. Nonl. Mech.* – 1993. – V. 28. – P. 483–488.
52. Erofeev V.I. Wave processes in Solids with microstructure/V.I. Erofeev // *World Scientific.* – Sigapore. – 2003.
53. Evans D. J. The tanh function method for solving some important nonLinear partial differential equation/D. J. Evans , K. R. Raslan // *Int. J. comput. Math.*–2005. – P. 82– 89.
54. Fan E. Extended tanh–function method and its applications to nonlinear equations/ E. Fan// *Phys. Lett. A.* – 2000.– P. 212–218.

55. Gao Y. T. Generalized hyperbolic–function method with computerized symbolic computation to construct the solitonic solutions to nonlinear equations of mathematical physics. / Y. T. Gao , B. Tian. //Comput. Phys. Commun.–2001.– №133.–C. 158–164.
56. Gardner C.S. Method for solving the Korteweg – de Vries equation / C.S.Gardner, J.M.Green, M.D.Kruskal, R.M. Miura //Phys. Rev. Lett.19. – 1967. – P.1095 – 1097.
- GEOMAR , Moscow, November 17–20. – Kiel. – Germany. – 1993.
57. Giinter W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuum / W. Giinter // Abn. Braunschweig. Wiss. Ges. – 1958. – V. 10. – P. 195 – 213.
58. Godano C. Nonlinear seismic waves: a model of site effects/ C.Godano, F.Oliveri // Intern. J. Nonl. Mech. – 1999. – V.34. – P. 457–468.
59. Green A.E. Constitutive Equation for Interacting Continua/ A.E.Green, T.R. Steel // Int. J. Engng. Sci. – 1966. – V. 4. – N 4. – P. 483 – 500.
60. Green A.E. Simple force and stress multipoles / A.E.Green, R.S. Rivlin // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1964. – V. 16. – N 5. – P. 325 – 353.
61. Grekova E. Nonlinear constitutive equations of polar media consisting of rotating particles/ E. Grekova // Proc of the 24 Summer School “Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems”. St. Peterburg. IMEP RAS. – 1997. – P. 249 – 255.
62. Gruttmann F., Stein E., Wriggers P. Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations/F.Gruttmann, E.Stein, P. Wriggers // Ing. – Arch. – 1989. – V. 59. – P. 54 – 67.
63. Hammack J.L. The Korteweg – de Vries equation and water waves. Part 2, Comparison with experiments / J.L.Hammack, H.Segur //Journ. of Fluid Mechanics. – 1974. – V. 65. – №2. –P.289–314.
64. Hegemier G.A. A Continuum mixture theory of wave Propagation in laminated

- and fiber reinforced composites/ G.A.Hegemier, G.A.Gurtman, A.H. Nayfeh // Int. J. Solids and Struct. – 1973. – V.9. – N 4. – P. 395 – 414.
65. Hegemier G.A. On a Theory of interacting continua for wave propagation in Continuum Mixture Theory of Wave Propagation in Laminated and Fiber Reinforced Composites/ G.A. Hegemier, G.A. Gurtman, A.H.Nayfeh // Int. J. Solids and Struct.– 1973.–V.9.–N4.–P.395-414.
66. Hirota R.Exact solution of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons / R.Hirota // Phys. Rev. Lett. – 1972. – Vol. 27. – P. 1192–1194.
67. Holtorf T. G. Eine exakte theorie stationärer und fortschreitender wirbelfreier Schwerewellen / T. G. Holtorf// Die Wasserwirtschaft. – 1966. –№11.– P.349 – 356.
68. Huda O. Modified Adomain Decomposition Method for the Generalized Fifth Order KdV Equations /O. Huda, H.Bakoda //American Journal of Computational Mathematics– 2013. – № 3. – P. 53–58.
69. Iwasa Y. Analytical consideration on cnoidal and solitari waves/ Y.Iwasa // Memoirs Faculty of Engineering. Kyoto University. – 1955. – Vol.1 7. – №3. – P.264 – 276.
70. Iwasa Y. Undular jump and its limiting condition for existence /Y. Iwasa //Proc. 5lh Japan National Congress for Applied Mechanics, Tokyo. – 1955. – P.315 – 319.
71. Jae–Myouhg K. New exact solutons to the kdv–burgers–kuramoto equation whith the exp–function method/ Kim Jae–Myouhg , Chun Changbum // Abstract and Applied Analysis. – Volume 2012. – Article ID 892420.
72. Jahanmir M. Load transfer and surface wave propagation in fiber reinforced composite materials /M.Jahanmir, T.F. Hersten // Int. J. Solids and Struct. – 1978. – V. 14. – N 2. – P. 227 – 240.
73. Jameel F. Alzaidy Exact Traveling Wave Solutions of Nonlinear PDEs in Mathematical Physics/ Jameel F. Alzaidy// Applied Mathematics –2012. – № 3. –

P. 738–745.

74. Kadic A. A Yang–Mills type minimal coupling theory for materials with spatial defects/A.Kadic, D.G.B. Edelen // *Int. J. Eng. Sei.* – 1982. – V. 20. – № 4.
75. Karpman V. I. Radiation by solitons due to higher–order dispersion/ V. I.Karpman // *Phys.Rev. E.* – 1993. – V. 47. – P. 2073–2082.
76. Keller J.B. The solitary wave and periodic waves in shallow water / J.B. Keller // *Comm. Pure Appl. Math.*1. – 1948. – P.323 – 329.
77. Kendall D. G. Stochastic processes and population growth./ Kendall D. G.// *Journal of the Royal Statistical Society*–1949.– Ser. B, 11.–P. 230–264.
78. Keulegan G.H. Mathematical theory of Irrotational translation waves/ G.H.Keulegan, G.W. Patterson // *Journal of Research of the National Bureau of Standards.* –1940. – V.24. – P.47 –101.
79. Kim J.M. New exact solutons to the Kdv–Burgers–Kuramoto equation whith the exp–function method/ J.M. Kim , C. Chun// *Abstract and Applied Analysis.*– 2012.–Volume 2012.– Article ID 892420.
80. Ko K. Energy loss of a Korteweg– deVries solitary wave in a slowly varying medium/K.Ko,H.H. Kuehl // *Physics of Fluids.*– 1980. – V. 23. – №4. – P.834 – 836.
81. Kodama U. Perturbation of solitons and solitary waves/ U. Kodama, M.J. Ablowitz // *Stud. Appl. Math.* 64. – 1981. – №3. – P.225 – 245.
82. Koiter W.T. Couple–Stresses in the Theory of Elasticity/ W.T. Koiter // *Proc. Kon. Nederland. Akad. Wetensch.* – 1964. – B67. – P. 17 – 29; 30 – 44.
83. Korpel A. Heuristic guide to nonlinear dispersive wave equations and soliton–type solutions/A.Korpel, P.Bancrjee // *IEEE.* – 1984. – V. 72. –P. 1109–1130.
84. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long wares advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wares / D.J.Korteweg ,G. de Vries // *Philosophical Magasine and Journal of Science.* – 1895. – Vol.39. – ser.5. – P.422 – 443.

85. Kozak J. Seismic Events with Non-shear Component. / J. Kozak , J. Sileny //PAGEOPH.– 1985.– 123:1–P. 15.
86. Krishnan E.V. Higher-order KdV-type equations and their stability/E.V. Krishnan . Q.J. A. Khan // IJMMS– 2001. – 27:4. –P. 215–220.
87. Kuehl H. H. Energy loss of a modified Korteweg – de Vries solitary wave in a varying medium/ H.H.Kuehl, N.R. Pereira // Physics of Fluids. –1980. –V.23.– №7. – P. 1471 – 1472.
88. Kuramoto Y. On the formation of dissipative structures in reaction–diffusion systems / Y.Kuramoto, T. Tzusuki // Prog. Theor. Phys. – 1975. – Vol. 54. – № 3. – P. 687–699.
89. Le Roux. Étude géométrique de la torsion et de la flexion/ Le Roux. // Ann. Scient, de L'École Normale Sup. Paris. – 1911. – V. 28.
90. Lee J. Measurement of velocities in solitary waves /J. Lee, J.E.Skjelbreia, F. Raichlen // Journal Waterway Port Coastal and Ocean Division. Proc ASCE. – 1982. – V.108. – №2.–P.200–218.
91. Liao S.J. The proposed homotopy analysis technique for the solution of non-linear problems/S.J. Liao// Ph.D. Thesis. Shanghai Jiao Tong University. – 1992.
92. Lomnitz C. The Predictive Value of Seismic Gaps./ C.Lomnitz, F.A. Nava //Bulletin of the Seismological Society of America– 1983.–73: 1815–24.
93. Majid S. Wave Solution for a Time-Fraction Generalized Hirota-Satsuma Coupled KdV Equation by a New Analytical Technique/ S. Majid, D.D. Ganji Solitary// International Journal of differential equations– V.2010.– Article ID 954674
94. Mandelbrot B. B. Fractal geometry of nature / B. B.Mandelbrot. –W. H. Freeman&Co. – 2000.–667 c.
95. Maomao Cai The coupled Kuramoto Sivashinsky–KDV equations for surface wave in multilayered liquid films / Cai Maomao, Li Dening, and Rattanak Chontita // Mathematical Physics –Volume 2013. – Article ID 673546.

96. Maris H.J. Experiments with acoustic solitons in crystalline solids/ H.J.Maris //Phys.Rev. B. –2001. – V. 64. –064302.
97. Matveev V. B. Darboux transformations and solitons/V. B. Matveev, M. A. Matveev – Berlin: Heideelberg, Springer.–1991.
98. Maugin G.A. Material forces: concepts and applications/G.A.Maugin // Appl. Mech. Rev. – 1995. – V. 48. – P. 213–245.
99. Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity/ G.A.Maugin // Chapman & Hall. London. – 1993.
100. Maugin G.A. Nonlinear waves in elastic crystals/ G.A.Maugin – Oxford University Press. UK. – 1999.
101. Mayer A. Surface acoustic waves in nonlinear elastic media/ A.Mayer // Phys. Reports. – 1995. – V. 256. P. – 237–366.
102. McLeod J.B. The Froude number for solitary waves / J.B. McLeod // Proc. Roy. Soc. – Edinburgh.– 1984.– A 97. –P.193– 197.
103. Mc Niven H.D. Vibrations and wave propagation in rods/ H.D.Mc Niven, J.J.Mc Coy // R. Mindlin and Applied Mechanics/Ed. Herrmann G. Pergamon. – New York. – 1974.
104. Mindlin R.D. Influence of couple–stress on stress concentrations/ R.D. Mindlin // Exp. Mech. – 1963. – V. 3. – P. 1 – 7.
105. Mindlin R.D. Microstructure in linear elasticity /R.D. Mindlin // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1964. – V. 16. – P. 51 – 78.
106. Miura M. R. Backlund transformation/ M. R.Miura // Berlin: Springer–Verlag.– 1978.
107. Murnaghan F.D. Finite deformations of an elastic solid/ F.D.Murnaghan // J. Wiley. –NewYork. – 1951.
108. Newell A.C. Finite–bandwidth, finite–amplitude convection/ A.C.Newell, J.A. Whitehead // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 38. – № 2. – P. 279–303.

109. Newell A.C. The history of the soliton / A.C. Newell //Trans. ASME. Journ. Appl. Mech.50. – 1983. – №46.–P. 1127– 1138.
110. Newell A . Unified approach to painleve expansions/ A. Newell, M.Tabor, , Y.B.Zeng // Physica D. – 1987. – V. 29. – P. 1–68.
111. Nonlinear Waves in Solids/ Eds. Jeffrey A., Engelbrecht J. eds. Springer–Verlag. – Wien. – 1994.
112. Nowacki W. Couple–stresses in the theory of thermoelasticity/ W. Nowacki // Bull. Acad. Polon. Sci., ser. Sc. Techn. – 1966. – V. 14. – P. 505 – 512.
113. Nowacki W.Theory of asymmetric elasticity/W.Nowacki // Pergamon. Oxford. – 1986.
114. OgataY. Statistical Models for Earthquake Occurrences. /Y. Ogata//Journal of the American Statistical Association– 1998– 83: 401.
115. Painleve Transcendents: Their asymptotics and physical applications./Eds. Levi D. and P. Winternitz. –Plenum Press, New York and London. – 1992.
116. Parker D.F. Dissipation of surface acoustic waves/D.F. Parker and A.Mayer // Nonlinear Waves and Dissipative Effects /Eds. Fusco D. and Jeffrey A.– Longman, London. – 1991. – P. 42–51.
117. Parker D.F. Nonlinear surface acoustic waves and waves on stratified Media/D.F.Parker // Nonlinear Waves in Solids/ Eds. Jeffrey A., Engelbrecht J., Springer. – Berlin. – 1994. P. – 289–348.
118. Parkes E.J. An automated tanh–function method for finding solitary wave solutions to nonlinear evolution equations/E.J. Parkes and B.R.Duffy // Computer Phys. Comm. – 1996. – V. 98. – P. 288–300.
119. Ping Zhang New exact solutions to the generalized Zakharov equations and the complex coupled KdV equations / Ping Zhang //Studies in Mathematical Sciences. – 2011. –Vol. 2. – No. 1. – pp. 63–72.
120. Porubov A. V. On the role of cubic nonlinearity in localization of nonlinear

- strain waves/A. V.Porubov, G.A.Maugin //Proceedings of the 17 International Symposium on Nonlinear Acoustics. Pennsylvania. – 18–22 July 2005 (AIP Conference Proc. V. 838, Melville, New York, 2006). – P. 151 – 156.
121. Poschel T. A simple geometrical model for solid friction/T. Poschel, H.J.Herrmann // Physica A. – 1993. – V. 198. – P. 441–448.
122. Prykarpatsky A., Mykytiuk I. Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects./ A.Prykarpatsky, I.Mykytiuk. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. – 588 p.
123. Puzanov A. Velocity and pressure distribution in plane positive surges/A.Puzanov, V. Elias// XI Congress LAHR. V.III. – 1965. – №3.46. – Leningrad. – 9p.
124. Rayleigh Lord. On waves // Phil. Mag. (5).1.–1876. – P.257 – 279.
125. Recent Developments in Surface Acoustic waves/ Eds. Parker D.F., Maugin G.A.– Springer, Berlin– 1987.
126. Reissner E. On kinematics and statics in finite–strain force and moment stress elasticity /E. Reissner // Stud. Appl. Math. – 1973. – V. 52. – N 2. – P. 97 – 101.
127. Russel J.S. Report on waves/ J.S. Russel // Report British Association for the Advancement of Science. – London. –1844. – P.311 – 390.
128. Sachdev P.L. Nonlinear diffusive waves/ P.L.Sachdev //Cambridge Univ. Press. – Cambridge. – 1987.
129. Sager G. Reflexionen in ausbreitungsrichtung cnoidaler wellen /G. Sager //Beitr. Meeresk. – 1978. – №11. – P.5 –14.
130. Saksguchi T. Liquid velocity measurement of solitary wave by LDV /T.Saksguchi, M. Ozawa, R. Takahashi, Y. Shiomi //Mem. Fac. Eng. Kobe Univ. – 1986. – №33. – P.33 – 62.
131. Salas A.H. Exact Solutions for a Third–Order KdV Equation with Variable Coefficients and Forcing Term/ A. H. Salas, C. A. Gomez // Mathematical Problems in Engineering.–2009.–Volume 2009.–Article ID 737928.

132. Samsonov A.M. Theory and observation of strain solitons in solids/ A.M.Samsonov, G.V.Dreiden, A.V.Porubov, I.V. Semenova and E. V.Sokurinskaya// Ioffe Institute Prize Winners'96. – St.Petersburg. – 1997. – P. 5–14.
133. Samsonov A.M.Strain soltons in solids and how to construct them/ A.M.Samsonov // Chapman & Hall/CRC. – 2001.
134. Sandover J.A. Choidal waves and bores / J.A.Sandover, C. Taylor //La Houille Blanche. – 1962. – №3. – P.443 – 456.
135. Schwartz L.W. Strongly nonlinear waves / L.W.Schwartz, J.D. Fenton // Ann. Rev. Fluid. Mech. –1982. – V.14. – P.39 – 60.
136. Sent F. Contribution a l'étude des éconlements permanents et variables dans Jes canaux/ F. Sent // La Houille Blanche. – 1953. – №3. – P.374 – 388; №6. – P.830 – 872.
137. Serre F. Contribution a l'étude des ondes longues irrotationnelles/ F. Serre // La Houille Blanche. – 1956. – №3. – P.375 – 390.
138. Shateri M. Solitary wave solution for a time–fraction generelized Hirota–Satsuma coupled KdV equation by a new analitical technique/ M. Shateri, D.D. Ganji //International Journal of differential equations. – V.2010. – Article ID 954674.
139. Steel T.R. Applications of a theory of interacting continua // Quart. J. Mech. Appl. Math.– 1967. –V. 20, N 1. –P. 57 – 72.
140. Steel T.R. Determination of the constitutive coefficients for a mixture of two solids/ T.R. Steel // Int. J. Solids Struct. – 1968. – V. 4. – N 12. – P. 1149 – 1160.
141. Steel T.R. Linearised Theory of Plane Strain of Mixture of Two Solids / T.R. Steel // Int. J. Engng. Sci. – 1967. –V. 5. – N 10. – P. 775 – 790.
142. Stern M. Wave Propagation in Elastic Laminates using a Multicontinuum Theory/ M.Stern, A. Bedford // Acta Mech. – 1972. – V. 15. – N 1. –P. 21 – 38.
143. Stewartson K. Nonlinear instability of plane Poiseuille flow/ K. Stewartson,

J.T. Stuart // *J. Fluid Mech.* – 1971. – Vol. 48. – № 3. – P. 529–545.

144. Tagg R. Convective versus absolute instability in flow between counterrotating cylinders / R.Tagg, W.S.Edwards, H.L. Swinney // *Phys. Rev. A.* – 1990. – Vol. 42. – № 2. – P. 831–839.

145. Tiersten T.R. Theory of Composites Modeled as Interpenetrating Solids Continua / T.R.Tiersten, M. A.Jahanmir // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1977. – V. 54. – N 2. – P. 153 – 163.

146. Toupin R.A. Elastic Materials with Couple–Stress / R.A. Toupin // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1962. – V. 11. –N 5. – P. 385 – 399.

147. Toupin R.A. Theories of Elasticity with Couple–Stress / R.A. Toupin // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1964. – V. 17. – N 2. – P. 85 – 112.

148. A. Bomba Method for studying the multi-solitone solutions of the Korteweg de-Vries type equations / A. Bomba, Y. Turbal, M. Turbal // *Journal of difference equation.*–2015.–v.2-p.1-10.

149. Turbal Yuriy The trajectories of self–reinforcing solitary wave in the gas disc of galaxies/YuriyTurbal // *Proceedings of the 3–rd International Conference on Nonlinear Dynamic.*–Kharkov.–2010. –P.112–118.

150. Turbal Yuriy Method of Earthquake Prediction Based on the Soliton Mechanisms of Some Shocks / Y.Turbal, M. Turbal, A. Bomba, O. Radoveniuk // *Journal of Environmental Science and Engineering.*-2014.- № 3 .-p 151-155.

151. Turbal Yuriy T-transformation method for studying the multi-solitone solutions of the Korteweg-de Vries type equations / Y.Turbal, M. Turbal, A. Bomba, A. Sokh // *Journal of Mathematics and System Science.*-2015.- № 4 .-p 164-169.

152. Utsu T. Representation and analysis of the earthquake size distribution: a historical review and some new approaches/T. Utsu // *Pure Appl. Geophys.* – 1999.– 155: 509–35.

153. Vere–Jones D. Some models and procedures for space–time point processes./ D. Vere–Jones//Environ. Ecol. Stat. – 2008.–P.1007–1086.
154. Vere–Jones D. Statistical Seismology./ D.Vere–Jones, Y. Ben–Zion and R. Ziga//Pure Appl. Geophys. – 2005.–162: 1023–6.
155. Vikulin A. V. A model of inertial earthquake’s source. /A.V. Vikulin, A. G. Ivanchin //In L. P. Zonenshain memorial conference on plate tectonics: GEOMAR.– Moscow, November 17-20.–1993.
156. Weiss J. The Painleve property for partial differential equations/ J.Weiss , M.Tabor and Cam tv ale G.// J. Math. Phys. –1983. – V. 24. – P. 522.
157. Wiegel R.L. A presentation of cnoidal wave theory for practical application /R.L. Wiegel //Journal of Fluid Mechanics. – 1960. – Vol. 7. – part 2. – Feb. – P.273 – 286.
158. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states /N.J.Zabusky, M.D. Kruskal // Phys. Rev. Lett. 15. – 1965. – P.240 – 243.
159. Zwillenger D. Handbook of Differential Equations/ D.Zwillenger // Acad. Press.Boston.– 1989.
160. Абдуллаев Ф.Х.Оптические солитоны/ Ф.Х.Абдуллаев, С.А. Дармадян, П.К. Хабибуллаев.– Ташкент: Фан. – 1987.–238 с.
161. Абловиц М. Солитоны и метод обратной задачи / М.Абловиц ,Х. Сегюр.– М: Мир. – 479 с.
162. Агеев А.Н. Оценка эффективности магнитозвукового разогрева металла в режиме бесконтактного индукционного возбуждения /А.Н.Агеев, М.И.Киселев, Н.Н. Рыкалин// Физика и химия обработки материалов. – 1970. – № 6. – С. 2 – 10.
163. Аннин Б.Д. Анизотропия упругих свойств материалов/ Б.Д.Аннин, Н.И.Остросаблин // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – т.49. –

№6. – С.131–151.

164. Антонова Р. А. О дрейфовых солитонах в мелкой вращающейся жидкости /Р.А.Антонова, В.И. Петвиашвили // Письма в ЖЭТФ. –1998.–Т. 37. № 11. С. 545–548.

165. Ахмедиев Н.Н. Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки / Н. Н. Ахмедиев, А.Анкиевич. –М.: Физматлит. – 2003. – 304с.

166. Аэро Э.Л. Нелинейная теория локализованных волн в сложных кристаллических решетках/ Э.Л. Аэро, А.Н.Булыгин// Вычислительная механика сплошных сред.– 2008.– №1.– С. 14–30.

167. Аэро Э.Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела / Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский // ФТТ. – 1964. – Т. 6. – № 9. – С. 2689 – 2699.

168. Аэро Э.Л. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский // ФТТ. – 1960. – Т. 2. – С. 1399 – 1409.

169. Аэро Э.Л. Существенно нелинейная микромеханика среды с изменяемой периодической структурой /Аэро Э. Л.// Успехи механики. – 2002. –Т. 1. –№ 3. – С. 130–176.

170. Бабич С.В.,Турбал Ю.В. Алгоритм формування матриці розкладів в задачах календарного планування.// Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: матеріали Всеукраїнської наукової конференції, м.Рівне – 2015р.–с.6.

171. Баранов В.Б. Гидродинамическая теория космической плазмы / В.Б. Баранов, К.В. Краснобаев.– М.: Наука. – 1977.–243 с.

172. Барут А.Теория представлений групп и ее приложения / А.Барут, Р.Рончка.–Москва: Мир. – 1980.–452 с.

173. Бахвалов Н.С. Нелинейная теория звуковых пучков / Н.С. Бахвалов, Я.М. Жилейкин, Е.А. Заболотская. – М.: Наука. – 1982.–187 с.
174. Бахметев Б.А. Гидравлика открытых русел /Б.А. Бахметев.– М.: Гострансиздат. –1934. –248с.
175. Березин Ю.А. Моделирование нелинейных волновых процессов / Ю.А. Березин. – Новосибирск: Наука. – 1982. – 160с.
176. Бирюков С.Б. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах /С.Б. Бирюков, В.В. Гуляев, В.В. Крылов, В.П.Плесский. – М: Наука. – 1991.– 321 с.
177. Бомба А.Я. Дослідження нелінійних ефектів взаємодії відокремлених хвиль деформації з областями змінної густини в анізотропному пружному тілі / А.Я.Бомба, Ю.В. Турбал //Фізико–математичне моделювання та інформаційні технології.–2013. –Вип.18.– С.86–91.
178. Бомба А.Я. Математичне та комп'ютерне моделювання сейсмічних процесів на основі солітонного підходу/ А.Я. Бомба, Ю.В. Турбал, О.В. Радовенюк, М.Ю. Турбал //Технологічний аудит та резерви виробництва.–2015.– №2/5(22)–с.26-30
179. Бомба А.Я. Модифікація Т-представлень для знаходження бризерних розв'язків рівнянь типу Кортевега-де Вріза./ А.Я. Бомба, О.А. Рябенко, Ю.В. Турбал //Вісник НУВГП.-№2-2014-с.99-106.
180. Бомба А.Я. Методы анализа данных и прогнозирование траекторий уединенных волн / А.Я. Бомба, Ю.В. Турбал //Проблемы управления и информатики. – 2015. – №5.–С.34-43.
181. Бомба А.Я. Прогнозирование траекторий уединенных волн деформации в анизотропных упругих телах. / А.Я. Бомба, Ю.В. Турбал // Проблемы управления и информатики.-2014.-№3.-с.12-22.

182. Бомба А.Я. Метод дослідження багатосолітонних розв'язків рівнянь типу Кортевега-де Вріза на основі Т-представлень/А.Я. Бомба, Ю.В. Турбал// Вісник ТНТУ. - №1. -2015 - ст.112-119 .
183. Борн М. Динамическая теория кристаллических решеток / М. Борн, Хуан Кунь.– М.: ИЛ. – 1958. – 488 с.
184. Боровков А.А. Теория вероятностей / А.А.Боровков.– М.: Едиторал УРСС. – 2003.–425 с.
185. Букатов А. Е. Динамика поверхностных и внутренних волн /А. Е.Букатов, В.И. Власенко,Л. Л.Пухтяр и др. – К.: Наукова думка. –1988.– 192 с.
- 186.Бхаттгар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах / П.Бхаттгар. – М.: Мир. – 1983. – 136 с.
187. Быков В.Г. Нелинейные волновые процессы в геологических средах / В.Г.Быков.– Владивосток: Дальнаука. – 2000. – 190 с.
188. Вerezemskiy В.Г. Об уравнениях быстро изменяющегося течения в открытом русле / В. Г. Вerezemskiy // Труды Гидропроекта. – сб. 15.– М.: Энергия. – 1968. – С. 30 – 37.
- 189.Вerezemskiy В.Г. О гидравлическом прыжке / В.Г. Вerezemskiy// Труды
190. Вerezemskiy В.Г. О прыжке и сужении бурного потока /В.Г. Вerezemskiy // Автореф. дис. канд.техн.наук . – МГМИ. – М. – 1967. – 14 с.
- 191.Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и загрузками / А.И.Весницкий.– М.: Физматлит. – 2001. – 208 с.
192. Викторов И. А. Типы звуковых волн в твердых телах / И. А.Викторов // Акустич. ж. – 1979. – Т. 25. – Вып.1. – С. 1–17.
193. Викулин А. В. Ротационная модель очага тектонического землетрясения / А. В. Викулин, А. Г. Иванчин // Вулканология и сейсмология. – 1995. – №6.– с.22-28.

194. Викулин А.В. Модель сейсмического процесса / А.В. Викулин, А.Г.Иванчин // Вычислительные технологии. –1997. – Т. 2. – № 2.–с.34-42.
195. Воронцов А.В. Внегалактическая астрономия / А.В.Воронцов, В.Г. Вельяминов.–Москва: Мир. – 1988.–554 с.
196. Гентош О. Диференціально–геометричні та Лі–алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах. / О. Гентош, М. Притула, А. Прикарпатський. – Львів. Вид–во Львів, ун–ту, 2006. – 408 с.
197. Годунов С.К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В.С.Рябенский.– М.: Наука. – 1973.–357 с.
198. Голод П. Математичні основи теорії симетрій/ П.Голод , А. І. Клімик– Київ: Наук, думка, 1992. – 368 с.
199. Горшков К.А.Теория возмущений в динамике солитонов:: дис. ... доктора физ.– наук :05.23.16 / Константин Антонович Горшков. – Н. – 2003. – 251 с.
200. Грекова Е. Ф. Уравнения нелинейных упругих полярных сред и аналогии: среда Кельвина, неклассические оболочки и непроводящие ферромагнетики / Е. Ф. Грекова, П.А.Жилин // Изв. Вузов. Северо–Кавказский регион. Ест.науки. – 2000. – С. 25–47.
201. Губанков В.Н. Солитоны / В.Н. Губанков. – М.: Знание. –1983. – 64 с.
202. Гуревич А. В. Нелинейные волны с дисперсией и нелокальным затуханием / А. В. Гуревич, Л.П. Пятаевский // ЖЭТФ. – 1991. – Т. 99. – № 5. – С. 1470–1478.
203. Данилов В.Я Розробка інформаційної технології ідентифікації динамічного хаосу та псевдофазової реконструкції атракторів одновимірних реалізацій / В.Я. Данилов, А.Ю. Зінченко, П.П. Марчук // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2011. – № 2. – С. 59–68.

204. Данилов В.Я Синергетичні методи аналізу [Текст] : навч. посіб. / В. Я. Данилов, А. Ю. Зінченко ; Нац. техн. ун-т України "Київ. політехн. ін-т". - К. : НТУУ "КПІ", 2011. - 338 с.
205. Додд Г. Солитоны и нелинейные волновые уравнения /Г. Додд, Дж.Эйлбек, Дж. Гиббон, Х.Морис. –М.: Мир. – 1988. – 694с.
206. Доценко С. И. Про достатні умови стрибка траєкторії моделі радіоактивного забруднення / С.И. Доценко, Ю.В. Турбал//Волинський математичний вісник. –1998. – №5.–С. 48–55.
207. Драгунов Т.Н. Ангармонические взаимодействия упругих и ориентационных волн в одномерных кристаллах / Т. Н. Драгунов, И. С.Павлов, А.И.Потапов // ФТТ. 1997. Т. 39. Вып.1, 137–144.
208. Дрейден Г.В. Об экспериментах по распространению солитонов деформации в нелинейно–упругом стержне / Г. В. Дрейден, А. В. Порубов, А. М. Самсонов, И. В. Семенова, Е.В. Сокуринская// Письма в ЖТФ. – 1995. – Т. 21. –С. 42–46.
209. Дрейден Г.В. Формирование и распространение солитонов деформации в нелинейно–упругом твердом теле /Г.В. Дрейден , Ю.И.Островский, А.М. Самсонов, И. В. Семенова, Е.В.Сокуринская// ЖТФ. – 1988. – Т. 58. –№ 9. С. 2040– 2047 .
210. Дульнев В.Б. Гидравлический прыжок–волна / В.Б. Дульнев // Изв. ВНИИГ. – 1961. – Т. 67. – С. 153–161.
211. Дымникова И.Г. Движение частиц и фотонов в гравитационном поле вращающегося тела / И.Г.Дымникова //Успехи физических наук.–март 1986.–Т. 148. –№ 3. –С. 393-432.
212. Егоркина Г.В. Природа анизотропии скоростей распространения упругих свойств в условиях Армении / Г.В.Егоркина //Прикладная геофизика.– 1975.–№ 78.– С. 106–119.

213. Екимов Р.В. Построение слабого асимптотического решения типа бесконечно-узких δ -солитонов для уравнений типа мелкой воды/ Р.В. Екимов // Материалы школы-семинара. – Судак. – 2001.–с. 132
214. Елизарова Т.Г., Истомина М.А. Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе координат // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. –2014.– № 65.– 24 с.
215. Ерофеев В. И. Солитоны и нелинейные периодические волны в стержнях, пластинах и оболочках / В. И. Ерофеев, Н.В.Клюева // Акустич. ж. – 2002. – Т. 48. – С. 725–740.
216. Ерофеев В. И. Волны в стержнях. Дисперсия Диссипация. Нелинейность / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаяев, Н. П. Семерикова. –М.: Физматлит. – 2002. – 208 с.
217. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой /В.И.Ерофеев. –М: Изд-во. – Моск. ун-та. – 1999. – 328с.
218. Ерофеев В.И. Упругие волны в твердых смесях /В.И. Ерофеев, Н.В. Клюева, С.Ф.Шешенин. – Нижний Новгород: Интелсервис. – 2002. –86с.
219. Заболотская Е.А. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков / Е.А. Заболотская, Р.В. Хохлов // Акустический журнал. – 1969. – Т. 15. – № 1. – С.106–109.
220. Заиров Х.И. О волнах, возникающих в подводном канале при внезапной остановке насосной станции / Х.И. Заиров, Ю. Этмурадов// Сб. науч. трудов САНИИРИ. – вып 140. – Ташкент. – 1974. – С. 96 – 99.
221. Зарембо Л.К. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах / Л.К. Зарембо., В.А.Красильников // УФН. – 1970. – Т. 102. – С. 549–586.
222. Заславский Г.М. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса / Г.М. Заславски., Р.З.Сагдеев. М.: Наука. – 1988.–237 с.

223. Захаров В.Н. Теория солитонов: Метод обратной задачи / В.Н.Захаров,С. В. Манаков, С. Новиков, Л. Л. Питяевекий, – М.: Наука. – 1980. – 320с.
224. Захаров В.Е.Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния / В.Е. Захаров, А.Б.Шабат //Ч. I Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 6. – № 3. – С. 43–53.
225. Иванов Б.А. Солитоны в слабых ферромагнетиках / Б.А. Иванов,Г.К. Оксюк, А. Л. Сукстаиский, А.А. Жмудский.– К.: АН УССР. –1987. – 31с.
226. Иванчин А. Г. Ротационная модель сейсмического процесса в пределах окраины Тихого океана. В “Закономерности строения и эволюции геосфер” / А. Г. Иванчин, А. В. Викулин Хабаровск. – 1994. – С. 49–50.
227. Ильюшин А.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел / А.А. Ильюшин, В.А. Ломакин// Прочность и пластичность. – М.: Наука. – 1971. – С. 54 – 61.
228. Ильюшин А.А. Основы математической теории термовязкоупругости /А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. М.: Наука. – 1970.–262 с.
229. Ильюшина Е.А. Вариант моментной теории упругости для одномерной сплошной среды неоднородной периодической структуры / /Е.А. Ильюшина / ПММ. – 1972. – Т. 36. – № 6. – С. 1087 – 1093.
230. Индин Н.М. Анизотропные сплошные среды, энергия в которых зависит от градиентов тензора деформаций и других тензорных величин / Н.М. Индин// ПММ. – 1966. – Т 30. – № 3. – С. 531–541.
231. Кадич А. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций / А. Кадич, Д.Эделен.М.: Мир. – 1987.–335 с.
232. Кадомцев Б.Б.Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах / Б. Б. Кадомцев, В.И. Петвиашвили // ДАН. Сер. Математика. Физика. – 1970. – Т. 192. – С. 753–756.

233. Кажаяев В.В. Расщепление частицеподобных волн при встречных столкновениях / В.В. Кажаяев., А.И.Потапов, Н.П. Семерикова // Изв. вузов. Радиофизика. – 1995. – Т. 38. – № 1–2. –С. 100 – 105.
234. Каложеро Ф. Спектральные преобразования и солитоны / Ф. Каложеро А.Дегасперис.–М.:Мир. – 1985. – 470 с.
235. Кашеев В.Н. Эвристический метод получения решений нелинейных уравнений солитоники / В. Н.Кашеев. – Рига: Зинантне. – 1990.–56 с.
236. Кернер Б.С. Осипов В.В. Автосолитоны: Локализованные волны в слабодиспергирующих средах // ДАН. Сер. Математика. Физика. 1970. Т. 192. С. 753–756
237. Киселев М.И. Математическая модель сквозного прогрева заготовок магнитоакустическим способом/ М.И. Киселев, С.Ю. Рыжков, С.В. Соболев// Изв. вузов. Машиностроение. – 1987. – № 12. –С. 118 – 121.
238. Ковалев А. С. Многомерные и поверхностные солитоны в нелинейной упругой среде /А. С.Ковалев, Е. С.Сыркин, Ж. А. Можен // Физика низких температур. – 2002. – т. 28. – №6.– С. 635–647.
239. Ковалев А.С. Солитоны в упругих пластинах / А.С.Ковалев, А.П.Майер, Е.С.Соколова, К.Экль// Физика низких температур. –2002. – Т. 28. С. 1092–1102.
240. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика / Сб. пер. – 1965. – № 3. – С. 89–112.
241. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах.–М.: ИЛ. – 1955. – 192 с.
242. Конюхов Б.А. Об эффектах третьего приближения при распространении упругих волн в изотропных твердых телах / Б.А. Конюхов, Г.М.Шалашов // ПМТФ. – 1974. –№ 4. – С. 125–132.
243. Корпел А. Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям / А.Корпел, П.П.Банерджи // ТИИЭР. – 1984. – Т. 72. – № 9. – С. 6–30.

244. Косевич А.М. Введение в нелинейную механику / А.М.Косевич, А. С.Ковалев. – Киев: Наукова Думка. – 1989.–321 с.
245. Косевич А.М. Особенности динамики одномерных дискретных систем с взаимодействием не только ближайших соседей и роль высшей дисперсии в солитонной динамике / А.М. Косевич, С.Е.Савотченко// Физика низких температур. – 1999. – Т. 25. –С. 737–747.
246. Косевич А.М. Физическая механика реальных кристаллов/ А.М.Косевич. – Киев: Наукова Думка. – 1981.–223 с.
247. Котельникова А.С. Взаємодія поверхневих поодиноких хвиль з підводними перешкодами / А.С. Котельникова, В.І. Нікішов, С.М. Срібнюк //Доповіді НАНУ.– №7.–2012. – С.54–59.
248. Котельникова А.С. Взаємодія поверхневих поодиноких хвиль з топографічними неоднорідностями / А.С. Котельникова: Автореф. дис.. канд. фіз.–мат. наук: 01.02.05. – К. – 2013. – 17 с.
249. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж.Коул.– М.:Мир.–276 с.
250. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.:Наука, 1963.–553 с.
251. Кувшинский Е.В. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет “внутреннего” вращения /Е.В.Кувшинский, Э.Л. Аэро // ФТТ. – 1963. – Т. 5. – № 9. – С. 2591 – 2598.
252. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н.А.Кудряшов.– М.: ИКИ. – 2004.–360 с.
253. Кудряшов Н.А. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде / Н. А.Кудряшов,М. Б.Сухарев// ПММ. – 2001. –Т. 65. – С. 884–894.
254. Кудряшов Н.А. Точные решения обобщенного эволюционного уравнения

- волновой динамики / Н.А.Кудряшов// ПММ. – 1988. – Т. 52. – С. 465–470.
255. Кузнецов А.П. Нелинейные колебания / А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, Н.М. Рыскин. – М.: Физматлит. – 2002. – (1–е изд.). – 2005. – (2–е изд.).–315с.
256. Кузнецов В.П. Уравнения нелинейной акустики /В.П.Кузнецов // Акустический журнал. – 1970. – Т. 16. – № 4. – С. 548–553.
257. Кузнецов Е.А. Нелинейная теория возбуждения волн ветром за счет неустойчивости Кельвина–Гельмгольца/ Е.А.Кузнецов, П.М.Лушников // ЖЭТФ. – 1995. – Т. 108. – № 2. – С. 614–630.
258. Кузнецов С. К.К расчету нижнего бьефа / С. К.Кузнецов, Г.Г.Герасимов // Доклады (тезисы) 29 НТК НИМИ. – Новочеркасск. – 1968. – С. 115 –117.
259. Кузнецов С.П. Нестационарные нелинейные явления в системе электронный поток в скрещенных полях — обратная электромагнитная волна / С.П.Кузнецов, Д.И.Трубецков // Изв. вузов. Радиофизика. – 1977. – Т. 20. – № 2. – С. 300–312.
260. Куликовский А.Г. Нелинейные волны в упругих средах / А.Г.Куликовский, Е.И.Свешникова.– М.: Московский Лицей. – 1998.
261. Лаврентьев М.О. До теорії довгих хвиль / М.О. Лаврентьев // 36. праць Інституту математики АН УРСР. – 1947. – №8. – С. 13 – 69.
262. Ламб Г. Гидродинамика / Г.Ламб. – М. – Л.: Гостехиздат. –1947. – 928 с.
263. Ле Меоте Б. Введение в гидродинамику и теорию воли на воде /Б.Ле Меоте. – Л.: Гидрометеоиздат. – 1974. – 368 с.
264. Левин В.М. Осреднение по объему и континуальная теория упругих сред с микроструктурой / В.М.Левин, В.Н. Николаевский // Современные проблемы механики и авиации. – М.: Машиностроение. – 1982. – С. 182 – 193.
265. Лисит С.А. Нелинейная гранулированная среда с вращением частиц. Одномерная модель / С.А.Лисит, А.И.Потапов, В.Ф.Нестеренко // Акуст. ж. – 2001. – Т. 47. – Вып. 5. – С. 666–674.

266. Литгмен У. О существовании периодических волн при скорости близкой к критической / У.Литгмен // Сб. переводов «Теория поверхностных волн». – М.: ИИЛ. – 1959.–С. 185–217.
267. Лифшиц И.М. К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах /И.М.Лифшиц, Г.Д. Пархомовский // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20. – № 2. – С. 175 – 182.
268. Логвинович Г.В. Течения со свободными поверхностями / Г.В.Логвинович, В.Н.Буйвол, А.С. Дудко и др.. – К.: Наукова думка. – 1985. – 296 с.
269. Ломакин В.А. Вопросы деформирования микронеоднородных вязко–упругих тел и моментная теория вязко–упругости / В.А.Ломакин, Л.Н. Савова // Механ. Полимеров. – 1967. – № 2. – С. 213 – 220.
270. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А.Ломакин. – М.: Наука. – 1970.
271. Ломакин Е.В. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного материала / Е.В.Ломакин, Ю.Н.Работнок// Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 6. – С. 29 – 34.
272. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И.Лурье. М.: Наука. – 1980.– 512 с.
273. Лэм Дж. Введение в теорию солитонов / Дж.Лэм. – М.: Мир. – 1983. – 294 с.
274. Ляв А.Математическая теория упругости / А.Ляв.– М. –Л.: ОНТИ. – 1935.
275. Ляховский В.А. Разномодульность, анизотропия и отражающие границы / В.А.Ляховский, В.П. Мясников // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1986. – № 11. – С. 69 – 73.
276. Мак–Доуэлл Д. М. Гидравлика приливных устьев рек / Д.М.Мак–Доуэлл, Б.А. О'Коннор. –М.: Эвергоатомиздат. – 1983. – 312 с.

277. Милосердова И.В. Нелинейные стоячие волны в стержнях конечной длины / И.В.Милосердова, А.И.Потапов // Акустич. журнал. – 1983. – Т. 29. – С. 515–520.
278. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений / Р.Д. Миндлин // Механика / Сб. пер.. – 1964. – № 4. – С. 115 – 128.
279. Миндлин Р.Д. Микроструктура в линейной упругости / Р.Д.Миндлин //Механика. – 1964. – Вып.4. – С. 129–160.
280. Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально–геометрические аспекты / Под ред. О. С. Парасюка. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
281. Морозов А. Г. Физика дисков / А.Г. Морозов, А.В. Хоперсков– Волгоград: Изд–во ВолГУ, 2005. –423 с.
282. Моисеев Н.Н. Исследование жидкости при скоростях, близких к критической / Н.Н.Моисеев, А.М. Тер–Крикоров // Труды МФТИ. – 1959. –№ 3. – С. 25 – 59.
283. Моисеев Н.Н. Вводная статья к сборнику переводов «Теория поверхностных волн» / Н.Н.Моисеев. – М.: ИИЛ. – 1959. – С. 5 – 27.
284. Моисеев Н.Н. О неединственности возможных форм установившихся течений тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице // Прикладная математика и механика. 1957.- т. 21, No 6.- С. 860 - 864.
285. Наугольных К.А. Нелинейные волновые процессы в акустике / К. А. Наугольных, Л.А. Островский. – М.: Наука. – 1990.–237 с.
286. Нелинейные волны / Под ред. Лейбовича С. и Сибасса А. – М.: Мир. – 1977. – 320с.
287. Николаевский В.Н. Вязкоупругость с внутренними осцилляторами как

- возможная модель сейсмоактивной среды / В.Н.Николаевский // ДАН СССР. – 1985. – Т. 283. – Вып.6. – С. 1321–1324.
288. Николаевский В.Н. Математическое моделирование уединенных деформационных и сейсмических волн / В.Н.Николаевский // ДАН СССР. – 1995. – Т. 341. – Вып.3. С. 403– 405.
289. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред / В.Н. Николаевский.– М.: Недра. – 1984. – 232с.
290. Новацкий В. Теория упругости / В.Новацкий.– М.: Мир. – 1975. – 872 с.
291. Новиков А.А. О применении метода связанных волн к анализу нерезонансных взаимодействий / А.А. Новиков // Изв. вузов. Радиофизика. – 1976. – Т. 19. – № 2. – С. 321 – 323.
292. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и упругими деформациями в поликристаллах / В.В. Новожилов // Проблемы гидродинамики и механики сплошных сред. – М.: Наука. – 1969. – С. 365 – 376.
293. Нышанов Е. Волны перемещения в машинных каналах/ Е. Нышанов //Дис.канд. техн. наук: 05.14.19. – Алма – Ата. – 1988. – 134 с.
294. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл.– М.: Мир. – 1989.-324 с.
295. Островский Л. А. Введение в теорию модулированных волн / Л.А.Островский, А.И.Потапов.– М.: Физматлит. – 2003. – 400с.
296. Островский Л.А. Нелинейные упругие волны в стержне / Л.А. Островский, А.М.Сутин // ПММ. – 1977. – Т.41. –Вып. 3. С. 531–537.
297. Павленко А.С. Симметрии и решения уравнений двумерных движений политропного газа // Сиб. электр. матем. изв. –2005. –Т. 2. –С. 291—307.
298. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости / В.А. Пальмов // ПММ. – 1964. – С. 28. – № 3. – С. 401 – 408.

299. Парийская Е.Ю. Сравнительный анализ математических моделей и подходов к моделированию и анализу дискретно–непрерывных систем / Е.Ю. Парийская // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 1997. – №1. – 25с. – Режим доступа до журн. : <http://www.diff.Alpha.iier.csa.ru>
300. Патент 63026 Україна, МПК (2011.01) G01V 1/00. Спосіб прогнозування афтершоків [Текст]/Турбал Ю.В.; заявник та власник Турбал Юрій Васильович. – №u201102262; заявл. 25.02.2011 ; опубл 26.09.2011 бюл. № 18.-5 с.:іл
301. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика./Педлоски Дж.–М.:Мир, 1984– Т.1,2 –324 с.
302. Петвиашвили В.И. Уединенные волны в плазме и атмосфере / В.И. Петвиашвили, О.А.Похотелов. – М.: Энергоатомиздат. –1989. – 200 с.
303. Платцман Ф. Волны и взаимодействия в плазме твердого тела / Ф.Платцман, П. Вольф. – М.: Мир. – 1975. – 438с.
304. Поверхностные акустические волны. / Ред. А.А. Олинер. –М.: Мир. – 1981.
305. Порубов А.В. Генерация уединенных волн деформации в нелинейных твердых телах / А.В. Порубов // Дисс. докт. физ.–мат. Наук. – СПб.: Гос. Технический университет. – 2006.–313с.
306. Порубов А.В. Уточнение модели распространения продольных волн деформации в нелинейно–упругом стержне / А.В.Порубов, А.М.Самсонов // Письма в ЖТФ. – 1993. – Т. 19. – Вып. 12. –С. 26–29.
307. Постнов В.Э. Бифуркации регулярных аттракторов /В.Э.Постнов. – Саратов. Изд. ГосУНЦ Колледж. – 1996.
308. Потапов А.И. Квазиплоский пучок нелинейных продольных волн в пластине / А.И.Потапов, И.Н.Солдатов // Акустич. журнал. – 1984. – Т. 30. – Вып. 6. – С. 819–822.
309. Потапов А.И. Экспериментальное исследование волн деформации в

материалах с микроструктурой / А.И.Потапов, В.М.Родюшкин // Акустич. журнал. – 2001. – Т. 47. – С. 347–350.

310. Притула М. М., Прикарпатський А. К., Вовк М. І. Про повну інтегровність та лінеаризацію налінійного рівняння типу Бюргерса–Кортевега–де Фріза // Математичні методи і фізико–механічні поля–№4,51,2008

311. Продайвода Г.Т. Исследования упругих постоянных гранитоидов и анизотропии распространения объемных упругих волн в них / Г.Т.Продайвода, К.С.Александров, С.А. Выжва // Геофизический журнал.–2001.– №2. – т.23.– С.31–42.

312. Рабинович М.И. Введение в теорию колебаний и волн / М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков. – М.: Наука. – 1984.–432 с.

313. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р.Раджараман. – М.: Мир. – 1985. –416с.

314. Рахматулин Х. А. Волны в двухкомпонентных средах / Х.А.Рахматулин, Я.У.Сайтов, И.Г.Филиппов, Т.У.Артыков. – Ташкент: Фан. – 1974.–266 с.

315. Руссо Г.А. Основные характеристики гидравлического прыжка–волны / Г.А. Руссо // Гидротехническое строительство. –1967. – №1. – С. 31 – 33.

316. Рущицкий Я.Я. Анализ взаимодействия волн в двухфазных материалах в рамках микроструктурной теории смеси / Я.Я. Рущицкий // Нелинейная динамика твердых тел с микроструктурой. – Н. Новгород: Изд. Нф ИМАШ РАН. – 1995. – С. 21 – 22.

317. Рущицкий Я.Я. Взаимодействие волн сжатия и сдвига в композитном материале с нелинейно–упругими компонентами в микроструктуре / Я.Я. Рущицкий // Прикл. Механика. – 1993. – Т. 29. – № 4. – С. 23 – 30.

318. Рущицкий Я.Я. Взаимодействие упругих волн в двухфазном материале / Я.Я. Рущицкий // Прикл. Механика. – 1992. – Т. 28. – № 5. – С. 13 – 21.

319. Рущицкий Я.Я. Нелинейные волны в твердых смесях (Обзор) / Я.Я.Рущицкий // Прикл. Механика. – 1997. – Т. 33. – № 1. – С. 3 – 38.
320. Рущицкий Я.Я. Элементы теории смесей / Я.Я.Рущицкий. – Киев: Наук. Думка. – 1991.
321. Рыскин Н. М. Нелинейные волны / Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков. – М.:2010.–128 с.
322. Рябенко А. А. Теоретичні основи і методи розрахунків білякритичних течій рідини з вільною поверхнею : дис. ... доктора тех. наук : 05.23.16 / Олександр Антонович Рябенко. – Р. – 2003. – 376 с.
323. Рябенко О.А. [Текст] : автореф. дис. . д-ра техн. наук: / О.А. Рябенко ; Укр. держ. ун-т водного госп-ва та природокористування. – Рівне. – 2003. – 35 с. – Бібліогр.: с.29–32.
324. Савин Г.Н. Распространение упругих волн в твердом теле с микроструктурой / Г.Н. Савин, А.А. Лукашев, Е.М. Лыско // Прикладная Механика. – 1970. – Т. 6. – Вып. 7. – С. 48–52.
325. Савин Г.Н. Распространение упругих волн в континууме Коссера со стесненным вращением частиц / Г.Н.Савин,А.А. Лукашев, Е. М. Лыско, С. В. Веремеенко, Г.Г. Агасьев // Прикладная Механика. – 1970. – Т. 6. – Вып.6. – С. 37–41.
326. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А.А.Самарский, Е.С.Николаев. – М.: Наука. – 1978.–375 с.
327. Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А.Самарский, Ю.П.Попов. – М.: Едиториал УРСС. – 2004.–424с.
328. Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А. Алгебро–аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх обурень. – Київ: Ін–т математики НАН України, 2002. – 237 с.

329. Самойленко В.Г. Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега –де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В.Г.Самойленко, Ю.І. Самойленко // Укр. мат. журнал. –2008.– №1.–С.388–397.
330. Самсонов А.М. Возбуждение и наблюдение продольных волн деформации в пластине / А.М.Самсонов, Г.В.Дрейден,А.В. Порубов, И.В.Семенова // Письма в ЖТФ. – 1996. – Т. 22. –№ 11. – С. 61–68.
331. Свирижев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии / Ю.М.Свирижев. – М.: Наука. – 1987.–368 с.
332. Седов Л.И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы / Л.И. Седов // ПММ.– 1968. – Т. 32. – № 5. – С. 771 – 785.
333. Селезов И.Т. Волны в магнитоупругих средах / И.Т.Селезов, Л.В.Селезова. – К.: Наукова думка. –1975. – 164 с.
334. Смирнов Ю.П., Горбацевич Ф.Ф., Никитин А.Н., Тюремнов В.А. Характеристики текстуры, структуры, анизотропии пород по разрезу Кольской сверхглубокой скважины // Вестник МГТУ. –2007.– том 10, №2.– С.285–295
335. Смыслов В.В. Стоячие волны в спокойных потоках / Аннотации законченных в 1963г. НИР по гидротехнике / В.В.Смыслов. – М. – Л.: Энергия. – 1965. – С. 428 –431.
336. Смыслов В.В. Об остановившейся волне в бурном потоке жидкости / В.В. Смыслов // Изв. вузов. Энергетика. – 1964. – №3. – С. 104 –110.
337. Смыслов В.В. Исследование уединенной волны с помощью одномерной теории / В.В. Смыслов //Гидравлика и гидротехника. – К.: Техшка. –1970. – № 9. – С. 21 – 25.
338. Сокуринская Е.В. Некоторые точные решения задачи о нелинейных упругих волнах в пластине / Е.В.Сокуринская // Письма в ЖТФ. – 1994. – Т. 20. – Вып. 3. – С. 36– 41.

339. Солитоны в действии / Под ред. Лонгрена К. и Скотта Э. – М.: Мир, 1981. – 312 с.
340. Солитоны. / Под ред. Буллафа Р. и Кодри Ф. – М.: Мир. – 1983. – 408с.
341. Солодухина А.М. Сечения Пуанкаре фазового портрета нелинейного RLS контура, содержащего сигнетоэлектрик / А.М.Солодухина, А.С. Сидоркин, А.А. Шевченко //Физика твердого тела.–1993. – т.35. – №7.
342. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости /Л.Н.Сретенский. – М.: Наука. – 1977. – 816 с.
343. Старчак М.О.Повна інтегровність нелінійної гідродинамічної системи типу Кортевега—де Фріза./ М.О. Старчак, М.М. Притула //Доповіді НАН України,– №5.– 2011.–с/ 32–39.
344. Стокер Дж. Волны на воде / Дж. Стокер. – М.: Издательство. – 1959. – 617с.
345. Сунцов Н.Н. Методы аналогий в аэродинамике / Н.Н.Сунцов. – М.: Физматгиз. – 1958. – 324 с.
346. Тахтаджян Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов /Л.А.Тахтаджян, П.Д.Фаддеев. – М.: Наука – 1986. – 528 с.
347. Титов Л.Ф. Ветровые волны / Л.Ф.Титов. – Л.: Гидрометеиздат. – 1969. – 294с.
348. Триккер Р. Бор, прибой, волнение и корабельные волны / Р.Триккер. – Л.: Гидрометиздат. – 1969. – 286с.
349. Трубецков Д.И. Линейные колебания и волны / Д.И.Трубецков, А.Г.Рожнев. – М.: Физматлит. – 2001.–416 с.
350. Тупин Р.А. Теории упругости, учитывающие моментные напряжения / Р.А. Тупин // Механика / Сб. переводов. – 1965. – № 3. – С. 140.
351. Турбал Ю. Проекційний метод кодування інформації на основі позитивних напівтраєкторій Жюліа / Ю.Турбал // Zarzadzanie rozwojem ekonomicznym : матеріали міжнародної конференції , Краків, Польща.–К., 2008.– с.429-439 .

352. Турбал Ю.В. О необходимых и достаточных условиях существования решений уравнений движения для анизотропных упругих тел в виде уединенных волн типа δ -солитонов / Ю.В. Турбал // Проблемы прикладной математики и математического моделирования.–2012.–вып.–С.78–86
353. Турбал Ю.В. , Бомба А.Я. Метод знаходження солітонних розв'язків рівнянь руху// Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2013). Abstracts of XIX Int. Conference// Shidnitsa, Ukraine, May 23-27, 2013.
354. Турбал Ю.В. Some aspects of the scheduling algorithm.// Shabolcs-Szatmar-Bereg konferencia any aganak bemutatasa : матеріали міжнародної конференції. Nyiregehaza, Hungary,2002 p.–N.,2002.–С. 114-115
355. Turbal Y.V. Travelling wave solutions for the Kortevæg-de Vries type equations/ Y.V. Turbal, A.Y. Bomba // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2015): Abstracts of XIX Int. Conference, Shidnitsa, Ukraine, May 23-27– 2014.–p.124
356. Турбал Ю.В. Деякі властивості позитивних напівтраєкторій Жюліа / Ю.В. Турбал //Волинський математичний вісник. – 2006.– №4.– С. 87–96.
357. Турбал Ю.В. Дослідження анізотропії пружних властивостей матеріалів з точки зору існування відокремлених хвиль типу δ -солітонів / Ю.В.Турбал //Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб.наук.праць /ред..кол.:Дзюба (відп.ред.) та ін.– Д.: Вид-во ДНУ. – 2012.–Вип. 18. – С. 115–123.
358. Турбал Ю.В. Исследование нелинейных эффектов взаимодействия уединенных волн деформации с областями изменяющейся плотности для анизотропного твердого тела / Ю.В. Турбал // Физико–математическое моделирование и информационные технологии.– 2013. – № 18.– С.112–119.
359. Турбал Ю.В. Математична модель сейсмічного процесу, що враховує повільні відокремлені хвилі деформації / Ю.В. Турбал// Вісник Кременчуцького

національного університету імені Михайла Остроградського. – 2013. – №4(81). – С.88–93.

360. Турбал Ю.В. Математичне моделювання цунамі на основі Т-представлень / Ю.В. Турбал, А.Я. Бомба, Р.І. Волинський, М.Ю. Турбал, О.В. Радовенюк, Н.М. Сьох // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2015): Abstracts of XIX Int. Conference, Shidnitsa, Ukraine, May 23-27– 2015.–р.135.

361. Турбал Ю.В. Математичне моделювання процесу руху солітона в анізотропному пружному тілі змінної густини / Ю.В. Турбал //Математичне та комп'ютерне моделювання. –2013.– № 12.– С.55–62.

362. Турбал Ю.В. Метод знаходження солітонних розв'язків рівнянь руху/ Ю.В. Турбал, А.Я. Бомба // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2013): Abstracts of XIX Int. Conference, Shidnitsa, Ukraine, May 23-27– 2013.– р.124.

363. Турбал Ю.В. Метод прогнозування землетрусів на основі солітонних спускових механізмів.// Форми життя та питання їх співіснування,секція «Геотектоніка та геодинаміка» : матеріали VI-ї Міжнародної науково-практичної конференції ”, Великобританія, м.Лондон-м. Київ, 3-7 травня 2011 р.–К., 2011.– с.109-111

364. Турбал Ю.В. Один підхід до перевірки статистичних гіпотез про перетворення Лапласа випадкових величин / Ю.В. Турбал // Волинський математичний вісник. – 1997. – №4. – С. 161–165.

365. Турбал Ю.В. Оцінка інтенсивностей Пуассонівських потоків моделі радіоактивного забруднення / Ю.В. Турбал // Волинський математичний вісник. –1996. –№3. – С. 130–134.

366. Турбал Ю.В. Про достатні умови стрибка траєкторії моделі радіоактивного забруднення./ С.М. Доценко Ю.В. Турбал //Волинський математичний вісник.– 1998.–№5.– С. 48-55.

367. Турбал Ю.В. Про конфігураційний підхід до розв'язку деяких задач теорії розкладів.// Інформаційні системи: проблеми науки, практики, освіти: матеріали міжнародної конференції , ЄУФІМБ, м. Київ, Україна, 2001 р.–К.,2001.–с.135.
368. Турбал Ю.В. Операторний метод моделювання спіральних структур / Ю.В. Турбал // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико–математичні науки. – 2005. – № 4. – С. 237–242.
369. Турбал Ю.В. Про наближені та точні розв'язки характеристичної системи, що визначає необхідні та достатні умови існування солітонних розв'язків рівнянь руху для анізотропних пружних тіл / Ю.В. Турбал, М.Ю. Турбал //Волинський математичний вісник.–2013.–№1.–С.99–109.
370. Турбал Ю.В. Про необхідні та достатні умови сумісності деяких систем нелінійних рівнянь / Ю.В. Турбал // Волинський математичний вісник. – 1999. – №6. –С. 135–138.
371. Турбал Ю.В. Про самоорганізацію динамічних систем у векторних полях / Ю.В. Турбал // Вісник Київського університету. – Сер.: Фізико–математичні науки. – 2007. – № 1. – С. 171–179.
372. Турбал Ю.В. Про уточнення деяких оцінок параметрів функцій зносу моделі радіоактивного забруднення / Ю.В. Турбал//Волинський математичний вісник. –2000. – №7. –С. 147–153.
373. Турбал Ю.В. Про характер локальних екстремумів енергетичних функцій динамічних систем з випромінюванням// Dynamical system modelling and stability investigation : матеріали міжнародної конференції , Київ,Україна, 3-5 червня 2007 р. –К.,2007.–с.103
374. Турбал Ю.В. Про характер траєкторій малих збурень типу дельта-солітонів для рівнянь газової динаміки галактик/ Ю.В. Турбал, А.В. Клап //Волинський математичний вісник.– 2009.– №6(15).– С. 144-156.

375. Турбал Ю.В. Солітонна модель сейсмічного процесу.// Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2012).: abstracts of XIX Int. Conference- Mukachevo, Ukraine, April 23-27.–М., 2012.–Р.84.
376. Турбал Ю.В. Часткові розв'язки рівнянь газової динаміки галактик із збуренням типу δ –солітонів / Ю.В. Турбал // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико–математичні науки. – 2009. – № 1. – С. 67–754.
377. Турбал Ю.В. Математичне моделювання структури бетонів / Ю.В. Турбал, А.В. Дворкін, А.К. Шах // Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: матеріали Всеукраїнської наукової конференції, м.Рівне – 2015р.–с.99.
378. Турбал Ю.В., Турбал М.Ю. Солітонний метод прогнозування землетрусів в районі Японського архіпелагу.// Матеріали україно-японської конференції з питань науково-технічного співробітництва.-2013.-Одеса.-с.99-109.
379. Турбал Ю.В. Система прогнозування землетрусів, що враховує солітонні спускові механізми/ Ю.В. Турбал, М.Ю. Турбал //Матеріали конференції "Стратегічні рішення інформаційного розвитку економіки, суспільства та бізнесу".-Рівне, 2014-с.88-96 .
380. Турбал Ю.В. Граничні властивості орбіт дискретних динамічних систем, що визначаються класом квадратичних операторів/ Ю.В. Турбал, О.,В. Радовенюк, М.Ю. Турбал //Вісник ННІАКОТ.-Рівне, 2014-с. 112-118.
381. Турбал Ю.В. Солітонна модель сейсмічного процесу./ Ю.В. Турбал, М.Ю. Турбал, А.П. Сьох, О.В. Радовенюк //Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: матеріали Всеукраїнської наукової конференції, м.Рівне – 2015р.–с.99
382. Турбал Ю.В. Метод аналізу процесів поширення кругових солітоноподібних хвиль в рамках наближення мілкої води./ Ю.В. Турбал, А.Я. Бомба //Вісник НУВГП.–№2–2015.–с.99-106 .

383. Турбал Ю.В. Метод визначення максимальних висот локалізованих кругових хвиль в межах наближення мілкої води/ Ю.В.Турбал, А.Я. Бомба, М.Ю. Турбал, О.В.Радовенюк //Східноєвропейський журнал передових технологій.–№4/5.–2015.–С.13-16
384. Турбал Ю.В. Метод операторних перетворень моделювання точок перетину траєкторій відокремлених хвиль та областей зміни густини/ Ю.В.Турбал, А.Я. Бомба, М.Ю. Турбал// Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (АРАМCS-2015):матеріали міжнародної конференції, Львів,24-25 вересня, 2015р.–2015.–С.122-123
385. Турбал Ю.В. Метод моделювання локалізованих кругових хвиль в межах наближення мілкої води/ Ю.В.Турбал, А.Я. Бомба, М.Ю. Турбал, О.В.Радовенюк // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2015): Abstracts of XXI Int. Conference, Odesa, Ukraine, August, 23-28– 2015.–p.124.
386. A.Y. Bomba The markov moment problem and algorithms of the solitary waves trajectories identifications in continuous media/ A.Y. Bomba, Y.V. Turbal, //Mathematics for life scienses: Abstracts of III Int. Conference, Rivne, Ukraine, September 15-19.– 2015.–p.1.
387. Турсунов А.А. Околокритическое состояние безнапорных потоков воды / А.А. Турсунов // Изв. ВНИИГ. –1969. – Т. 90. – С. 201 – 224.
388. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж.Уизем. – М.: Мир. – 1977. – 622 с.
389. Филиппов А.Т. Многоликий солитон / А.Т.Филиппов. – М.: Наука. – 1986. – 223 с.
390. Филиппов И.Г. Динамическая теория относительного течения многокомпонентных сред /И.Г. Филиппов // Прикл. Механика. – 1971. – Т. 7. – № 10. – С. 92 – 99.
391. Филиппов И.Г. Неустановившиеся движения сплошных сжимаемых сред /

- И.Г.Филиппов, В.Г.Чебан. – Кишинев: Изд-во “Штиинца”. – 1973.
392. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / К.Флетчер. – М.: Мир. – 352с.
393. Фридман А.М. Предсказание и открытие новых структур в спиральных галактиках/ А.М.Фридман // Успехи физ. наук. – 2007. – Т. 117. – №2. – С. 121 – 148.
394. Фридрихе К.О. Существование уединенных волн. Сб. переводов «Теория поверхностных волн» / К.О.Фридрихе, Д.Г. Хайерс. – М.: ИИЛ. – 1959. – С. 145 –184.
395. Халилов Э.Н. Прогноз землетрясений: причины неудач и новая философия / Э.Н. Халилов //Transactions of the International Academy of Science N&E. Vol.3. 2007/2008. – SWB.Innsbruck. – 2008. – p.300–315.
396. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн / Л.В.Черкесов. – К.: Наукова думка. – 1980. – 260с.
397. Чесноков А. А. Симметрии уравнений теории мелкой воды на вращающейся плоскости // СибЖИМ. 2008. Т. 11, №3. С. 135–146.
398. Шварц А.И. О движении потока через водослив с широким порогом / А.И. Шварц // Изв. НИИГ. –1931. –Т. 1. – С. 109– 156.
399. Шкарлет Ю.М. О теоретических основах электромагнитных и электромагнитоакустических методов неразрушающего контроля / Ю.М. Шкарлет //Дефектоскопия. – 1974. – № 1. – С. 11 – 18.
400. Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные волны деформации / Ю.К.Энгельбрехт, У.К.Нигул. – М.: Наука. – 1981.–256 с.
401. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости / А.К.Эринген// Разрушение. М.: Мир. – 1975.– Т.2. – С. 646–751.
402. Эшмурадов Ю. Исследование процессов формирования положительных волн перемещения в каналах / Ю.Эшмурадов: Автореф. дис.. канд. техн. наук:

05.14.9. – Л. – 1975. – 21с.

403. Янке Е. Специальные функции /Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Леш. М.: Наука. – 1977.–344 с.

404. Колдунова А.А. Обзор методов и программных продуктов прогнозирования землетрясений / А. А. Колдунова, Т. Г. Емельяненко // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. - 2013. - Т. 17. - С. 59-70.

405. Вапник В.Н. Алгоритмы и программа: восстановления зависимостей/ В.Н. Вапник. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1984. - 816 с.

406 Чонг Као Динь Исследование и применение нейросетевых технологий в задаче прогнозирования землетрясений (на примере северо-западного района Вьетнама): автореф. дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук: 05.13.01 / Као Динь Чонг. - М., 2012

407 Мандрикова О.В. Автоматизированный способ обработки сигналов со сложной структурой / О. В. Мандрикова, Ю. А. Полозов // Информационные технологии. - 2008. - № 12. - С. 15-19.

408 Левина Е. А. ГИС для прогноза землетрясений и горных ударов: разработка и примеры применения в Байкальской рифтовой зоне и Норильском месторождении: автореф. дис. на соискание ученой степени канд. геол.-минерал. наук / Е.А Левина. - Иркутск, 2011.

409 Кендзера О. В. Сейсмічна небезпека і захист від землетрусів (практичне впровадження розробок Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України) / О. В. Кендзера // Вісник Національної академії наук України. - 2015. - № 2. - С. 44-57. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/j-pdf/vnanu_2015_2_10.pdf

ДОДАТКИ

Додаток А (довідки про впровадження, патенти)

А1 Довідки про впровадження

ЗАТВЕРДЖУЮ
Ректор Національного університету
водного господарства та
природокористування



проф. Шинський В.С.

“03” березня 2015 р.

АКТ № 8/15

**про впровадження результатів дисертаційної роботи
Турбала Юрія Васильовича «Математичне моделювання процесів поширення
локалізованих солітоноподібних збурень в суцільних середовищах»
у навчальний процес**

Члени комісії у складі директора інституту автоматичної, кібернетичної та обчислювальної техніки професора Тадеєва П.О., професора кафедри прикладної математики Тулашвілі Ю.Й. склали цей акт про те, що у Національному університеті водного господарства та природокористування при виконанні магістерських робіт для студентів спеціальностей 8.04030201 «Прикладна математика» та 8.04030202 «Прикладна інформатика» та при вивченні курсу «Моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів» впроваджено такі результати Турбала Ю.Б.:

- теоретичні основи поширення локалізованих солітоноподібних збурень в суцільних середовищах, зокрема, анізотропних пружних тілах;
- методи аналізу даних сейсмічних станцій та інших результатів фіксації локалізованих солітоноподібних збурень та ідентифікації траєкторій окремих локалізованих хвиль;
- пакет прикладних програм для моделювання та розрахунків характеристик локалізованих солітоноподібних збурень, що поширюються в областях, де відбуваються сейсмічні процеси.

Директор ННІ АКOT, професор,
к.ф.-м.н., д.п.н

П.О. Тадеєв

професор,
к.т.н., д.п.н.

Ю.Й. Тулашвілі

Довідка

про впровадження наукових результатів докторської дисертації
Турбала Ю.В. “Математичне моделювання процесів поширення відокремлених
хвиль типу - солітонів”

м. Київ

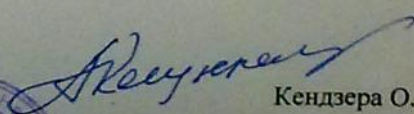
2014 р.

Даною довідкою засвідчуємо, що наукові результати дисертації Турбала Ю.В. “Математичне моделювання процесів поширення відокремлених хвиль типу - солітонів” частково впроваджено в Національному центрі Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України при розробці програмного комплексу для вивчення динаміки відокремлених хвиль у районах підготовки землетрусів, в основі якого покладено аналіз солітонної складової у серіях форшокових та афтершокових поштовхів.

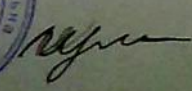
Розроблений Турбалом Ю.В. програмний комплекс містить підсистеми вводу даних, їх аналізу, ідентифікації відокремлених хвиль та прогнозування їх траєкторій, а також підсистему налаштувань, у відповідності з вибором гіпотези про характер швидкості руху відокремлених хвиль. Комплекс може працювати як в мережевому варіанті так і на локальному комп'ютері.

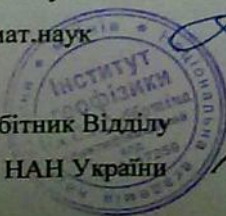
На даний час програмний комплекс Ю.В. Турбала встановлено на сервері відділу сейсмічної безпеки Інституту геофізики НАН України.

Заст.директора з наукової роботи
Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна
НАН України, канд. фіз.-мат. наук


Кендзера О.В.

Старший науковий співробітник Відділу
сейсмічної безпеки ІГФ НАН України


Щербина С.В.



АКТ

про впровадження наукових результатів результатів докторської дисертації
Турбала Ю.В. "Математичне моделювання процесів поширення локалізованих
солітоноподібних збурень в суцільних середовищах"

м.Рівне

2015 р.

Ми, комісія у складі: голова комісії – кандидат Рівненської
І.М. Мачевий І.І. члени комісії: кандидат фізико-
математичних наук, зав. сект. метеорології Мельник А.І.
склали акт про те, що метод моделювання природних об'єктів, що мають
спіральну структуру, зокрема областей хмарності в циклонах-антициклонах, який
базується на використанні операторних модифікацій методу перетинів Пуанкаре,
впроваджено у Рівненському обласному центрі з гідрометеорології в частині
аналізу характеристик циклонів та антициклонів з метою уточнення прогнозів їх
розвитку в часі, і відповідно, уточнення прогнозів погоди. Програмний комплекс
для моделювання динаміки зміни спіральної структури рукавів хмарності циклону
в часі використовується у локальній мережі на сервері Рівненського обласного
центру з гідрометеорології.

Голова комісії

Члени комісії



І.М. Мачевий
А.І. Мельник
І.І. Мачевий

A2 Патент на винахід

УКРАЇНА

UKRAINE



ПАТЕНТ

НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ

№ 63026

СПОСІБ ПРОГНОЗУВАННЯ АФТЕРШОКІВ

Видано відповідно до Закону України "Про охорону прав на винаходи і корисні моделі".

Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на корисні моделі 26.09.2011.

Голова Державної служби
інтелектуальної власності України

М.В. Паладій



Додаток Б Додатки до розділів

Додаток Б1 Розв'язок рівнянь газової динаміки для випадку збурення гравітаційного потенціалу спеціального виду

Нехай збурення гравітаційного потенціалу має вигляд :

$$\Phi_1 = -B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-2} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon).$$

Тоді

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = -B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) + B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-2} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \phi, t, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} = -B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \phi} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) + B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-2} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \frac{g'(\phi - \tilde{\phi}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \phi, t, \varepsilon).$$

Звідси з врахуванням системи (3.64)-(3.66) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = & -\varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) (\psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t) + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)}{r} + \\ & + B\gamma_s (\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}) - \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) (\tilde{r}'(t) - B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t) / \psi_u(t) - \end{aligned} \quad (B1.1)$$

$$\begin{aligned} & - B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_u(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \\ & - \psi_u(t) \frac{g'(\phi - \tilde{\phi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) (\tilde{\phi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} = & -\varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) (\psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} + \\ & + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \phi} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)}{r} + \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \psi_\sigma(t) \sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \phi}) - \\ & - \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_v(t) (\tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon)) - \end{aligned} \quad (B1.2)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{g'(\phi - \tilde{\phi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) \psi_v(t) (\tilde{\phi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{B\gamma_s}{r} \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t) / \psi_v(t) - \\ & - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Рівняння (3.87) запишемо без змін:

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = 0, \\ \tilde{\phi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r \psi_\sigma(t)} - \frac{2\varepsilon_0}{r} \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) - 2\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (\text{Б1.3})$$

Рівняння (Б1.1)-(Б1.2) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} 0 = & -\varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) (\psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) + \\ & + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)}{r}) - \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) (\tilde{r}'(t) - \\ & - B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_u(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \\ & - \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)) - \psi_u(t) \frac{g'(\phi - \tilde{\phi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) (\tilde{\phi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \\ & - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (\text{Б1.4})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -\varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) (\psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)}{r}) - \\ & - \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_v(t) (\tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon)) - \\ & - \frac{g'(\phi - \tilde{\phi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) \psi_v(t) (\tilde{\phi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \\ & - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (\text{Б1.5})$$

Застосовуючи підхід, описаний вище, з системи (3.114)-(3.116) отримуємо:

$$\begin{cases} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = 0, \\ \tilde{\phi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r \psi_\sigma(t)} - \frac{2\varepsilon_0}{r} \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) - 2\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (\text{Б1.6})$$

$$\psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)}{r} = 0,$$

$$\tilde{r}'(t) - B\gamma_s(\gamma_s - 2)\sigma_0^{\gamma_s-3}\varepsilon_0\psi_\sigma^2(t)/\psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \varepsilon_0\psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0$$

$$\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r}\varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0,$$

$$\psi_v'(t) + \psi_u(t)\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t)v_0}{r} + \frac{\psi_u(t)\varepsilon_0\psi_v(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} = 0,$$

$$\tilde{r}'(t) - \psi_u(t)\varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \quad (\text{Б1.7})$$

$$\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{B\gamma_s}{r}(\gamma_s - 2)\sigma_0^{\gamma_s-3}\varepsilon_0\psi_\sigma^2(t)/\psi_v(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \frac{1}{r}\varepsilon_0\psi_v(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0.$$

У випадку, коли $\psi_v(t) = 0$ (3.109) матиме вигляд:

$$0 = -\varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon)\left(\psi_u(t)\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t)v_0}{r}\right) + \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon}\varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) \times \\ \times \frac{B\gamma_s}{r}(\gamma_s - 2)\sigma_0^{\gamma_s-3}\varepsilon_0\psi_\sigma^2(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon).$$

Звідси

$$\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} = 0,$$

$$\frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon}\varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon)\frac{B\gamma_s}{r}(\gamma_s - 2)\sigma_0^{\gamma_s-3}\varepsilon_0\psi_\sigma^2(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0.$$

Останнє рівняння виконується, коли $\gamma_s = 2$. Розглянемо окремі випадки.

Нехай $\psi_v(t) \neq 0$. Тоді, аналізуючи рівняння, що містять $\tilde{r}'(t)$ системи (Б1.6)-(Б1.7) отримуємо умову:

$$\sigma_0\psi_u(t)/\psi_\sigma(t) + \varepsilon_0\psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = \\ = B\gamma_s\sigma_0^{\gamma_s-3}(\gamma_s - 2)\varepsilon_0\psi_\sigma^2(t)/\psi_u(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0.$$

Звідси $\gamma_s = 2$ та має місце співвідношення:

$$\sigma_0 + \varepsilon_0\psi_\sigma(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0. \quad (\text{Б1.8})$$

Аналізуємо рівняння для $\tilde{\varphi}'(t)$:

$$\psi_v(t)\frac{\sigma_0}{r\psi_\sigma(t)} + \frac{2\varepsilon_0}{r}\psi_v(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = \frac{\psi_v(t)}{r}\varepsilon_0\omega(r, \varphi, t, \varepsilon).$$

$$\text{Звідси } \psi_v(t)\frac{\sigma_0}{r\psi_\sigma(t)} + \frac{\varepsilon_0}{r}\psi_v(t)\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0.$$

Отже, маємо систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\ \psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} BD \psi_\sigma(t) + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} = 0, \\ \psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r} = 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{Б1.9})$$

Отримали аналогічну ситуацію, як в попередньому випадку.

Нехай

$$\Phi_1 = (\tilde{r}'(t) \psi_u(t) - B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t)) \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon). \quad (\text{Б1.10})$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= -B \gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \\ &- (\tilde{r}'(t) \psi_u(t) - B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t)) \varepsilon_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon), \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} &= -B \gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \\ &- (\tilde{r}'(t) \psi_u(t) - B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s-2} \psi_\sigma(t)) \varepsilon_0 \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \omega(r, \varphi, t, \varepsilon). \end{aligned}$$

З системи (3.87)-(3.89) отримуємо:

$$\begin{aligned} \psi_\sigma'(t) + \sigma_0 \frac{\psi_u(t)}{r} + \psi_u(t) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) &= 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r \psi_\sigma(t)} - \frac{2\varepsilon_0}{r} \psi_v(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0, \\ \tilde{r}'(t) - \sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) - 2\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{Б1.11})$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) + \\
& + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)}{r}) - \psi_u(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (-B\gamma_s(\gamma_s - \\
& - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) - \\
& - \varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)) - \psi_u(t) \frac{g'(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) (\tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \varphi, t, \varepsilon)),
\end{aligned} \tag{B1.12}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) (\psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \phi} + \\
& + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)}{r}) - \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \psi_v(t) (\tilde{r}'(t) - \\
& - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon)) - \frac{g'(\phi - \tilde{\phi}(t))}{\varepsilon} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) \psi_v(t) (\tilde{\phi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \\
& - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)) + \\
& + \tilde{r}'(t) \psi_u(t) \varepsilon_0 \frac{g'(\phi - \tilde{\phi}(t))}{r \varepsilon} \omega(r, \phi, t, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{B1.13}$$

Звідси з рівняння (Б1.13) отримуємо систему:

$$\begin{aligned}
\psi_u'(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{r} - \frac{3}{2r} BD(\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \psi_\sigma(t) + \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)}{r} = 0, \\
-B\gamma_s(\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0^2 \psi_\sigma^2(t) \omega^2(r, \phi, t, \varepsilon) - \varepsilon_0^2 \psi_u^2(t) \omega^2(r, \phi, t, \varepsilon) = 0,
\end{aligned} \tag{B1.14}$$

$$\tilde{\phi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = 0.$$

З рівняння (Б1.14) отримуємо систему :

$$\begin{aligned}
\psi_v'(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_u(t) v_0}{r} + \frac{\psi_v(t)}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \phi} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon)}{r} = 0, \\
\tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = 0, \\
\tilde{\phi}'(t) - \frac{v_0}{r} - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \\
-\tilde{r}'(t) \psi_u(t) \frac{1}{r \psi_v(t)} = 0.
\end{aligned} \tag{B1.15}$$

Аналізуючи рівняння, що містять $\tilde{r}'(t)$, маємо:

$$\sigma_0 \psi_u(t) / \psi_\sigma(t) + 2\varepsilon_0 \psi_u(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon).$$

Звідси

$$\sigma_0 + \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = 0. \quad (\text{Б1.16})$$

Порівнюючи рівняння, що містять $\tilde{\varphi}'(t)$, маємо:

$$\begin{aligned} & -\frac{v_0}{r} - \psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r\psi_\sigma(t)} - \frac{2\varepsilon_0}{r} \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = -\frac{v_0}{r} - \frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = \\ & = -\frac{v_0}{r} - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \\ & - \tilde{r}'(t) \psi_u(t) \frac{1}{r\psi_v(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r\psi_\sigma(t)} - \frac{2\varepsilon_0}{r} \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = -\frac{\psi_v(t)}{r} \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = \\ & = -\frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \frac{1}{r} \varepsilon_0 \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \\ & - \tilde{r}'(t) \psi_u(t) \frac{1}{r\psi_v(t)}. \end{aligned}$$

Звідси $-\psi_v(t) \frac{\sigma_0}{r\psi_\sigma(t)} - \frac{\varepsilon_0}{r} \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) = 0$ - ця умова виконується в силу

(Б1.16).

Також має місце рівність:

$$\begin{aligned} & -\frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) / \psi_v(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \tilde{r}'(t) \psi_u(t) \frac{1}{r\psi_v(t)} = 0, \\ & -\frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \varepsilon_0 \psi_\sigma^2(t) \omega(r, \phi, t, \varepsilon) - \psi_u(t) \varepsilon_0 \omega(r, \phi, t, \varepsilon) \psi_u(t) \frac{1}{r} = 0, \\ & B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s-3} \psi_\sigma^2(t) + \psi_u^2(t) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б1.17})$$

Додаток Б2 Дослідження стійкості особливих точок оператора (4.16)

Знайдемо нерухомі точки оператора (4.16). Маємо систему:

$$\begin{cases} x = x^2 - y^2 - z^2 + c_x, \\ y = 2xy + c_y, \\ z = 2xz + c_z. \end{cases}$$

Звідси легко можемо знайти розв'язок:

$$\frac{y - c_y}{2y} = \frac{z - c_z}{2z} = x, y = \frac{c_y}{1 - 2x}, z = \frac{c_z}{1 - 2x},$$

$$x = x^2 - \frac{c_y^2}{(1 - 2x)^2} - \frac{c_z^2}{(1 - 2x)^2} + c_x,$$

$$\frac{(x - x^2)(1 - 2x)^2 + c_y^2 + c_z^2 - c_x(1 - 2x)^2}{(1 - 2x)^2} = 0.$$

Нехай $1 - 2x = t, x = \frac{1 - t}{2}$. Тоді

$$x - x^2 = x(1 - x) = \frac{1 - t}{2} \left(1 - \frac{1 - t}{2}\right) = \frac{1 - t}{2} \frac{1 + t}{2} = \frac{1 - t^2}{4},$$

$$\frac{1 - t^2}{4} t^2 + c_y^2 + c_z^2 - c_x t^2 = 0, t^2 = y, -\frac{1}{4} y^2 + \left(\frac{1}{4} - c_x\right) y + c_y^2 + c_z^2 = 0,$$

$$D = \left(\frac{1}{4} - c_x\right)^2 + (c_y^2 + c_z^2), y = \frac{c_x - \frac{1}{4} \pm \sqrt{D}}{-\frac{1}{2}}.$$

В даному випадку маємо, єдиний корінь:

$$y = \frac{1}{2} - 2c_x + 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} - c_x\right)^2 + c_y^2 + c_z^2}.$$

$$\text{Тоді: } t = 1 - 2x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - 2c_x + 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} - 2c_x\right)^2 + c_y^2 + c_z^2}},$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{2} - 2c_x + 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} - c_x\right)^2 + c_y^2 + c_z^2}}}{2}.$$

Звідси:

$$y_{1,2} = \frac{c_y}{1 - 2x_{1,2}}, \quad z_{1,2} = \frac{c_z}{1 - 2x_{1,2}}.$$

Таким чином, оператор (4.16) має дві нерухомі точки. Позначимо ці нерухомі точки (x_0^1, y_0^1, z_0^1) та (x_0^2, y_0^2, z_0^2) відповідно.

Для зручності дослідження введемо змінну $\tilde{x}(t) = x(t) - x_{os}$
 $\tilde{y}(t) = y(t) - y_{os}$ $\tilde{z}(t) = z(t) - z_{os}$, де (x_{os}, y_{os}, z_{os}) -нерухома точка.

Тоді система (4.17) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = (\tilde{x}(t) + x_{os})^2 - (\tilde{y}(t) + y_{os})^2 - (\tilde{z}(t) + z_{os})^2 - \tilde{x}(t) - x_{os} + c_x \\ \tilde{y}'(t) = 2(\tilde{x}(t) + x_{os})(\tilde{y}(t) + y_{os}) - \tilde{y}(t) - y_{os} + c_y, \\ \tilde{z}'(t) = 2(\tilde{x}(t) + x_{os})(\tilde{z}(t) + z_{os}) - \tilde{z}(t) - z_{os} + c_z, \end{cases} \quad (\text{Б2.1})$$

$$\tilde{x}(0) = x^0 - x_{os}, \quad \tilde{y}(0) = y^0 - y_{os}, \quad \tilde{z}(0) = z^0 - z_{os}$$

$$\tilde{y}'(t) = 2\tilde{x}(t)\tilde{y}(t) + 2x_{os}\tilde{y}(t) + 2y_{os}\tilde{x}(t) + 2x_{os}y_{os} - \tilde{y}(t) - y_{os} + c_y$$

$$\tilde{z}'(t) = 2\tilde{x}(t)\tilde{z}(t) + 2x_{os}\tilde{z}(t) + 2z_{os}\tilde{x}(t) + 2x_{os}z_{os} - \tilde{z}(t) - z_{os} + c_z$$

Але оскільки (x_{os}, y_{os}, z_{os}) нерухома точка, то $A(x_{os}, y_{os}, z_{os}) = (x_{os}, y_{os}, z_{os})$.

Тому маємо систему:

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = \tilde{x}^2(t) + 2x_{os}\tilde{x}(t) - \tilde{y}^2(t) - 2y_{os}\tilde{y}(t) - \tilde{z}^2(t) - 2z_{os}\tilde{z}(t) - \tilde{x}(t), \\ \tilde{y}'(t) = 2\tilde{x}(t)\tilde{y}(t) - \tilde{y}(t) + 2x_{os}\tilde{y}(t) + 2y_{os}\tilde{x}(t), \\ \tilde{z}'(t) = 2\tilde{x}(t)\tilde{z}(t) - \tilde{z}(t) + 2x_{os}\tilde{z}(t) + 2z_{os}\tilde{x}(t). \end{cases} \quad (\text{Б2.2})$$

Отже, наближення системи має вигляд:

$$\frac{dz_1}{dt} = (2x_{os} - 1)z_1 - 2y_{os}z_2 - 2z_{os}z_3,$$

$$\frac{dz_2}{dt} = (2x_{os} - 1)z_2 + 2y_{os}z_1,$$

$$\frac{dz_3}{dt} = 2z_{os}z_1 + (2x_{os} - 1)z_3.$$

Скористаємось відомим результатом для системи диференціальних рівнянь виду:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + H_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

та, відповідно, наближення

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j.$$

Якщо всі функції H_i обмежені по t , розвиваються в ряди за степенями x_1, \dots, x_n в деякій n -вимірній кулі радіуса R , $\sum x_i^2 \leq R$, причому розвинення починаються членами на нижче другого порядку і всі корені характеристичного рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

мають від'ємні дійсні частини, то n -вимірна точка спокою $x_i(t) = 0, i = \overline{1, n}$ є асимптотично – стійкою. Якщо хоча б один з коренів має додатну дійсну частину, то точка спокою нестійка.

Проаналізуємо корені характеристичного рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} 2x_{os} - 1 - k & -2y_{os} & -2z_{os} \\ 2y_{os} & 2x_{os} - 1 - k & 0 \\ 2z_{os} & 0 & 2x_{os} - 1 - k \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо:

$$2y_{os} \cdot 2y_{os} (2x_{os} - 1 - k) + (2x_{os} - 1 - k)((2x_{os} - 1 - k)^2 + 4z_{os}^2) = 0,$$

$$(2x_{os} - 1 - k)((2x_{os} - 1 - k)^2 + 4y_{os}^2 + 4z_{os}^2) = 0,$$

$$k = 2x_{os} - 1,$$

$$2x_{os} - 1 - k = \pm i \sqrt{4y_{os}^2 + 4z_{os}^2},$$

$$k = 2x_{os} - 1 \pm 2i \sqrt{y_{os}^2 + z_{os}^2}.$$

Отже, дослідження стійкості зводиться до аналізу виразу: $2x_{os} - 1$. Якщо цей вираз рівний нулю, то дослідити стійкість за першим наближенням неможливо. Якщо $2x_{os} - 1 < 0$, то точка спокою є асимптотично – стійкою.

Якщо $2x_{os} - 1 > 0$, то точка спокою є нестійкою. Розглянемо точку

$$x_{os}^1 = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2} - 2c_x} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} - c_x\right)^2 + c_y^2 + c_z^2}}{2}.$$

Легко бачити, що x_{os}^1 є нестійкою. В цей же час x_{os}^2 є стійкою. Якщо

$$c_y = 0, c_z = 0, c_x = \frac{1}{4}, \text{ то } 2x_{os} - 1 = 0.$$

Розглянемо детальніше цю точку:

$$\begin{cases} x = x^2 - y^2 - z^2 + \frac{1}{4}, \\ y = 2xy, \\ z = 2xz. \end{cases} \Rightarrow x \equiv \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - y^2 - z^2 \Rightarrow y = 0, z = 0$$

Отримали точку: $(\frac{1}{2}; 0; 0)$. Тоді система (В.2) буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = \tilde{x}^2(t) - \tilde{y}^2(t) - \tilde{z}^2(t), \\ \tilde{y}'(t) = 2\tilde{x}(t)\tilde{y}(t), \\ \tilde{z}'(t) = 2\tilde{x}(t)\tilde{z}(t). \end{cases} \quad (\text{В2.3})$$

Розв'яжемо цю систему. Поділивши друге рівняння на третє, отримуємо:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y}{z}, y = c \cdot e^{\ln z} = cz, y_0 = cz_0, c = \frac{y_0}{z_0}.$$

Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = \tilde{x}^2(t) - (1 - c^2)y^2(t), \\ \tilde{y}'(t) = 2\tilde{x}(t)\tilde{y}(t). \end{cases}$$

Звідси

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{y}'(t)}{2\tilde{y}(t)},$$

$$\frac{\tilde{y}''(t)2\tilde{y}(t) - 2(\tilde{y}'(t))^2}{4\tilde{y}^2(t)} = \frac{(\tilde{y}'(t))^2}{4\tilde{y}^2(t)} - (1 - c^2)y^2(t).$$

$$2\tilde{y}''(t)\tilde{y}(t) - 2(\tilde{y}'(t))^2 = (\tilde{y}'(t))^2 - 4(1 - c^2)\tilde{y}^4(t),$$

$$2\tilde{y}''(t)\tilde{y}(t) - 3(\tilde{y}'(t))^2 + 4(1 - c^2)\tilde{y}^4(t) = 0.$$

Надалі хвильку в позначеннях будемо опускати.

$$\text{Нехай } p = y', \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = p \frac{dp}{dy}, y'' = p \frac{dp}{dy}.$$

Тоді:

$$2p \frac{dp}{dy} y - 3p^2 + 4(1 + c^2)y^4(t) = 0, \frac{dp}{dy} - \frac{3p}{2y} + \frac{2(1 + c^2)}{p} y^3 = 0.$$

$$\text{Отримали рівняння Бернуллі: } p \frac{dp}{dy} - \frac{3p^2}{2y} + 2(1 + c^2)y^3 = 0.$$

Нехай $p^2 = z$. Тоді

$$\frac{dz}{dy} = 2p \frac{dp}{dy}, \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{dy} - \frac{3}{2y} z + 2(1 + c^2)y^3 = 0, \frac{dz}{dy} - \frac{3}{y} z + 4(1 + c^2)y^3 = 0.$$

Отримали лінійне рівняння:

$$z(y) = e^{3 \ln y} (c_0 + \int 4(1 + c^2)y^3 e^{-3 \int \frac{1}{y} dy} dy) = y^3 (c_0 + 4(1 + c^2)y).$$

$$\text{Тоді: } p = \pm \sqrt{y^3 (c_0 + 4(1 + c^2)y)},$$

$$y'(t) = \pm \sqrt{c_0 y^3 + 4(1 + c^2)y^4},$$

$$x(t) = \frac{y'(t)}{2y(t)} = \pm \sqrt{c_0 y + 4(1 + c^2)y^2} / 2, \frac{dy}{\sqrt{c_0 y^3 + 4(1 + c^2)y^4}} - dt = 0,$$

$$\frac{dy}{y \sqrt{c_0 y + 4(1 + c^2)y^2}} - dt = 0.$$

Використаємо підстановку Ейлера. Нехай $c_0 y + 4(1 + c^2)y^2 = 0$.

Звідси маємо корені: $0 = \beta, -\frac{c_0}{4(1+c^2)} = \alpha$. Використаємо підстановку:

$$\sqrt{c_0 y + 4(1+c^2)y^2} = (y-\alpha)t, \sqrt{4(1+c^2)(y-\alpha)y} = (y-\alpha)t, 4(1+c^2)(y-\alpha)y = (y-\alpha)^2 t^2.$$

Звідси

$$y = \frac{\alpha t^2}{t^2 - 4(1+c^2)}; y - \alpha = \frac{4\alpha(1+c^2)}{t^2 - 4(1+c^2)},$$

$$dy = \frac{2\alpha t(t^2 - 4(1+c^2)) - 2t\alpha t^2}{(t^2 - 4(1+c^2))^2} dt,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y\sqrt{c_0 y + 4(1+c^2)y^2}} &= \int \frac{-8\alpha(1+c^2)t dt}{(t^2 - 4(1+c^2)) \frac{2\alpha t^2}{t^2 - 4(1+c^2)} \cdot t \cdot \frac{4\alpha(1+c^2)}{t^2 - 4(1+c^2)}} = \\ &= -\int \frac{8\alpha(1+c^2)dt}{4\alpha^2(1+c^2)t^2} = -\frac{2}{\alpha} \left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{\alpha} \frac{y-\alpha}{\sqrt{c_0 y + 4(1+c^2)y^2}}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\frac{2}{\alpha} \cdot \frac{y-\alpha}{\sqrt{c_0 y + 4(1+c^2)y^2}} - t = \tilde{c}, \frac{y-\alpha}{\sqrt{c_0 y + 4(1+c^2)y^2}} = \frac{2}{\alpha} (t + \tilde{c}),$$

$$(y-\alpha)^2 = \frac{\alpha^2}{4} (t + \tilde{c})^2 (c_0 y + 4(1+c^2)y^2).$$

$$(1 - \alpha^2(t + \tilde{c})^2(1+c^2))y^2 - (2\alpha + \frac{\alpha^2}{4}(t + \tilde{c})^2 c_0)y + \alpha^2 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{2\alpha + \frac{\alpha^2}{4}(t + \tilde{c})c_0 \pm \sqrt{D}}{2(1 - \alpha^2(t + \tilde{c})^2(1+c^2))}.$$

$$D = (2\alpha + \frac{\alpha^2}{4}(t + \tilde{c})^2 c_0)^2 - 4\alpha^2(1 - \alpha^2(t + \tilde{c})^2(1+c^2)) =$$

$$= 4\alpha^2 + \alpha^3(t + \tilde{c})^2 c_0 + \frac{\alpha^4}{16}(t + \tilde{c})^4 c_0^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha^4(t + \tilde{c})^2(1+c^2) =$$

$$= (t + \tilde{c})^2 \left(\frac{\alpha^4}{16}(t + \tilde{c})^2 c_0^2 + \alpha^3 c_0 + 4\alpha^4(1+c^2) \right),$$

$$D = -\frac{c_0^4(t+\tilde{c})^2}{4^3(1+c^2)^3} + \frac{c_0^6(t+\tilde{c})^4}{16 \cdot 4^4(1+c^2)^4} + 4\frac{c_0^4}{4^4(1+c^2)^4}(t+\tilde{c})^2(1+c^2) =$$

$$= \frac{c_0^6(t+\tilde{c})^4}{16 \cdot 4^4(1+c^2)^4} \geq 0.$$

$$y_{1,2} = \frac{2\alpha + \frac{\alpha^2}{4}(t+\tilde{c})^2 c_0 \pm \frac{c_0^3(t+\tilde{c})^2}{4^3(1+c^2)^2}}{2(1 - \alpha^2(t+\tilde{c})^2(1+c^2))},$$

$$y_{1,2} = \frac{2\alpha + \frac{c_0^3(t+\tilde{c})^2}{4^3(1+c^2)^2} \pm \frac{c_0^3(t+\tilde{c})^2}{4^3(1+c^2)^2}}{2(1 - \frac{c_0^2}{16(1+c^2)}(t+\tilde{c})^2)}.$$

Бачимо, що мають місце співвідношення:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\alpha + \frac{c_0^3(t+\tilde{c})^2}{32(1+c^2)^2}}{2(1 - \frac{c_0^2}{16(1+c^2)}(t+\tilde{c})^2)} = \frac{\frac{c_0^3}{32(1+c^2)^2}}{-\frac{c_0^2}{8(1+c^2)}} = -\frac{c_0}{4(1+c^2)} = \alpha.$$

$$\text{Тоді } \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_1(t) = \pm \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{c_0 y_1 + 4(1+c^2)y_1^2} / 2 = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_2(t) = \pm \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{c_0 y_2 + 4(1+c^2)y_2^2} / 2 = 0.$$

Отже, точка є асимптотично стійкою.

Додаток Б3 Знаходження щільності випадкових векторів при операторних перетвореннях

Лема 10 Щільність випадкового вектора $\eta = \xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) = \tilde{A}(t)\xi$, де ξ має рівномірний розподіл в G , має вигляд:

$$f_{\tilde{A}(t)\xi}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(G)2\sqrt{2}t^{3/2}\sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)}(\sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)} - (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1))}, & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}^{-1}(t)z \in G, z_1 \neq \frac{t-1}{2t}, \\ \frac{1}{\mu(G)4\sqrt{2}t^{3/2}\sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)}(\sqrt{\alpha(z_1, z_2, z_3)} - (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1))}, & z \in \tilde{A}(t)G, z_1 \neq \frac{t-1}{2t} \text{ і } (\tilde{A}^{-1}(t)z)_+ \in G, \\ 0, & (\tilde{A}^{-1}(t)z)_- \notin G, \text{ або } (\tilde{A}^{-1}(t)z)_+ \notin G, (\tilde{A}^{-1}(t)z)_- \in G, \\ & 0, z \notin \tilde{A}(t)G, \end{cases} \quad (\text{Б3.1})$$

де $\alpha(z_1, z_2, z_3) = (tc_y - z_2)^2 + (tc_z - z_3)^2 + (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t} - z_1)^2$, $\mu(G)$ - міра

Лебега області G

Доведення

Маємо:

$$\begin{aligned} P\{\xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) \in dz\} &= P\{\xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) \in dz / \xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\}P\{\xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\} + \\ P\{\xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) \in dz / \xi_1 = \frac{t-1}{2t}\}P\{\xi_1 = \frac{t-1}{2t}\} &= \\ = P\{\xi + t(\tilde{A}\xi - \xi) \in dz / \xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\}P\{\xi_1 \neq \frac{t-1}{2t}\}. & \end{aligned}$$

Проводячи міркування, аналогічні Лемі 8, маємо:

$$f_\eta(Y) = f_\xi(\Phi_+^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_+^{-1}(Y)) + f_\xi(\Phi_-^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_-^{-1}(Y)).$$

Нехай $\Phi(Y) = \tilde{A}(t)Y$.

Тоді маємо:

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \begin{vmatrix} 1 + 2tx - t & -2ty & -2tz \\ 2ty & 1 + 2tx - t & 0 \\ 2tz & 0 & 1 + 2tx - t \end{vmatrix} = (1 - t + 2tx)^3 + (1 - t + 2tx)4t^2(y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial \Phi(\Phi_+^{-1}(z))}{\partial x} = \left| s^3 + \frac{4t^2}{s} (z_2 - tc_y)^2 + \frac{4t^2}{s} (z_3 - tc_z)^2 \right| = \frac{\partial \Phi(\Phi_-^{-1}(z))}{\partial x},$$

де

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2},$$

$$\tau = 8t^2\alpha - 4t(tc_x - z_1)(t-1)^2 + \frac{1}{2}(t-1)^4,$$

$$\alpha = (tc_x - z_1)^2 + (tc_y - z_2)^2 + (tc_z - z_3)^2.$$

Тоді, враховуючи, що ξ має рівномірний розподіл в G , отримуємо:

$$f_{\tilde{A}(t)\xi}(z) = \begin{cases} \frac{2}{\mu(G)\sqrt{\tau(\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2)}}, & z \in \tilde{A}(t)G, \tilde{A}^{-1}(t)z \in G, z_1 \neq \frac{t-1}{2t} \\ \frac{1}{\mu(G)\sqrt{\tau(\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2)}}, & z \in \tilde{A}(t)G, z_1 \neq \frac{t-1}{2t} \text{ і } (\tilde{A}^{-1}(t)z)_+ \in G, \\ 0, & (\tilde{A}^{-1}(t)z) \notin G, \text{ або } (\tilde{A}^{-1}(t)z)_+ \notin G, (\tilde{A}^{-1}(t)z) \in G \\ & 0, z \notin \tilde{A}(t)G \end{cases}$$

Використовуючи нескладні перетворення виразів τ та $\sqrt{2\tau} - 4t(tc_x - z_1) + (t-1)^2$, отримуємо необхідний вираз для функції щільності.

Лема доведена.

Нехай

$$g(t, s_2, \Delta) = \frac{\alpha(\tilde{t} + t, z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(\tilde{t} + t, z_1^1, z_2^1, z_3^1)}{\alpha(s_2 + t, z_1^2, z_2^2, z_3^2)\beta(s_2 + t, z_1^2, z_2^2, z_3^2)};$$

$s(y)$ - функція, що є розв'язком задачі Коші виду:

$$s'(y) = \frac{\sqrt{\alpha(s(y), z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(s(y), z_1^1, z_2^1, z_3^1)}}{\sqrt{\alpha(y, z_1^2, z_2^2, z_3^2)\beta(y, z_1^2, z_2^2, z_3^2)}}$$

$$s(0) = 0,$$

$$\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3) = t\alpha(t, z_1, z_2, z_3),$$

$$\tilde{\beta}(t, z_1, z_2, z_3) = \sqrt{\tilde{\alpha}(t, z_1, z_2, z_3)} - t\beta(t, z_1).$$

Твердження 8.1

Нехай швидкість поширення випромінювання, що генерується в точці x фазового простору, є постійною і визначається співвідношенням

$v(x) = c|\tilde{A}x - x|$, та виконуються умови:

$$\forall z \in G \quad \rho(B_s, z) \geq \rho(B_s, B_{\tilde{t}}) \quad (\text{Б3.2})$$

$$z_1 \geq \tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t} - 1)^2}{4\tilde{t}} \quad (\text{Б3.3})$$

$$|s'(y)| < \infty \quad (\text{Б3.4})$$

Тоді локальний екстремум енергетичної функції (4.35) досягається в точці $B_{\tilde{t}}$ при будь-яких значеннях $t \in [0, T]$, де $T = \min\{T_1, T_2\}$

$$T_1 = \max\{t : |\tilde{A}^{-1}(t)B_{\tilde{t}}| \geq |\tilde{A}^{-1}(t)B_s|, s \geq \tilde{t}\} \quad (\text{Б3.5})$$

(тут $|\cdot|$ -потужність множини)

$$T_2 = \max\{t : \forall s_2 \geq \tilde{t} : g(t, s_2, \Delta) \leq 1\} \quad (2.6)$$

Введемо наступні позначення:

$$f_1(t) = (tc_y - \varepsilon_2)^2 + (tc_z - \varepsilon_3)^2,$$

$$f_2(t, s) = t^2(c_x - \frac{1}{4}) - \varepsilon_1 t + s(tc_x - \varepsilon_1 - \frac{t}{4}) + \frac{t}{4s},$$

$$p(t, s) = tc_x - \varepsilon_1 - \frac{t}{4} - \frac{t}{4s^2},$$

$$t^2(c_x - \frac{1}{4}) - \varepsilon_1 t + s(tc_x - \varepsilon_1 - \frac{t}{4}) + \frac{t}{4s} \leq 0.$$

Відмітимо, що в силу специфічного вибору точки

$$z^1 = (s_1c_x - \frac{(s_1 - 1)^2}{4s_1} + \varepsilon_1, s_1c_y + \varepsilon_2, s_1c_z + \varepsilon_3) \quad \text{можемо розглянути функцію}$$

$\alpha(t, z_1, z_2, z_3)$ як функцію двох аргументів. Дійсно:

$$\alpha(s + t, z_1, z_2, z_3) = ((s + t)^2 c_y - (s + t)(sc_y + \varepsilon_2))^2 + \\ + ((s + t)^2 c_z - (sc_z + \varepsilon_3)(s + t))^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +((s+t)^2 c_x - \frac{(s+t-1)^2}{4} - (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s} + \varepsilon_1)(s+t))^2 = \\
& = (s+t)^2 ((tc_y - \varepsilon_2)^2 + (tc_z - \varepsilon_3)^2) + \\
& +((s+t)^2 c_x - \frac{(s-1+t)^2}{4} - (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s} + \varepsilon_1)s - \\
& - (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s} + \varepsilon_1)t)^2 = (s+t)^2 ((tc_y - \varepsilon_2)^2 + (tc_z - \varepsilon_3)^2) + \\
& + (s^2 c_x - \frac{(s-1)^2}{4} + t^2 c_x - \frac{t^2}{4} + 2stc_x - \frac{(s-1)t}{2} - \\
& - (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s} + \varepsilon_1)s - (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s} + \varepsilon_1)t)^2 = \\
& = (s+t)^2 ((tc_y - \varepsilon_2)^2 + (tc_z - \varepsilon_3)^2) + (t^2 c_x - \frac{t^2}{4} + 2stc_x - \frac{(s-1)t}{2} - \varepsilon_1 s - \\
& - (sc_x - \frac{(s-1)^2}{4s} + \varepsilon_1)t)^2 = (s+t)^2 ((tc_y - \varepsilon_2)^2 + (tc_z - \varepsilon_3)^2) + \\
& + (t^2 c_x - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + \frac{t}{2} - \varepsilon_1 t + s(2tc_x - \varepsilon_1 - \frac{t}{2} - tc_x + \\
& + \frac{t}{4}) + \frac{t}{4s})^2 = (s+t)^2 ((tc_y - \varepsilon_2)^2 + (tc_z - \varepsilon_3)^2) + \\
& + (t^2(c_x - \frac{1}{4}) - \varepsilon_1 t + s(tc_x - \varepsilon_1 - \frac{t}{4}) + \frac{t}{4s})^2 .
\end{aligned}$$

Отже:

$$\alpha(t, s) = (t+s)^2 f_1(t) + f_2^2(t, s), \beta(t, s) = \sqrt{\alpha(t, s)} - f_2(t, s).$$

Нехай

$$\tilde{g}(t, s) = 3\sqrt{\alpha(t, s)}((s+t)f_1(t) + f_2(t, s)p(t, s)) - \alpha(t, s)p(t, s),$$

$$s_{\min} = \min\{s : \max_t \tilde{g}(t, s) \geq 0, s > 0\}.$$

Твердження 8.2

Нехай швидкість поширення відокремлених хвиль в просторі $v(x) = c|\tilde{A}x - x|$,

$$\tilde{t} = \min\{t > 0 : B_t = (tc_x - \frac{(t-1)^2}{4t}, tc_y, tc_z) \in G\},$$

та виконуються умови:

$$\forall z \in G \quad \rho(B_s, z) \geq \rho(B_s, B_{\tilde{t}}), \quad (\text{Б3.6})$$

$$z_1 \geq \tilde{t}c_x - \frac{(\tilde{t}-1)^2}{4\tilde{t}}, \quad (\text{Б3.7})$$

$$f_2(t, s) < 0 \quad \forall s \geq \tilde{t}, \quad (\text{Б3.8})$$

$$c_x < 0. \quad (\text{Б3.9})$$

Тоді екстремум енергетичної функції (4.20) досягається в точці $B_{\tilde{t}}$ при будь-яких значеннях $t \in [0, T]$,

де

$$T = \max\{t : |\tilde{A}^{-1}(t)B_{\tilde{t}} \cap G| \geq |\tilde{A}^{-1}(t)B_s \cap G|, s \geq \tilde{t}\} \quad (\text{Б3.10})$$

(тут $|\cdot|$ -потужність множини).

Доведення

Покажемо, що

$$\forall z \in G, \forall T :$$

$$\int_0^T \int_{S_{\varepsilon_E}(z)} f_{\tilde{A}(s)\xi_0}(x) dx ds \leq \int_0^T \int_{S_{\varepsilon_E}(B_{\tilde{t}})} f_{\tilde{A}(s)\xi_0}(x) dx ds.$$

$$\text{Нехай } z^1 = (s_1c_x - \frac{(s_1-1)^2}{4s_1} + \varepsilon_1, s_1c_y + \varepsilon_2, s_1c_z + \varepsilon_3),$$

$$z^2 = (s_2c_x - \frac{(s_2-1)^2}{4s_2} + \varepsilon_1, s_2c_y + \varepsilon_2, s_2c_z + \varepsilon_3),$$

$\tilde{t} \leq s_1 \leq s_2 < T$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ -деякі достатньо малі числа, такі що

$$z^2 \in S_{\varepsilon_E}(s_2c_x - \frac{(s_2-1)^2}{4s_2}, s_2c_y, s_2c_z).$$

Покажемо, що $\int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^2)ds \leq \int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^1)ds$. Розглянемо $\int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^1)ds$. В цьому інтегралі зробимо заміну змінних $s = s(y)$ так, щоб виконувалась умова:

$f_{\tilde{A}(s(y))\xi_{t_0}}(z^1)s'(y) = f_{\tilde{A}(y)\xi_{t_0}}(z^2)$. Тоді для функції $s(y)$ отримаємо співвідношення:

$$s'(y) = \frac{|\tilde{A}^{-1}(y)z^2 \cap G| \sqrt{\alpha(s(y), z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(s(y), z_1^1, z_2^1, z_3^1)}}{|\tilde{A}^{-1}(s(y))z^1 \cap G| \sqrt{\alpha(y, z_1^2, z_2^2, z_3^2)\beta(y, z_1^2, z_2^2, z_3^2)}}. \quad (\text{Б3.11})$$

Нехай $s(0) = 0$. Тоді для знаходження функції $s(y)$ отримуємо задачу Коші. Нехай крім того, $|s'(y)| < \infty$ (можна навести приклади таких значень параметрів системи, коли відповідні умови дійсно виконуються). Відмітимо, що $s^{-1}(0) = 0$.

$$\int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^1)ds = \int_{s^{-1}(0)}^{s^{-1}(T)} \frac{s'(y)}{\sqrt{\alpha(s(y), z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(s(y), z_1^1, z_2^1, z_3^1)}} dy. \quad (\text{Б3.12})$$

Тоді для порівняння інтегралів $\int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^2)ds$ та $\int_0^T f_{\tilde{A}(s)\xi_{t_0}}(z^1)ds$ досить оцінити лише величину $s^{-1}(T)$. Покажемо, що $s^{-1}(T) \geq T$. Відмітимо, що $s'(t) \geq 0$ -це випливає з співвідношення (4.57).

Отже, необхідно показати, що виконується нерівність:

$$T \geq s(T). \quad (\text{Б3.13})$$

Розглянемо величину $s(s_2)$. Відмітимо, що $\alpha(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2) = s_2^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$,

$$\beta(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2) = \sqrt{s_2^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)} + s_2\varepsilon_1,$$

Тоді $\alpha(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2)\beta(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2) \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \varepsilon_3 \rightarrow 0} 0$. А, оскільки, за припущенням,

похідна є обмеженою, то повинна виконуватись умова:

$$\alpha(s(s_2), z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(s(s_2), z_1^1, z_2^1, z_3^1) \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \varepsilon_3 \rightarrow 0} 0.$$

Аналізуючи вигляд функцій $\alpha(s(s_2), z_1^1, z_2^1, z_3^1)$ та $\beta(s(s_2), z_1^1, z_2^1, z_3^1)$ легко бачити, що остання умова може виконуватись лише у випадку, коли $s(s_2) = s_1$. Отже, нерівність (В.16) має місце при $T = s_2$. Позначимо $g(s, t) = \alpha(t, s)\beta(t, s)$.

Проаналізуємо характер останньої функції при фіксованому значенні t .

Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} g(t, s) &= (2(s+t)f_1(t) + 2f_2(t, s)p(t, s))(\sqrt{\alpha(t, s)} - f_2(t, s)) + \\ &+ \alpha(t, s)\left(\frac{2(s+t)f_1(t) + 2f_2(t, s)p(t, s)}{2\sqrt{\alpha(t, s)}} - p(t, s)\right) = \\ &= 3\sqrt{\alpha(t, s)}((s+t)f_1(t) + f_2(t, s)p(t, s)) - \alpha(t, s)p(t, s). \end{aligned}$$

Оскільки $c_x < 0$, то $p(t, s) < 0$. За умовою (4.54) $f_2(t, s) < 0$. Відмітимо, що нерівність (4.61) виконується при достатньо малому значенні t , зокрема $t = 0$.

В такому випадку $(s+t)f_1(t) + f_2(t, s)p(t, s) \geq 0$. Отже, $\frac{\partial}{\partial s} g(t, s) \geq 0$ при таких значеннях t , що $f_2(t, s) < 0$. Іншими словами, функція $g(t, s)$ є зростаючою по змінній s . Тоді

$$\begin{aligned} s'(s_2) &= \frac{|\tilde{A}^{-1}(s_2)z^2 \cap G| \sqrt{\alpha(s_1, z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(s_1, z_1^1, z_2^1, z_3^1)}}{|\tilde{A}^{-1}(s_1)z^1 \cap G| \sqrt{\alpha(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2)\beta(s_2, z_1^2, z_2^2, z_3^2)}} = \\ &= \frac{|\tilde{A}^{-1}(s_2)z^2 \cap G| \sqrt{\alpha(0, s_1)\beta(0, s_1)}}{|\tilde{A}^{-1}(s_1)z^1 \cap G| \sqrt{\alpha(0, s_2)\beta(0, s_2)}} < 1. \end{aligned} \quad (\text{Б3.14})$$

Покажемо, що $\forall t \ s(s_2 + t) \leq s_1 + t$. В силу виконання нерівності (Б3.14)

$\exists \Delta > 0 : s(s_2 + \Delta) \leq s(s_2) + \Delta = s_1 + \Delta$. Припустимо, що існує

$y > 0 : s(s_2 + y) > s_1 + y$. Нехай $t_{\max} = \sup\{t : t < y, s(s_2 + t) \leq s_1 + t\}$. Очевидно,

що $s(s_2 + t_{\max}) = s_1 + t_{\max}$.

Тоді

$$\begin{aligned}
s'(s_2 + t_{\max}) &= \\
&= \frac{|\tilde{A}^{-1}(s_2 + t_{\max})z^2 \cap G| \sqrt{\alpha(s_1 + t_{\max}, z_1^1, z_2^1, z_3^1)\beta(s_1 + t_{\max}, z_1^1, z_2^1, z_3^1)}}{|\tilde{A}^{-1}(s_1 + t_{\max})z^1 \cap G| \sqrt{\alpha(s_2 + t_{\max}, z_1^2, z_2^2, z_3^2)\beta(s_2 + t_{\max}, z_1^2, z_2^2, z_3^2)}} = \\
&= \frac{\sqrt{\alpha(t_{\max}, s_1)\beta(t_{\max}, s_1)}}{\sqrt{\alpha(t_{\max}, s_2)\beta(t_{\max}, s_2)}} < 1.
\end{aligned}$$

Остання нерівність виконується, оскільки функція $g(t, s)$ є монотонно зростаючою по змінній s . Отже, $\exists \Delta_1 > t_{\max} : s(s_2 + \Delta_1) \leq s(s_2) + \Delta_1 = s_1 + \Delta_1$. Отримали протиріччя. Отже $\forall t \ s(s_2 + t) \leq s_1 + t$. Розглянемо $s(t)$ при довільному значенні t . Оскільки ця функція монотонно зростаюча і $s(s_2) = s_1$, то $s(t) \leq t$ при $t \geq s_1$. В противному випадку отримаємо протиріччя з тим, що $s(s_2) = s_1$.

Розглянемо випадок $t < s_1$. Нехай $s_1 = \tilde{t}$. Але цей випадок вже розглянутий в Твердженні 8. *Твердження доведене.*

Додаток Б4 Розв'язок рівняння руху для анізотропного пружного тіла для випадку залежності амплітуди від густини

Будемо підставляти співвідношення (5.72) в систему (5.71). Розглянемо перше рівняння системи (5.71):

$$\begin{aligned}
 & \rho \psi''_u(t)W(x, y, z, t) + 2\rho \psi'_u(t)W(x, y, z, t)G(x, y, z, t) + \\
 & + \rho \psi_u(t)W(x, y, z, t)G^2(x, y, z, t) + \rho \psi_u(t)W(x, y, z, t) \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}''(t) - \right. \\
 & - \frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}'^2(t) + \frac{g'(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2} \tilde{y}''(t) - \frac{g''(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2} \tilde{y}'^2(t) + \\
 & + \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \tilde{z}''(t) - \frac{g''(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \tilde{z}'^2(t) \left. \right) = c_{11} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) (\Phi_x(t, x, \right. \\
 & y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \left. \right) + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right)^2 + \\
 & + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial x} - \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right) + \\
 & + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} W(x, y, z, t) + \\
 & + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \\
 & + c_{66} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \right. \\
 & + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right)^2 + \\
 & + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z, \rho)}{\partial y} - \frac{g''(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right) + \\
 & + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} W(x, y, z, t) + \\
 & + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_{55} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right) + \right. \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right)^2 + \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_z(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} - \frac{g''(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(\rho, t) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right) + \\
& + c_{16} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \right. \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial y} + \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \\
& + c_{16} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right)^2 + \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial x} - \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \\
& + c_{26} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \psi_v(\rho, t)W(x, y, z, t)\left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2}\right)^2 + \\
& + \psi_v(\rho, t)W(x, y, z, t)\left(\frac{\partial\Phi_y(t, x, y, z, \rho)}{\partial y} - \frac{g''(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_1}\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\right) + \\
& + \frac{\partial^2\psi_v}{\partial\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}W(x, y, z, t)\left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2}\right) + \\
& + c_{45}\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}W(x, y, z, t)\left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t, \rho))}{\varepsilon_3}\right) + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t)W(x, y, z, t)\left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t, \rho))}{\varepsilon_3}\right)^2 + \\
& + \psi_v(\rho, t)W(x, y, z, t)\left(\frac{\partial\Phi_z(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} - \frac{g''(z - \tilde{z}(t, \rho))}{\varepsilon_3}\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right) + \\
& + \frac{\partial^2\psi_v}{\partial\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}W(x, y, z, t)\left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t, \rho))}{\varepsilon_3}\right) + \\
& + (c_{12} + c_{66})\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}W(x, y, z, t)\left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1}\right) + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t)W(x, y, z, t)\left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2}\right)\left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1}\right) + \\
& + \psi_v(\rho, t)W(x, y, z, t)\left(\frac{\partial\Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial y} + \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right) + \\
& + \frac{\partial^2\psi_v}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x}W(x, y, z, t) + \frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial x}W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}W(x, y, z, t)\left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2}\right) + \\
& + (c_{13} + c_{55})\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}W(x, y, z, t)\left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1}\right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \psi_w(\rho, t)W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \\
& + \psi_w(\rho, t)W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} + \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) + \\
& + (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \right. \\
& + \psi_w(\rho, t)W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \\
& + \psi_w(\rho, t)W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} + \frac{g''(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} W(x, y, z, t) + \\
& \left. + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \right);
\end{aligned}$$

Враховуючи той факт, що ми знаходимо розв'язок в деякій області для довільних значень змінних x, y, z , в останньому співвідношенні будемо прирівнювати до нуля всі коефіцієнти, які стоять біля відповідних виразів, що містять функцію $g()$. Аналізуючи коефіцієнти, що не містять множник $g()$, отримуємо рівняння:

$$\begin{aligned}
\rho \psi''_u(t) &= c_{11} \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) + c_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + \\
& + c_{55} \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) + c_{16} \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + \\
& + c_{16} \left(\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) + c_{26} \left(\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_{45} \left(\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) + (c_{12} + c_{66}) \left(\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + \\
& + (c_{13} + c_{55}) \left(\frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} \right) + (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} \right)
\end{aligned} \tag{B4.1}$$

Коефіцієнт при $\frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1}$:

$$\begin{aligned}
& -\rho \psi_u(t) \tilde{x}'^2(t, \rho) = -c_{11} \psi_u(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 - c_{66} \psi_u(\rho, t) \xi_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho) - \\
& -c_{55} \psi_u(\rho, t) \xi_z(\tilde{x}(t, \rho), \rho) + c_{16} \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \right. \\
& -c_{16} \psi_v(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 - c_{26} \psi_v(\rho, t) \xi_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho) - \\
& -c_{45} \psi_v(\rho, t) \xi_z(\tilde{x}(t, \rho), \rho) + \\
& + (c_{12} + c_{66}) \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \\
& + (c_{13} + c_{55}) \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \\
& - (c_{36} + c_{45}) \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{B4.2}$$

Коефіцієнт при $\frac{g''(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}$:

$$\begin{aligned}
& -\rho \psi_u(\rho, t) \tilde{y}'^2(t, \rho) = -c_{11} \psi_u(\rho, t) \xi_x(\tilde{y}(t, \rho), \rho) - c_{66} \psi_u(\rho, t) \left(1 - \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \left. \right)^2 - c_{55} \psi_u(\rho, t) \xi_z(\tilde{y}(t, \rho), \rho) + c_{16} \psi_u(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} - c_{16} \psi_v(\rho, t) \xi_x(\tilde{y}(t, \rho), \rho) - c_{26} \psi_v(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 - \\
& -c_{45} \psi_v(\rho, t) \xi_z(\tilde{y}(t, \rho), \rho) + (c_{12} + c_{66}) \psi_v(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} - (c_{13} + \\
& + c_{55}) \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + (c_{36} + c_{45}) \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - \right.
\end{aligned} \tag{B4.3}$$

Коефіцієнти при $\frac{g''(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
& -\rho \psi_u(t) \tilde{z}^2(t, \rho) = -c_{11} \psi_u(\rho, t) \xi_x(\tilde{z}(t, \rho), \rho) - \\
& -c_{66} \psi_u(\rho, t) \xi_y(\tilde{z}(t, \rho), \rho) - c_{55} \psi_u(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 - \\
& -c_{16} \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho)\right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} - c_{16} \psi_v(\rho, t) \xi_x(\tilde{z}(t, \rho), \rho) - \\
& -c_{26} \psi_v(\rho, t) \xi_y(\tilde{z}(t, \rho), \rho) - c_{45} \psi_v(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 - \\
& -(c_{12} + c_{66}) \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho)\right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\
& +(c_{13} + c_{55}) \psi_w(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \\
& -(c_{36} + c_{45}) \psi_w(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{Б4.4}$$

Коефіцієнти при $\frac{(g'(x - \tilde{x}(t)))^2}{(\varepsilon_1)^2}$:

$$\begin{aligned}
& -\rho \psi_u(t) \tilde{x}^2(t, \rho) = -c_{11} \psi_u(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 - c_{66} \psi_u(\rho, t) \xi_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho) - \\
& -c_{55} \psi_u(\rho, t) \xi_z(\tilde{x}(t, \rho), \rho) + c_{16} \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\right) - \\
& -c_{16} \psi_v(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 - c_{26} \psi_v(\rho, t) \xi_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho) - \\
& -c_{45} \psi_v(\rho, t) \xi_z(\tilde{x}(t, \rho), \rho) + (c_{12} + c_{66}) \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y}\right) - \\
& -\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho)\right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + (c_{13} + c_{55}) \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) - \\
& -\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho)\right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} - (c_{36} + c_{45}) \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho)\right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{Б4.5}$$

Коефіцієнти при $\frac{(g'(y - \tilde{y}(t)))^2}{(\varepsilon_2)^2}$:

$$\begin{aligned}
& -\rho\psi_u(\rho,t)\tilde{y}^2(t,\rho) = -c_{11}\psi_u(\rho,t)\xi_x(\tilde{y}(t,\rho),\rho) + \\
& -c_{66}\psi_u(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 - c_{55}\psi_u(\rho,t)\xi_z(\tilde{y}(t,\rho),\rho) + \\
& +c_{16}\psi_u(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - \\
& -c_{16}\psi_v(\rho,t)\xi_x(\tilde{y}(t,\rho),\rho) - c_{26}\psi_v(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 - \\
& -c_{45}\psi_v(\rho,t)\xi_z(\tilde{y}(t,\rho),\rho) + (c_{12} + c_{66})\psi_v(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - \\
& -(c_{13} + c_{55})\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \\
& +(c_{36} + c_{45})\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\right).
\end{aligned} \tag{Б4.6}$$

Коефіцієнти при $\frac{(g'(z - \tilde{z}(t)))^2}{(\varepsilon_3)^2}$:

$$\begin{aligned}
& -\rho\psi_u(t)\tilde{z}^2(t,\rho) = -c_{11}\psi_u(\rho,t)\xi_x(\tilde{z}(t,\rho),\rho) - \\
& -c_{66}\psi_u(\rho,t)\xi_y(\tilde{z}(t,\rho),\rho) - c_{55}\psi_u(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 - \\
& -c_{16}\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x} - c_{16}\psi_v(\rho,t)\xi_x(\tilde{z}(t,\rho),\rho) - \\
& -c_{26}\psi_v(\rho,t)\xi_y(\tilde{z}(t,\rho),\rho) - c_{45}\psi_v(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 - \\
& -(c_{12} + c_{66})\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \\
& +(c_{13} + c_{55})\psi_w(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - \\
& -(c_{36} + c_{45})\psi_w(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{Б4.7}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}$:

$$\begin{aligned}
2\rho W\psi_u(t)\tilde{x}'(t)\tilde{y}'(t) &= 2c_{11}\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \\
&+ 2c_{66}\psi_u(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right) + 2c_{55}\psi_u(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\times \\
&\times\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 + c_{16}\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \right. \\
&+ \left.\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\right) + 2c_{16}\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - \right. \\
&- \left.1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + 2c_{26}\psi_v(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right) + \\
&+ 2c_{45}\psi_v(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} + \\
&+ (c_{12} + c_{66})\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - \right. \right. \\
&- \left. \left.1\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\right) + (c_{13} + c_{55})\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \right. \\
&+ \left.\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\right) +
\end{aligned} \tag{B4.8}$$

$$+ (c_{36} + c_{45})\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right) + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)$$

. Коефіцієнти при $\frac{g'(x-\tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(z-\tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
2\rho W\psi_u(t)\tilde{x}'(t)\tilde{z}'(t) &= 2c_{11}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \\
&+ 2c_{66}\psi_u(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + 2c_{55}\psi_u(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right) + \\
&+ c_{16}\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2c_{16}\psi_v(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+ \\
& + 2c_{26}\psi_v(\rho, t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+ \\
& + 2c_{45}\psi_v(\rho, t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right) \\
& + (c_{12}+c_{66})\psi_v(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\right)+ \\
& + (c_{13}+c_{55})\psi_w(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)\times\right. \\
& \times\left.\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\right)+ (c_{36}+c_{45})\psi_w(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-\right.\right. \\
& \left.\left.-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{B4.9}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(y-\tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(z-\tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
2\rho W\psi_u(t)\tilde{y}'(t)\tilde{z}'(t) & = 2c_{11}\psi_u(\rho, t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+ \\
& + 2c_{66}\psi_u(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+ \\
& + 2c_{55}\psi_u(\rho, t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)+ \\
& + c_{16}\psi_u(\rho, t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) \\
& + 2c_{16}\psi_v(\rho, t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+ \\
& + 2c_{26}\psi_v(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+ \\
& + 2c_{45}\psi_v(\rho, t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)+
\end{aligned} \tag{B4.10}$$

$$\begin{aligned}
&+(c_{12} + c_{66})\psi_v(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\
&+(c_{13} + c_{55})\psi_w(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \\
&\left.+(c_{36} + c_{45})\psi_w(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1\right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1\right)\right).
\end{aligned}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1}$:

$$\begin{aligned}
2\rho\psi'_u(t)W\tilde{x}'(t) + \rho\psi_u(t)W\tilde{x}''(t) &= c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right) + \right. \\
&+\psi_u(\rho,t)\zeta_x(\tilde{x}(t,\rho),\rho)) + c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + \right. \\
&+\psi_u(\rho,t)\zeta_y(\tilde{x}(t,\rho),\rho)) + c_{55}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} + \psi_u(\rho,t)\zeta_z(\tilde{x}(t,\rho),\rho)\right) + \\
&+c_{16}\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right) + \frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + \right. \\
&+\psi_u(\rho,t)\zeta_{yx}(\tilde{x}(t,\rho),\rho)) + c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right) + \right. \\
&+\psi_v(\rho,t)\zeta_x(\tilde{x}(t,\rho),\rho)) + c_{26}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + \right. \\
&\left.+\psi_v(\rho,t)\zeta_y(\tilde{x}(t,\rho),\rho)) + c_{45}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} + \psi_v(\rho,t)\zeta_z(\tilde{x}(t,\rho),\rho)\right) \right.
\end{aligned} \tag{Б4.11}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}$:

$$\begin{aligned}
2\rho\psi'_u(t)W\tilde{y}'(t) + \rho\psi_u(t)W\tilde{y}''(t) &= c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \right. \\
&+\psi_u(\rho,t)\zeta_x(\tilde{y}(t,\rho),\rho)) + c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - 1\right) + \psi_u(\rho,t)\zeta_y(\tilde{y}(t,\rho),\rho)\right) + \\
&+c_{55}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} + \psi_u(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \psi_u(\rho,t)\zeta_z(\tilde{y}(t,\rho),\rho)\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c_{16}\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)+\right. \\
& \left.+\psi_u(\rho,t)\zeta_{yx}(\tilde{y}(t,\rho),\rho)\right)+c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\psi_v(\rho,t)\zeta_x(\tilde{y}(t,\rho),\rho)\right)+ \\
& \left. +c_{26}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)+\psi_v(\rho,t)\zeta_y(\tilde{y}(t,\rho),\rho)\right)+\right. \\
& \left. +c_{45}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}+\psi_v(\rho,t)\zeta_{zy}(\tilde{y}(t,\rho),\rho)\right)\right. \\
& \left. +(c_{12}+c_{66})\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\psi_v(\rho,t)\zeta_{yx}(\tilde{y}(t,\rho),\rho)+\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)+\right. \\
& \left. +(c_{13}+c_{55})\left(\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\psi_w(\rho,t)\zeta_{zx}(\tilde{y}(t,\rho),\rho)+\right.\right. \\
& \left. \left. +\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+(c_{36}+c_{45})\left(\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}+\right. \\
& \left. +\psi_w(\rho,t)\zeta_{zy}(\tilde{y}(t,\rho),\rho)\right).
\end{aligned} \tag{B4.12}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(z-\tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
2\rho\psi'_u(t)W\tilde{z}'(t)+\rho\psi_u(t)W\tilde{z}''(t)=c_{11}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\right. \\
\left. +\psi_u(\rho,t)\zeta_x(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right)+c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\psi_u(\rho,t)\zeta_y(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right)+ \\
\left. +c_{55}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)+\psi_u(\rho,t)\zeta_z(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right)+\right. \\
\left. +c_{16}\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\psi_u(\rho,t)\zeta_{yx}(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right)+\right. \\
\left. +c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\psi_v(\rho,t)\zeta_x(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right)+\right. \\
\left. +c_{26}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)+\psi_v(\rho,t)\zeta_y(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right)+\right.
\end{aligned} \tag{B4.13}$$

$$\begin{aligned}
& +c_{45} \left(2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \psi_v(\rho, t) \zeta_z(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + (c_{12} + c_{66}) \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \\
& + (c_{13} + c_{55}) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} \right) \right).
\end{aligned}$$

Зокрема, для випадку, коли амплітудні функції не залежать від густини, отримуємо систему:

$$\begin{aligned}
\rho \psi''_u(t) &= c_{11} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y^2} + c_{55} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial z^2} + c_{16} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y \partial x} + c_{16} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial x^2} + c_{26} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial y^2} + \\
& + c_{45} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial z^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial y \partial x} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z \partial x} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z \partial y}, \\
\rho \psi_u(t) \tilde{x}'^2(t) &= c_{11} \psi_u(t) + c_{16} \psi_v(t), \\
\rho \psi_u(t) \tilde{y}'^2(t) &= c_{26} \psi_v(t) + c_{66} \psi_u(t), \\
\rho \psi_u(t) \tilde{z}'^2(t) &= c_{45} \psi_v(t) + c_{55} \psi_u(t), \\
2\rho \psi_u(t) \tilde{x}'(t) \tilde{y}'(t) &= (c_{12} + c_{66}) \psi_v(t), \\
2\rho \psi_u(t) \tilde{x}'(t) \tilde{z}'(t) &= (c_{13} + c_{55}) \psi_w(t), \\
2\rho \psi_u(t) \tilde{y}'(t) \tilde{z}'(t) &= (c_{36} + c_{45}) \psi_w(t), \\
2\psi'_u(t) \tilde{x}'(t) + \psi_u(t) \tilde{x}''(t) &= -2c_{11} \frac{\partial \psi_u}{\partial x} - (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial \psi_v}{\partial y} - c_{16} \frac{\partial \psi_u}{\partial y} - 2c_{16} \frac{\partial \psi_v}{\partial x}, \\
2\psi'_u(t) \tilde{y}'(t) + \psi_u(t) \tilde{y}''(t) &= -2c_{66} \frac{\partial \psi_u}{\partial y} - (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial \psi_v}{\partial x} - \\
-2c_{26} \frac{\partial \psi_v}{\partial y} - (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial \psi_w}{\partial z},
\end{aligned}$$

$$2\psi'_u(t)\tilde{z}'(t) + \psi_u(t)\tilde{z}''(t) = -2c_{55} \frac{\partial \psi_u}{\partial z} -$$

$$-(c_{13} + c_{55}) \frac{\partial \psi_w}{\partial x} - 2c_{15} \frac{\partial \psi_u}{\partial x} - (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial \psi_w}{\partial y} - 2c_{45} \frac{\partial \psi_v}{\partial z},$$

$$\tilde{x}^{12}(t) = c_{11} / \rho + c_{16} \psi_v(t) / (\rho \psi_u(t)),$$

$$\tilde{y}^{12}(t) = c_{26} \psi_v(t) / (\rho \psi_u(t)) + c_{66} / \rho,$$

$$\tilde{z}^{12}(t) = c_{45} \psi_v(t) / (\rho \psi_u(t)) + c_{55} / \rho.$$

Звідси

$$\tilde{x}'(t)\tilde{y}'(t) = (c_{12} + c_{66})\psi_v(t) / (2\rho\psi_u(t)) =$$

$$= \sqrt{c_{11} / \rho + c_{16}\psi_v(t) / (\rho\psi_u(t))} \sqrt{c_{26}\psi_v(t) / (\rho\psi_u(t)) + c_{66} / \rho},$$

$$\tilde{x}'(t)\tilde{z}'(t) = (c_{13} + c_{55})\psi_w(t) / (2\rho\psi_u(t)) =$$

$$= \sqrt{c_{11} / \rho + c_{16}\psi_v(t) / (\rho\psi_u(t))} \sqrt{c_{45}\psi_v(t) / (\rho\psi_u(t)) + c_{55} / \rho},$$

$$\tilde{y}'(t)\tilde{z}'(t) = (c_{36} + c_{45})\psi_w(t) / (2\rho\psi_u(t)) =$$

$$= \sqrt{c_{26}\psi_v(t) / (\rho\psi_u(t)) + c_{66} / \rho} \sqrt{c_{45}\psi_v(t) / (\rho\psi_u(t)) + c_{55} / \rho}.$$

Нехай $\psi_u(t) = \psi_u = const$. Тоді

$$(c_{12} + c_{66})^2 \psi_v^2 / (2\rho\psi_u)^2 = (c_{11} / \rho + c_{16}\psi_v / (\rho\psi_u))(c_{26}\psi_v / (\rho\psi_u) + c_{66} / \rho),$$

$$(c_{13} + c_{55})^2 \psi_w^2 / (2\rho\psi_u)^2 = (c_{11} / \rho + c_{16}\psi_v / (\rho\psi_u))(c_{45}\psi_v / (\rho\psi_u) + c_{55} / \rho),$$

$$(c_{36} + c_{45})^2 \psi_w^2 / (2\rho\psi_u)^2 = (c_{26}\psi_v / (\rho\psi_u) + c_{66} / \rho)(c_{45}\psi_v / (\rho\psi_u) + c_{55} / \rho),$$

$$(c_{12} + c_{66})^2 \psi_v^2 = 4(c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v)(c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u),$$

$$(c_{13} + c_{55})^2 \psi_w^2 = 4(c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v)(c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u),$$

$$(c_{36} + c_{45})^2 \psi_w^2 = 4(c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u)(c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u).$$

Наступне рівняння системи (5.72) запишеться у вигляді:

$$\rho\psi''_v(t)W(x, y, z, t) + 2\rho\psi'_v(t)W(x, y, z, t)G(x, y, z, t) +$$

$$+ \rho\psi_v(t)W(x, y, z, t)G^2(x, y, z, t) + \rho\psi_v(t)W(x, y, z, t) \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}''(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}^{12}(t) + \frac{g'(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2} \tilde{y}''(t) - \frac{g''(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2} \tilde{y}^{12}(t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \tilde{z}''(t) - \frac{g''(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \tilde{z}'^2(t) = \\
& = c_{66} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right)^2 + \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial x} - \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \\
& + c_{22} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right)^2 + \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z, \rho)}{\partial y} - \frac{g''(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \\
& + c_{44} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right) + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right)^2 + \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_z(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} - \frac{g''(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(\rho, t) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2c_{26} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) \right) + \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial y} + \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \\
& + (c_{12} + c_{66}) \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \right. \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial y} + \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \\
& + c_{16} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \right. \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right)^2 + \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial x} - \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_{26} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) \right) + \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right)^2 + \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z, \rho)}{\partial y} - \frac{g''(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \\
& + c_{45} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right) \right) + \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right)^2 + \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_z(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} - \frac{g''(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(\rho, t) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right) + \\
& + (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) \right) + \\
& + \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \\
& + \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} + \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (c_{23} + c_{44}) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) (\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2}) + \right. \\
& + \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) (\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}) (\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2}) + \\
& + \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} + \frac{g''(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} W(x, y, z, t) + \\
& \left. + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) (\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}) \right);
\end{aligned}$$

Далі проводимо аналогічні міркування. Коефіцієнти, що не містять $g^{(0)}$ дають рівняння:

$$\begin{aligned}
\rho \psi''_v(t) = & c_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) + c_{22} \left(\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + \\
& + c_{44} \left(\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) + 2c_{26} \left(\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + \\
& + (c_{12} + c_{66}) \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + c_{16} \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) \\
& + c_{26} \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + c_{45} \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) + \\
& + (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} \right) + (c_{23} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} \right).
\end{aligned} \tag{Б4.14}$$

Коефіцієнти при $\frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1}$:

$$\begin{aligned}
-\rho \psi_v(t) \tilde{x}^{\prime 2}(t, \rho) = & -c_{66} \psi_v(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 - c_{22} \psi_v(\rho, t) \xi_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho) - \\
& - c_{44} \psi_v(\rho, t) \xi_z(\tilde{x}(t, \rho), \rho) + 2c_{26} \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \\
& + (c_{12} + c_{66}) \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_{16}\psi_u(\rho, t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 - \\
& -c_{26}\psi_u(\rho, t)(\xi_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho)) - c_{45}\psi_u(\rho, t)\xi_z(\tilde{x}(t, \rho), \rho) + \\
& +(c_{36} + c_{45})\psi_w(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + \\
& -(c_{23} + c_{44})\psi_w(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial y}
\end{aligned} \tag{B4.15}$$

Коефіцієнти при $\frac{g''(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}$:

$$\begin{aligned}
& -\rho\psi_v(\rho, t)\tilde{y}'^2(t) = -c_{66}\psi_v(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 - c_{22}\psi_v(\rho, t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 - \\
& -c_{44}\psi_v(\rho, t)\xi_z(\tilde{y}(t, \rho), \rho) + 2c_{26}\psi_v(\rho, t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - \\
& -(c_{12} + c_{66})\psi_u(\rho, t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - c_{16}\psi_u(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 \\
& -c_{26}\psi_u(\rho, t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 - c_{45}\psi_u(\rho, t)\xi_z(\tilde{y}(t, \rho), \rho) + \\
& -(c_{36} + c_{45})\psi_w(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \\
& +(c_{23} + c_{44})\psi_w(\rho, t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}
\end{aligned} \tag{B4.16}$$

Коефіцієнти при $\frac{g''(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$-\rho\psi_u(t)\tilde{z}'^2(t) = -c_{66}\psi_v(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 - c_{22}\psi_v(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 - \tag{B4.17}$$

$$\begin{aligned}
& -c_{44}\psi_v(\rho, t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 - 2c_{26}\psi_v(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x} - \\
& -c_{16}\psi_u(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 - (c_{12} + c_{66})\psi_u(\rho, t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - \\
& -c_{26}\psi_u(\rho, t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 - c_{45}\psi_u(\rho, t)\xi_z(\tilde{z}(t, \rho), \rho) + \\
& -(c_{36} + c_{45})\psi_w(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \\
& +(c_{23} + c_{44})\psi_w(\rho, t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}
\end{aligned}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}$:

$$\begin{aligned}
2\rho W\psi_v(t)\tilde{x}'(t)\tilde{y}'(t) &= 2c_{66}\psi_v(t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}W + \\
& + 2c_{22}\psi_v(t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - 1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}W + \\
& + 2c_{44}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 + 2c_{26}\psi_v(t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right)W + \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + (c_{12} + c_{66})\psi_u(t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right)W + \right. \\
& + \left.\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + 2c_{16}\psi_u(t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}W + \\
& + 2c_{26}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - 1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + 2c_{45}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 + \\
& + (c_{36} + c_{45})\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right) + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + \\
& + (c_{23} + c_{44})\left(\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - 1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t, \rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{Б4.18}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
2\rho\psi_u(t)\tilde{x}'(t)\tilde{z}'(t) &= c_{66}2\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{z}(\cdot)+2c_{22}\psi_v(\cdot)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{z}(\cdot)+ \\
&+2c_{44}\psi_v(\cdot)\frac{\partial}{\partial z}\tilde{x}(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{z}(\cdot)-1\right)+2c_{26}\psi_v(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{z}(\cdot)+\frac{\partial}{\partial y}\tilde{z}(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\right)+ \\
&+(c_{12}+c_{66})\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{z}(\cdot)+\frac{\partial}{\partial y}\tilde{z}(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\right)+
\end{aligned}
\tag{Б4.19}$$

$$\begin{aligned}
&+c_{16}\psi_u(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{z}(\cdot)+2c_{26}\psi_u(\rho,t)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{z}(\cdot)+2c_{45}\psi_u(\cdot)\frac{\partial}{\partial z}\tilde{x}(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{z}(\cdot)-1\right)+ \\
&+(c_{36}+c_{45})\psi_w(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{z}(\cdot)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{z}(\cdot)-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{x}(\cdot)-1\right)\right)+ \\
&+(c_{23}+c_{44})\psi_w(\cdot)\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{x}(\cdot)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{z}(\cdot)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{z}(\cdot)-1\right)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{x}(\cdot)\right);
\end{aligned}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(y-\tilde{y}(t))}{\varepsilon_2} \frac{g'(z-\tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
2\rho W\psi_v(t)\tilde{y}'(t)\tilde{z}'(t) &= 2c_{66}\psi_v(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+ \\
&+2c_{22}\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+ \\
&+2c_{44}\psi_v(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)+ \\
&+2c_{26}\psi_v(\rho,t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+ \\
&+(c_{12}+c_{66})\psi_u(\rho,t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\times\right. \\
&\quad \times\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\left. +2c_{16}\psi_u(\rho,t)\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+2c_{26}\psi_u(\rho,t)\times \\
&\quad \times\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+2c_{45}\psi_u(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}+
\end{aligned}
\tag{Б4.20}$$

$$\begin{aligned}
& +(c_{36} + c_{45})\psi_w(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1\right) \times \right. \\
& \times \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \left. + (c_{23} + c_{44})\psi_w(\rho, t)\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1\right)\right); \tag{B4.21}
\end{aligned}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1}$:

$$\begin{aligned}
2\rho\psi'_v(t)\tilde{x}'(t) + \rho\psi_v(t)\tilde{x}''(t) &= c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)+\right. \\
& +\psi_v(\rho,t)\zeta_x(\tilde{x}(t,\rho),\rho))+ \\
& +c_{22}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\psi_v(\rho,t)\zeta_y(\tilde{x}(t,\rho),\rho)\right)+ \\
& +c_{44}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}+\psi_v(\rho,t)\zeta_z(\tilde{x}(t,\rho),\rho)\right) \\
& +2c_{26}\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)+\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\right.\right. \\
& \left.+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial x}\right)+\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+ \\
& + (c_{12} + c_{66})\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)+\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\right.\right. \\
& \left.+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial x}\right)+\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+ \\
& + (c_{36} + c_{45})\left(\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)+\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\right.\right. \\
& +c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)+\psi_u(\rho,t)\zeta_x(\tilde{x}(t,\rho),\rho)\right) \\
& +c_{26}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\psi_u(\rho,t)\zeta_y(\tilde{x}(t,\rho),\rho)\right)+ \\
& +c_{45}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}+\psi_u(\rho,t)\zeta_z(\tilde{x}(t,\rho),\rho)\right)+ \tag{B4.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \\
& + (c_{23} + c_{44}) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \psi_w(\rho, t) \zeta_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho) \right);
\end{aligned}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}$:

$$\begin{aligned}
2\rho \psi'_v(t) W \tilde{y}'(t) + \rho \psi_v(t) W \tilde{y}''(t) &= c_{66} \left(2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t) \zeta_x(\tilde{y}(t, \rho), \rho) \left. \right) + c_{22} \left(2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1 \right) + \psi_v(\rho, t) \zeta_y(\tilde{y}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + c_{44} \left(2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \psi_v(\rho, t) \zeta_z(\tilde{y}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + 2c_{26} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1 \right) \right) + \\
& + (c_{12} + c_{66}) \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1 \right) \right) + \\
& + c_{16} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_u(\rho, t) \zeta_x(\tilde{y}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + c_{26} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1 \right) + \psi_u(\rho, t) \zeta_y(\tilde{y}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + c_{45} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \psi_u(\rho, t) \zeta_z(\tilde{y}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \\
& + (c_{23} + c_{44}) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1 \right) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} \right) \right); \tag{Б4.23}
\end{aligned}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
2\rho\psi'_v(t)W\tilde{z}'(t) + \rho\psi_v(t)W\tilde{z}''(t) &= c_{66} \left(2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t) \zeta_x(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \left. \right) + c_{22} \left(2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \psi_v(\rho, t) \zeta_y(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + c_{44} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right) + \psi_u(\rho, t) \zeta_z(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + 2c_{26} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \\
& + (c_{12} + c_{66}) \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \\
& + c_{16} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_u(\rho, t) \zeta_x(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + c_{26} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \psi_u(\rho, t) \zeta_y(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_{45} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right) + \psi_u(\rho, t) \zeta_z(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right) \right) + \\
& + (c_{23} + c_{44}) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right) + \right. \\
& \left. + \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} \right) \right); \\
2\rho \psi'_v(t) W \tilde{z}'(t) + \rho \psi_v(t) W \tilde{z}''(t) & = c_{66} \left(2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \psi_v(\rho, t) \zeta_x(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) + c_{22} \left(2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \psi_v(\rho, t) \zeta_y(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + c_{44} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right) + \psi_u(\rho, t) \zeta_z(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + 2c_{26} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \\
& + (c_{12} + c_{66}) \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \\
& + c_{16} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_u(\rho, t) \zeta_x(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + c_{26} \left(2 \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \psi_u(\rho, t) \zeta_y(\tilde{z}(t, \rho), \rho) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\rho\psi'_v(t)W\tilde{z}'(t) + \rho\psi_v(t)W\tilde{z}''(t) = c_{66}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \right. \\
& + \psi_v(\rho,t)\zeta_x(\tilde{z}(t,\rho),\rho)) + c_{22}\left(2\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + \psi_v(\rho,t)\zeta_y(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right) + \\
& + c_{44}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} - 1\right) + \psi_u(\rho,t)\zeta_z(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right) + \\
& + 2c_{26}\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \left.\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial x}\right) + \frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + \\
& + (c_{12} + c_{66})\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& + \left.\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial x}\right) + \frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + \\
& + c_{16}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \psi_u(\rho,t)\zeta_x(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right) + \\
& + c_{26}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + \psi_u(\rho,t)\zeta_y(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right) +
\end{aligned}$$

(Б4.24)

$$\begin{aligned}
& + c_{45}\left(2\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} - 1\right) + \psi_u(\rho,t)\zeta_z(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right) + \\
& + (c_{36} + c_{45})\left(\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial x}\right) + \right. \\
& + \left.\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} - 1\right)\right) + \\
& + (c_{23} + c_{44})\left(\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} - 1\right) + \right. \\
& + \left.\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial y}\right)\right);
\end{aligned}$$

Звідси отримуємо наступну систему:

$$\left\{ \begin{aligned}
\rho \psi''_v(t) &= c_{66} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial z^2} + 2c_{26} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial y \partial x} + \\
&+ (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y \partial x} + c_{26} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y^2} + c_{45} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial z^2} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z \partial x} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z \partial y}, \\
\rho \tilde{x}''(t) &= c_{66}, \\
\rho \psi_v(t) \tilde{y}''(t) &= c_{22} \psi_v(t) + c_{26} \psi_u(t), \\
\rho \psi_v(t) \tilde{z}''(t) &= c_{44} \psi_v(t) + c_{45} \psi_u(t), \\
2\rho \psi_v(t) \tilde{x}'(t) \tilde{y}'(t) &= 2c_{26} \psi_v(t) + (c_{12} + c_{66}) \psi_u(t), \\
2\rho \psi_u(t) \tilde{x}'(t) \tilde{z}'(t) &= (c_{36} + c_{45}) \psi_w(t), \\
2\rho \psi_v(t) \tilde{y}'(t) \tilde{z}'(t) &= (c_{23} + c_{44}) \psi_w(t), \\
2\psi'_v(t) \tilde{x}'(t) + \psi_v(t) \tilde{x}''(t) &= -2c_{66} \frac{\partial \psi_v}{\partial x} - 2c_{26} \frac{\partial \psi_v}{\partial y} - (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial \psi_u}{\partial y} - \\
&- (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial \psi_w}{\partial z}, \\
2\psi'_v(t) \tilde{y}'(t) + \psi_v(t) \tilde{y}''(t) &= -2c_{22} \frac{\partial \psi_v}{\partial y} - 2c_{26} \frac{\partial \psi_v}{\partial x} - (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial \psi_u}{\partial x} - \\
&- 2c_{26} \frac{\partial \psi_u}{\partial y} - (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial \psi_w}{\partial z}, \\
2\psi'_v(t) \tilde{z}'(t) + \psi_v(t) \tilde{z}''(t) &= -(c_{36} + c_{45}) \frac{\partial \psi_w}{\partial x} - (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial \psi_w}{\partial y} - \\
&- 2c_{44} \frac{\partial \psi_v}{\partial z} - 2c_{45} \frac{\partial \psi_u}{\partial z}.
\end{aligned} \right.$$

Останнє рівняння системи (5.72) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\rho \psi''_w(t) W(x, y, z, t) + 2\rho \psi'_w(t) W(x, y, z, t) G(x, y, z, t) + \\
&+ \rho \psi_w(t) W(x, y, z, t) G^2(x, y, z, t) + \rho \psi_w(t) W(x, y, z, t) \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}''(t) - \right. \\
&- \frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}'^2(t) + \frac{g'(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2} \tilde{y}''(t) - \frac{g''(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2} \tilde{y}'^2(t) + \\
&+ \left. \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \tilde{z}''(t) - \frac{g''(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \tilde{z}'^2(t) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_{55} \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \right. \\
&+ \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right)^2 + \\
&+ \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial x} - \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right) + \\
&+ \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} W(x, y, z, t) + \\
&+ \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \\
&+ c_{44} \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \right. \\
&+ \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right)^2 + \\
&+ \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z, \rho)}{\partial y} - \frac{g''(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right) + \\
&+ \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} W(x, y, z, t) + \\
&+ \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \\
&+ c_{33} \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right) + \right. \\
&+ \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right)^2 + \\
&+ \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_z(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} - \frac{g''(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(\rho, t) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right) + \\
&+ \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} W(x, y, z, t) + \\
&+ \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(\rho, t))}{\varepsilon_3} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2c_{45} \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \right. \\
& + \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \psi_w(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial y} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) \right) + \\
& + (c_{13} + c_{55}) \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \right. \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} + \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} W(x, y, z, t) + \\
& \left. + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \right) + \\
& + (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \right. \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \\
& + \psi_u(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} + \frac{g''(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} W(x, y, z, t) + \\
& \left. + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \left(\Phi_x(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \right) + \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_x(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} + \frac{g''(x - \tilde{x}(t, \rho))}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} W(x, y, z, t) + \\
& + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) + \\
& + (c_{23} + c_{44}) \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} W(x, y, z, t) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \right. \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \left(\Phi_y(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \right) + \\
& + \psi_v(\rho, t) W(x, y, z, t) \left(\frac{\partial \Phi_y(t, x, y, z, \rho)}{\partial z} + \frac{g''(y - \tilde{y}(t, \rho))}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} W(x, y, z, t) + \\
& \left. + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} W(x, y, z, t) \left(\Phi_z(t, x, y, z, \rho) - \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3} \right) \right).
\end{aligned}$$

Проводимо аналогічні процедури для останнього рівняння. Коефіцієнти, що не містять $g()$ дають рівняння:

$$\begin{aligned}
\rho \psi_w''(t) = & c_{55} \left(\frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) + \\
& + c_{44} \left(\frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + c_{33} \left(\frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) + \\
& + 2c_{45} \left(\frac{\partial^2 \psi_w}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + (c_{13} + c_{55}) \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} \right) + \\
& + (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} \right) + (c_{36} + c_{45}) \left(\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} \right) + \\
& + (c_{23} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} \right).
\end{aligned} \tag{Б4.25}$$

Коефіцієнти при $\frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1}$:

$$\begin{aligned}
-\rho\psi_w(t)\tilde{x}^{\prime 2}(t) &= -c_{55}\psi_w(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + c_{44}\psi_w(\rho,t)\xi_y(\tilde{x}(t,\rho),\rho) + \\
&+ c_{33}\psi_w(\rho,t)\xi_z(\tilde{x}(t,\rho),\rho) + 2c_{45}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + \\
&+ (c_{13} + c_{55})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + \\
&- (c_{36} + c_{45})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial y} - \\
&+ (c_{45} + c_{36})\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) - \\
&- (c_{23} + c_{44})\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{Б4.26}$$

Коефіцієнти при $\frac{g''(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}$:

$$\begin{aligned}
-\rho\psi_w(t)W\tilde{y}^{\prime 2}(t) &= -c_{55}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 - \\
&- c_{44}\psi_w(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 - c_{33}\psi_w(\rho,t)\xi_z(\tilde{y}(t,\rho),\rho) + \\
&+ 2c_{45}\psi_w(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - \\
&- (c_{13} + c_{55})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \\
&+ (c_{36} + c_{45})\psi_u(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z} + \\
&- (c_{45} + c_{36})\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \\
&+ (c_{23} + c_{44})\psi_v(\rho,t)\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z};
\end{aligned} \tag{Б4.27}$$

Коефіцієнти при $\frac{g''(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
\rho \psi_w(t) W \tilde{z}''^2(t) &= c_{55} \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \\
&+ c_{44} \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 + c_{33} \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right)^2 + \\
&+ 2c_{45} \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + c_{15} \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \\
&+ (c_{13} + c_{55}) \psi_u(\rho, t) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right) + \\
&+ (c_{36} + c_{45}) \psi_u(\rho, t) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right) + \\
&+ (c_{45} + c_{36}) \psi_v(\rho, t) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right) + \\
&+ (c_{23} + c_{44}) \psi_v(\rho, t) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right);
\end{aligned} \tag{B4.28}$$

Коефіцієнти при $\frac{(g'(x - \tilde{x}(t)))^2}{(\varepsilon_1)^2}$:

$$\begin{aligned}
-\rho \psi_w(t) \tilde{x}''^2(t) &= -c_{55} \psi_w(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + c_{44} \psi_w(\rho, t) \xi_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho) + \\
&+ c_{33} \psi_w(\rho, t) \xi_z(\tilde{x}(t, \rho), \rho) + 2c_{45} \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \\
&- c_{15} \psi_u(\rho, t) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + (c_{13} + c_{55}) \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - \right. \\
&- \left. \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - (c_{36} + c_{45}) \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \\
&+ (c_{45} + c_{36}) \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \\
&- (c_{23} + c_{44}) \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{B4.29}$$

Коефіцієнти при $\frac{(g'(y - \tilde{y}(t)))^2}{(\varepsilon_2)^2}$:

$$\begin{aligned}
\rho\psi_w(t)W\tilde{y}'^2(t) &= c_{55}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \\
&+ c_{44}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)^2 + c_{33}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 + \\
&+ 2c_{45}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} + \\
&+ c_{15}\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + (c_{13} + c_{55})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial z} + \\
&+ (c_{36} + c_{45})\psi_v(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right) + \\
&+ (c_{45} + c_{36})\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial z} + \\
&+ (c_{23} + c_{44})\psi_v(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right);
\end{aligned} \tag{B4.30}$$

Коефіцієнти при $\frac{(g'(z - \tilde{z}(t)))^2}{(\varepsilon_3)^2}$:

$$\begin{aligned}
\rho\psi_w(t)W\tilde{z}'^2(t) &= c_{55}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \\
&+ c_{44}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 + c_{33}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)^2 + \\
&+ 2c_{45}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x} + c_{15}\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \\
&+ (c_{13} + c_{55})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial z} + (c_{36} + c_{45})\psi_u(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} \times \\
&\times \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right) + (c_{45} + c_{36})\psi_v(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right) + \\
&+ (c_{23} + c_{44})\psi_v(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right);
\end{aligned} \tag{B4.31}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}$:

$$\begin{aligned}
& 2\rho\psi_w(t)\tilde{x}'(t)\tilde{y}'(t) = 2c_{55}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \\
& + 2c_{44}\psi_w(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - 1\right) + \\
& + 2c_{33}\psi_w(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 + \\
& + 2c_{45}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - \right. \right. \\
& \left. \left. - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right)\right) + (c_{13} + c_{55})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right)\right) + (c_{36} + c_{45})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho) \times \right. \\
& \left. \times \frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - 1\right) + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right) + \\
& + (c_{45} + c_{36})\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 1\right)\right) + (c_{23} + c_{44})\psi_v(\rho,t) \times \\
& \times \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} - 1\right) + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right);
\end{aligned} \tag{B4.32}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1} \frac{g'(z - \tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
2\rho W\psi_w(t)\tilde{x}'(t)\tilde{z}'(t) &= c_{55}2\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+ \\
&+2c_{44}\psi_w(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+2c_{33}\psi_w(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\times \\
&\times\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)+2c_{45}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+ \right. \\
&+ \left.\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-1\right)\right)+(c_{13}+c_{55})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\times \right. \\
&\times \left.\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)+ \\
&+(c_{36}+c_{45})\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}- \right. \right. \\
&- \left. \left. 1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)+ \\
&+(c_{45}+c_{36})\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}- \right. \right. \\
&- \left. \left. 1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+ \\
&+(c_{23}+c_{44})\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}- \right. \right. \\
&- \left. \left. 1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{x}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\tag{B4.33}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(y-\tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(z-\tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
2\rho W\psi_w(t)\tilde{y}'(t)\tilde{z}'(t) &= 2c_{55}\psi_w(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+2c_{44}\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}- \right. \\
&- \left. 1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+2c_{33}\psi_w(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)+ \\
&+2c_{45}\psi_w(\rho,t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+ \\
&+2c_{15}\psi_u(\rho,t)\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(c_{13} + c_{55})\psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - \right. \right. \\
& \left. \left. -1 \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \\
& +(c_{36} + c_{45})\psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - \right. \right. \\
& \left. \left. -1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1 \right) \right) + \\
& +(c_{45} + c_{36})\psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - \right. \right. \\
& \left. \left. -1 \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \\
& +(c_{23} + c_{44})\psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - \right. \right. \\
& \left. \left. -1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1 \right) \right).
\end{aligned} \tag{Б4.34}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon_1}$:

$$\begin{aligned}
& 2\rho\psi'_w(t)W\tilde{x}'(t) + \rho\psi_w(t)W\tilde{x}''(t) = c_{55} \left(2 \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} - 1 \right) + \right. \\
& \left. + \psi_w(\rho, t) \zeta_x(\tilde{x}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + c_{44} \left(2 \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \psi_w(\rho, t) \zeta_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho) \right) + \\
& + c_{33} \left(2 \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \psi_w(\rho, t) \zeta_z(\tilde{x}(t, \rho), \rho) \right) \\
& + 2c_{45} \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} - 1 \right) + \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(c_{13} + c_{55})\left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} - 1\right) + \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x}\right) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \\
& +(c_{36} + c_{45})\left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \psi_u(\rho, t) \zeta_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho)\right) + (c_{45} + c_{36})\left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} - 1\right) + \right. \\
& \left. + \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x}\right) + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \\
& +(c_{23} + c_{44})\left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{x}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \psi_v(\rho, t) \zeta_y(\tilde{x}(t, \rho), \rho)\right). \tag{B4.35}
\end{aligned}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(y - \tilde{y}(t))}{\varepsilon_2}$:

$$\begin{aligned}
2\rho \psi'_w(t) W \tilde{y}'(t) + \rho \psi_w(t) W \tilde{y}''(t) &= c_{55} \left(2 \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \psi_w(\rho, t) \zeta_x(\tilde{y}(t, \rho), \rho)\right) + c_{44} \left(2 \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1\right) + \right. \\
& \left. + \psi_w(\rho, t) \zeta_y(\tilde{y}(t, \rho), \rho)\right) + c_{33} \left(2 \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \psi_w(\rho, t) \zeta_z(\tilde{y}(t, \rho), \rho)\right) + \\
& + 2c_{45} \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_w(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x}\right) + \frac{\partial \psi_w}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1\right)\right) + \\
& +(c_{13} + c_{55})\left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_u(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x}\right) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \\
& +(c_{36} + c_{45})\left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} - 1\right) + \frac{\partial \psi_u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{y}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \psi_u(\rho, t) \zeta_y(\tilde{y}(t, \rho), \rho)\right). \tag{B4.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial y}\right)+ \\
& +(c_{45}+c_{36})\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial x}\right)+\right. \\
& \left.+\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+ \\
& +(c_{23}+c_{44})\left(\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)+\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}+\right. \\
& \left.+\psi_v(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{y}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial y}\right)\right).
\end{aligned}$$

Коефіцієнти при $\frac{g'(z-\tilde{z}(t))}{\varepsilon_3}$:

$$\begin{aligned}
2\rho\psi'_w(t)W\tilde{z}'(t)+\rho\psi_w(t)W\tilde{z}''(t) & =c_{55}\left(2\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\right. \\
& +\psi_w(\rho,t)\zeta_x(\tilde{z}(t,\rho),\rho))+ \\
& +c_{44}\left(2\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\psi_w(\rho,t)\zeta_y(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right)+ \\
& +c_{33}\left(2\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)+\psi_w(\rho,t)\zeta_z(\tilde{z}(t,\rho),\rho)\right)+ \\
& +2c_{45}\left(\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\psi_w(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\right.\right. \\
& \left.+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial x}\right)+\frac{\partial\psi_w}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+ \\
& +(c_{13}+c_{55})\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}+\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\right.\right. \\
& \left.+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial x}\right)+\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)+ \\
& +(c_{36}+c_{45})\left(\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial\psi_u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}-1\right)+\right. \\
& \left.+\psi_u(\rho,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{z}(t,\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial z\partial y}\right)\right)+
\end{aligned}$$

(B4.37)

$$\begin{aligned}
& + (c_{45} + c_{36}) \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right) \right) + \\
& + (c_{23} + c_{44}) \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} - 1 \right) + \right. \\
& \left. + \psi_v(\rho, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{z}(t, \rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial y} \right) \right).
\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
\rho \psi_w''(t) &= c_{55} \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial y^2} + c_{33} \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial y \partial x} + \\
& + c_{15} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial z \partial x} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial z \partial y} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial z \partial x} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial z \partial y},
\end{aligned}$$

$$\rho \psi_w(t) \tilde{x}''(t) = c_{55} \psi_w(t) + c_{15} \psi_u(t),$$

$$\rho \psi_w(t) \tilde{y}''(t) = c_{44} \psi_w(t),$$

$$\rho \psi_w(t) \tilde{z}''(t) = c_{33} \psi_w(t),$$

$$\rho \psi_w(t) \tilde{x}'(t) \tilde{y}'(t) = c_{45} \psi_w(t),$$

$$2\rho \psi_w(t) \tilde{x}'(t) \tilde{z}'(t) = (c_{13} + c_{55}) \psi_u(t) + (c_{36} + c_{45}) \psi_v(t),$$

$$2\rho \psi_w(t) \tilde{y}'(t) \tilde{z}'(t) = (c_{36} + c_{45}) \psi_u(t) + (c_{23} + c_{44}) \psi_v(t),$$

$$2\rho \psi_w'(t) \tilde{x}'(t) + \rho \psi_w(t) W \tilde{x}''(t) = -2c_{55} \frac{\partial \psi_w}{\partial x} - 2c_{45} \frac{\partial \psi_w}{\partial y} -$$

$$-2c_{15} \frac{\partial \psi_u}{\partial x} - (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial \psi_u}{\partial z} - (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial \psi_v}{\partial z},$$

$$2\rho \psi_w'(t) \tilde{y}'(t) + \rho \psi_w(t) \tilde{y}''(t) = -2c_{44} \frac{\partial \psi_w}{\partial y} - 2c_{45} \frac{\partial \psi_w}{\partial x} -$$

$$-(c_{36} + c_{45}) \frac{\partial \psi_u}{\partial z} - (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial \psi_v}{\partial z},$$

$$2\rho \psi_w'(t) \tilde{z}'(t) + \rho \psi_w(t) \tilde{z}''(t) = -2c_{33} \frac{\partial \psi_w}{\partial z} - (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial \psi_u}{\partial x} -$$

$$-(c_{36} + c_{45}) \frac{\partial \psi_u}{\partial y} - (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial \psi_v}{\partial x} - (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial \psi_v}{\partial y}.$$

Додаток Б5 Існування розв'язку характеристичної системи рівнянь

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \psi_u \alpha \widehat{C}_1 = \tilde{c}_{11} \psi_u + \tilde{c}_{16} \psi_v + \tilde{c}_{15} \psi_w + \varepsilon_1, \\ \psi_u \beta \widehat{C}_2 = \tilde{c}_{26} \psi_v + \tilde{c}_{66} \psi_u + \tilde{c}_{46} \psi_w + \varepsilon_2, \\ \psi_u \gamma \widehat{C}_3 = \tilde{c}_{45} \psi_v + \tilde{c}_{55} \psi_u + \tilde{c}_{35} \psi_w + \varepsilon_3, \\ \psi_u (\alpha \widehat{C}_1 + \beta \widehat{C}_2) = 2\tilde{c}_{16} \psi_u + (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) \psi_v + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \psi_w + \varepsilon_4, \\ \psi_u (\alpha \widehat{C}_1 + \gamma \widehat{C}_3) = (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \psi_w + 2\tilde{c}_{15} \psi_u + (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \psi_v + \varepsilon_5, \\ \psi_u (\beta \widehat{C}_2 + \gamma \widehat{C}_3) = 2\tilde{c}_{56} \psi_u + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \psi_v + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_w + \varepsilon_6. \end{cases} \quad (\text{Б5.1})$$

$$\begin{aligned} \psi_v \alpha \widehat{C}_1 &= \tilde{c}_{16} \psi_u + \tilde{c}_{66} \psi_v + \tilde{c}_{56} \psi_w + \varepsilon_7, \\ \psi_v \beta \widehat{C}_2 &= \tilde{c}_{26} \psi_u + \tilde{c}_{22} \psi_v + \tilde{c}_{24} \psi_w + \varepsilon_8, \\ \psi_v \gamma \widehat{C}_3 &= \tilde{c}_{45} \psi_u + \tilde{c}_{44} \psi_v + \tilde{c}_{34} \psi_w + \varepsilon_9, \\ \psi_v (\alpha \widehat{C}_1 + \beta \widehat{C}_2) &= (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) \psi_u + 2\tilde{c}_{26} \psi_v + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \psi_w + \varepsilon_{10}, \\ \begin{cases} \psi_v (\alpha \widehat{C}_1 + \gamma \widehat{C}_3) = (\tilde{c}_{56} + \tilde{c}_{14}) \psi_u + 2\tilde{c}_{46} \psi_v + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_w + \varepsilon_{11}, \\ \psi_v (\beta \widehat{C}_2 + \gamma \widehat{C}_3) = (\tilde{c}_{25} + \tilde{c}_{46}) \psi_u + 2\tilde{c}_{24} \psi_v + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) \psi_w + \varepsilon_{12}. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{Б5.2})$$

$$\begin{cases} \psi_w \alpha \widehat{C}_1 = \tilde{c}_{15} \psi_u + \tilde{c}_{56} \psi_v + \tilde{c}_{55} \psi_w + \varepsilon_{13}, \\ \psi_w \beta \widehat{C}_2 = \tilde{c}_{46} \psi_u + \tilde{c}_{24} \psi_v + \tilde{c}_{44} \psi_w + \varepsilon_{14}, \\ \psi_w \gamma \widehat{C}_3 = \tilde{c}_{35} \psi_u + \tilde{c}_{34} \psi_v + \tilde{c}_{33} \psi_w + \varepsilon_{15}, \\ \psi_w (\alpha \widehat{C}_1 + \beta \widehat{C}_2) = (\tilde{c}_{14} + \tilde{c}_{56}) \psi_u + (\tilde{c}_{46} + \tilde{c}_{25}) \psi_v + 2\tilde{c}_{45} \psi_w + \varepsilon_{16}, \\ \psi_w (\alpha \widehat{C}_1 + \gamma \widehat{C}_3) = (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \psi_u + (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_v + 2\tilde{c}_{35} \psi_w + \varepsilon_{17}, \\ \psi_w (\beta \widehat{C}_2 + \gamma \widehat{C}_3) = (\tilde{c}_{36} + \tilde{c}_{45}) \psi_u + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) \psi_v + 2\tilde{c}_{34} \psi_w + \varepsilon_{18}. \end{cases} \quad (\text{Б5.3})$$

Для визначення її сумісності досить перевірити ранг матриці. Покажемо, що ранг матриці системи (Б5.1)-(Б5.3) рівний кількості рівнянь системи. Сама матриця має вигляд:

$$c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13} \quad c_{14} \quad c_{15} \quad c_{16} \quad c_{22} \quad c_{23} \quad c_{24} \quad c_{25} \quad c_{26} \quad c_{33} \quad c_{34} \quad c_{35} \quad c_{36} \quad c_{44} \quad c_{45} \quad c_{46} \quad c_{55} \quad c_{56} \quad c_{66} \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3$$

ψ_u	0	0	0	ψ_w	ψ_v	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\alpha\psi_u$	0	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	ψ_u	0	$-\beta\psi_u$	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	ψ_v	0	ψ_u	0	0	0	0	$-\gamma\psi_u$	
0	ψ_v	0	ψ_w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	ψ_v	$-\alpha\psi_u$	$-\beta\psi_u$	0	
0	0	ψ_w	ψ_v	$2\psi_u$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	ψ_v	0	$-\alpha\psi_u$	0	$-\gamma\psi_u$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	ψ_w	0	ψ_w	ψ_v	0	$2\psi_u$	0	0	$-\beta\psi_u$	$-\gamma\psi_u$	
0	0	0	0	0	ψ_u	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	ψ_v	$-\alpha\psi_v$	0	0	
0	0	0	0	0	0	ψ_v	0	ψ_w	0	ψ_u	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\beta\psi_v$	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	ψ_v	ψ_u	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_v$	
0	ψ_u	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	$2\psi_v$	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	ψ_u	$-\alpha\psi_v$	$-\beta\psi_v$	0
0	0	0	ψ_u	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	ψ_w	$2\psi_v$	0	ψ_u	0	$-\alpha\psi_v$	0	$-\gamma\psi_v$	
0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	$2\psi_v$	ψ_u	0	0	0	0	ψ_w	0	ψ_u	0	0	0	0	0	$-\beta\psi_v$	$-\gamma\psi_v$	
0	0	0	0	ψ_u	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	ψ_v	0	$-\alpha\psi_w$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	ψ_u	0	0	0	0	$-\beta\psi_w$	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	ψ_v	ψ_u	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_w$	
0	0	0	ψ_u	0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	0	$2\psi_w$	ψ_v	0	ψ_u	0	$-\alpha\psi_w$	$-\beta\psi_w$	0	
0	0	ψ_u	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2\psi_w$	ψ_v	0	ψ_v	0	ψ_u	0	0	$-\alpha\psi_w$	0	$-\gamma\psi_w$	
0	0	0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	$2\psi_w$	0	ψ_u	ψ_v	ψ_u	0	0	0	0	0	$-\beta\psi_w$	$-\gamma\psi_w$	

Розглянемо мінор, який визначається стовпчиками 3 номерами: 1,11,14,2,3,10,6,7,13,18,4,8,5,9,12,20,22,24 .

ψ_u	0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	$-\alpha\psi_u$	0							
0	ψ_v	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	0	0	0	0	0							
0	0	ψ_w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_u$						
0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	0	ψ_w	$-\alpha\psi_u$	0							
0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	0	0	ψ_v	0	$2\psi_u$	0	0	ψ_v	$-\alpha\psi_u$	$-\gamma\psi_u$							
0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	$2\psi_u$	0	$-\gamma\psi_u$							
0	0	0	0	0	0	ψ_u	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	$-\alpha\psi_v$	0							
0	ψ_u	0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	0							
0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_v$						
0	$2\psi_v$	0	ψ_u	0	ψ_w	0	0	0	ψ_w	0	0	0	0	0	0	0	$-\alpha\psi_v$	0						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2\psi_v$	ψ_u	0	0	0	0	0	ψ_u	$-\alpha\psi_v$	$-\gamma\psi_v$						
0	0	0	0	0	0	ψ_u	0	0	0	ψ_u	0	ψ_w	0	$2\psi_v$	0	0	0	$-\gamma\psi_v$						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_u	0	0	ψ_v	$-\alpha\psi_w$	0							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_u	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0							
0	0	ψ_u	0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	$-\gamma\psi_w$							
0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	ψ_v	ψ_u	0	0	0	0	ψ_u	$-\alpha\psi_w$	0							
0	0	$2\psi_w$	0	ψ_u	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\alpha\psi_w$	$-\gamma\psi_w$						
0	0	0	0	0	0	0	0	$2\psi_w$	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_w$						

Покажемо, що визначник цього мінора відмінний від 0. Можемо

застосувати стандартну процедуру обнулення елементів під головною діагоналлю. Після виконання відповідних перетворень для перших 10 елементів отримаємо визначник, зображений в таб.1.

Випишемо окремо для зручності підматрицю виду:

$-2\psi_u$	0	0	0	0	0	χ	$-\gamma\psi_v + \gamma\psi_u$
$-2\psi_u^2 / \psi_v$	ψ_w	0	$2\psi_v$	0	0	0	$-\gamma\psi_v + \gamma\psi_u^2 / \psi_v$
ψ_v	0	ψ_u	0	0	0	$-\alpha\psi_w$	0
$-3\psi_u^2 / 2\psi_v$	0	0	ψ_v	0	$-\psi_u^2 / 2\psi_v$	$(-\alpha\psi_v + \alpha\psi_u^2 / \psi_v)\psi_u / 2\psi_w$	$-\gamma\psi_u^2 / 2\psi_v$
0	0	0	0	ψ_w	0	0	$-\gamma\psi_w + \gamma\psi_u^2 / \psi_w + \gamma\psi_v^2 / \psi_w$
$-\psi_u$	0	0	0	0	ψ_u	$-\alpha\psi_w$	$\gamma\psi_u$
$-\psi_v\psi_u / \psi_w$	0	$-2\psi_u^2 / \psi_w$	0	0	$-\psi_v\psi_u / \psi_w$	$-\alpha\psi_w + \alpha\psi_u^2 / \psi_w$	$-\gamma\psi_w + 2\gamma\psi_u + \gamma\psi_u^2 / \psi_w$
0	ψ_v	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_w + 2\gamma\psi_v$

Будемо виконувати подальші перетворення. Позначимо

$$\chi = -\alpha\psi_w + \frac{-\alpha\psi_v^2 + \alpha\psi_u^2}{\psi_w}.$$

Після обнулення елементів під головною

діагоналлю отримаємо матрицю виду:

$-2\psi_u$	0	0	0	0	0	χ	$\gamma\psi_u - \gamma\psi_v$
0	ψ_w	0	$2\psi_v$	0	0	$-\frac{\psi_u\chi}{\psi_v}$	0
0	0	ψ_u	0	0	0	$-\alpha\psi_w + \frac{\psi_v\chi}{2\psi_u}$	$\frac{\gamma\psi_v}{2} - \frac{\gamma\psi_v^2}{2\psi_u}$
0	0	0	ψ_v	0	$-\psi_u^2 / 2\psi_v$	$(-\alpha\psi_v + \alpha\psi_u^2 / \psi_v)\psi_u / 2\psi_w - \frac{3\psi_u\chi}{2\psi_v}$	$-\gamma\psi_u^2 / 2\psi_v - \frac{3\psi_u(\gamma\psi_u - \gamma\psi_v)}{4\psi_v}$
0	0	0	0	ψ_w	0	0	$-\gamma\psi_w + \gamma\psi_u^2 / \psi_w + \gamma\psi_v^2 / \psi_w$
0	0	0	0	0	ψ_u	$-\alpha\psi_w - \frac{\chi}{2}$	$(\gamma\psi_u + \gamma\psi_v) / 2$
0	0	0	0	0	0	$-\alpha\psi_w + \alpha\psi_u^2 / \psi_w - 2\alpha\psi_u - \alpha\psi_v$	$-\gamma\psi_w + 2\gamma\psi_u + \gamma\psi_u^2 / \psi_w + \frac{\gamma\psi_u\psi_v}{\psi_w}$
0	0	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_w + 2\gamma\psi_v - \frac{2\gamma\psi_u^2}{\psi_w} + \frac{2\gamma\psi_u\psi_v}{\psi_w} - \frac{((-\alpha\psi_v + \frac{\alpha\psi_u^2}{\psi_v})\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_w^2} - \frac{5\psi_u\chi}{2\psi_w} - \alpha\psi_u)(-\gamma\psi_w + 2\gamma\psi_u + \gamma\psi_u^2 / \psi_w + \frac{\gamma\psi_u\psi_v}{\psi_w})}{-\alpha\psi_w + \alpha\psi_u^2 / \psi_w - 2\alpha\psi_u - \alpha\psi_v}$

ψ_u	0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	$-\alpha\psi_u$	0
0	ψ_v	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	ψ_w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_u$
0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	ψ_w	$-\alpha\psi_u$	0	
0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	0	0	ψ_v	0	$2\psi_u$	0	0	ψ_v	$-\alpha\psi_u$	$-\gamma\psi_u$
0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	ψ_v	$2\psi_u$	0	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_u$
0	0	0	0	0	0	ψ_u	0	0	0	ψ_w	0	0	0	0	0	$-\alpha\psi_v$	0
0	0	0	0	0	0	0	ψ_v	0	$-\psi_w\psi_u/\psi_v$	0	0	0	ψ_w	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_v$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-2\psi_w$	$-3\psi_w\psi_u/\psi_v$	0	0	0	$-\psi_w\psi_u/\psi_v$	$-\alpha\psi_v + \alpha\psi_u\psi_u/\psi_v$	$\gamma\psi_u\psi_w/\psi_v$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-2\psi_u$	0	0	0	0	$-\alpha\psi_v + \frac{-\alpha\psi_v\psi_v + \alpha\psi_u\psi_u}{\psi_w}$	$-\gamma\psi_v + \gamma\psi_u$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-2\psi_u\psi_u/\psi_v$	ψ_w	0	$2\psi_v$	0	0	0	$-\gamma\psi_v + \gamma\psi_u\psi_u/\psi_v$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_v	0	ψ_u	0	0	0	$-\alpha\psi_w$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-3\psi_u\psi_u/2\psi_v$	0	0	ψ_v	0	$-\psi_u\psi_u/2\psi_v$	$(-\alpha\psi_v + \alpha\psi_u\psi_u/\psi_v)\psi_u/2\psi_w$	$-\gamma\psi_u\psi_u/2\psi_v$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_w	0	0	0	$-\gamma\psi_w + \gamma\psi_u\psi_u/\psi_w + \gamma\psi_v\psi_v/\psi_w$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\psi_u$	0	0	0	ψ_u	$-\alpha\psi_w$	$\gamma\psi_u$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\psi_v\psi_u/\psi_w$	0	$-2\psi_u\psi_u/\psi_w$	0	0	$-\psi_v\psi_u/\psi_w$	$-\alpha\psi_w + \alpha\psi_u\psi_u/\psi_w$	$-\gamma\psi_w + 2\gamma\psi_u + \gamma\psi_u\psi_u/\psi_w$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ψ_v	0	0	0	0	0	$-\gamma\psi_w + 2\gamma\psi_v$

Таб.1

Таким чином, визначник вихідної матриці рівний:

$$\begin{aligned}
& 4\psi_u^5 \psi_v^5 \psi_w^6 \left((-\gamma\psi_w + 2\gamma\psi_v - \frac{2\gamma\psi_u^2}{\psi_w} + \frac{2\gamma\psi_u\psi_v}{\psi_w}) (-\alpha\psi_w + \alpha\psi_u^2/\psi_w - 2\alpha\psi_u - \alpha\psi_v) - \right. \\
& \left. - \left((-\alpha\psi_v + \frac{\alpha\psi_u^2}{\psi_v}) \frac{\psi_u\psi_v}{\psi_w^2} - \frac{5\psi_u\chi}{2\psi_w} - \alpha\psi_u \right) (-\gamma\psi_w + 2\gamma\psi_u + \gamma\psi_u^2/\psi_w + \frac{\gamma\psi_u\psi_v}{\psi_w}) \right) = \\
& = 2\psi_u^5 \psi_v^5 \psi_w^3 (2\psi_w^5 + 6\psi_w^3 \psi_u^2 - 4\psi_w^3 \psi_v^2 - 6\psi_u \psi_w^4 - 2\psi_v \psi_w^4 - 7\psi_u \psi_v \psi_w^3 + \\
& + 2\psi_u^2 \psi_w^2 \psi_v - \psi_u \psi_v^2 \psi_w^2 + 7\psi_u^3 \psi_w^2 - \psi_u^3 \psi_v \psi_w + 3\psi_u^4 \psi_v - 3\psi_u^2 \psi_v^2 \psi_w + 3\psi_u^5 - 3\psi_u^3 \psi_v^2 - \\
& - 3\psi_u^2 \psi_v^3 - 5\psi_u^5 \psi_v \psi_w^2 - 5\psi_u^5 \psi_v^2 \psi_w + 5\psi_u^7 \psi_w).
\end{aligned}$$

Бачимо, що він відмінний від нуля, зокрема, при виконанні умов: $\psi_u \neq 0$, $\psi_v \neq 0$, $\psi_w \neq 0$.

$$\begin{aligned}
& 2\psi_w^5 + 6\psi_w^3 \psi_u^2 - 4\psi_w^3 \psi_v^2 - 6\psi_u \psi_w^4 - 2\psi_v \psi_w^4 - 7\psi_u \psi_v \psi_w^3 + 2\psi_u^2 \psi_w^2 \psi_v - \\
& - \psi_u \psi_v^2 \psi_w^2 + 7\psi_u^3 \psi_w^2 - \psi_u^3 \psi_v \psi_w + 3\psi_u^4 \psi_v - 3\psi_u^2 \psi_v^2 \psi_w + \\
& + 3\psi_u^5 - 3\psi_u^3 \psi_v^2 - 3\psi_u^2 \psi_v^3 - 5\psi_u^5 \psi_v \psi_w^2 - 5\psi_u^5 \psi_v^2 \psi_w + 5\psi_u^7 \psi_w \neq 0
\end{aligned} \tag{Б5.4}$$

Отже, показали, що ранг матриці системи (Г.1)-(Г.3) рівний кількості рівнянь що показує сумісність системи та існування її розв'язку.

Додаток В Загальноприйнятї визначення та твердження

Додаток В.1 Проблема моментів та її розв'язок у степеневому випадку.

Означення 1. Система функцій $u_k(t)$ утворює систему Чебишева на

інтервалі $[a, b]$ (Т-систему), якщо кожний многочлен $P(t) = \sum_0^n \alpha_k u_k(t)$ ($\sum_0^n \alpha_k^2 > 0$)

має на $[a, b]$ не більше n коренів.

Неважко побачити, що функції $\{u_k(t)\}_0^n$ утворюють систему Чебишева на $[a, b]$ тоді і тільки тоді коли визначник виду

$$\Delta \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \det \|u_0(t_j)u_1(t_j)\dots u_n(t_j)\|_{j=0}^n \quad (\text{B.1})$$

відмінний від нуля для довільних $t_0, t_1, \dots, t_n \in [a, b]$.

Означення 2. Система функцій $u_k(t)$, що утворює Т систему інтервалі $[a, b]$, утворює T^+ систему, якщо визначник (6.1) набуває знак $+$ при всіх значеннях $t_0 <$

$t_1 < \dots < t_n$, $t_0 \geq a$, $t_n \leq b$ якщо кожний многочлен $P(t) = \sum_0^n \alpha_k u_k(t)$ ($\sum_0^n \alpha_k^2 > 0$) має на

$[a, b]$ не більше n коренів.

Можна навести приклади T^+ систем.

Приклад 1. Система функцій $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ на інтервалі $[a, b]$.

Невід'ємність визначника (6.1) легко перевірити за допомогою формули для визначника Вандермонда.

Приклад 2. $\{\frac{1}{t + \alpha_0}, \frac{1}{t + \alpha_1}, \dots, \frac{1}{t + \alpha_n}\}$ на інтервалі $[a, b]$.

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n, a + \alpha_0 > 0.$$

Приклад 3. $\{e^{\alpha_0 t}, e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_n t}\}$ на інтервалі $[a, b]$.

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n.$$

Приклад 4. $\{t^{\alpha_0}, t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_n}\}$ на інтервалі $[a, b]$, $a > 0$.

Позначимо через P^n - клас многочленів виду $\sum_0^n \alpha_k u_k(t)$, P_+^n -клас невід'ємних многочленів. Визначимо на P^n функціонал $G(P)$ наступним чином:

$$G\left(\sum_0^n \alpha_k u_k(t)\right) = \sum_0^n \alpha_k c_k. \quad (\text{B.2})$$

Означення 2. Послідовність дійсних чисел $\{c_k\}_0^n$ називається позитивною відносно системи функцій $\{u_k(t)\}_0^n$ якщо $G(P) \geq 0$ для всіх $P \in P_+^n$ строго позитивною якщо $G(P) > 0$ для всіх $P \in P_+^n$, $P \neq 0$; сингулярно позитивною, якщо $G(P) \geq 0$ для всіх $P \in P_+^n$ та знайдеться такий многочлен $P_0 \in P_+^n$, $P_0 \neq 0$ для якого $G(P_0) = 0$.

Розглянемо деяку послідовність дійсних чисел $\{c_k\}_0^n$, що допускає представлення:

$$c_k = \int_a^b u_k(t) d\sigma(t), \quad k=0,1,2,\dots,n, \quad (\text{B.3})$$

де $\sigma(t)$ -деякий розподіл мас на $[a, b]$.

Якщо $u_k(t) = t^k$ то маємо представлення

$$c_k = \int_a^b t^k d\sigma(t) \quad k=0,1,2,\dots,n. \quad (\text{B.4})$$

Відомі наступні теореми (доведення їх можемо знайти в роботі [243]).

Проблема моментів [243] полягає у визначенні умов існування та єдиності для деякої системи дійсних функцій $\{u_k(t)\}_0^n$ та дійсних чисел $\{c_k\}_0^n$ такого розподілу мас $\sigma(t)$, що мають місце моментні співвідношення:

$$\int_a^b u_k(t) d\sigma(t) = c_k, \quad k = \overline{0, n}. \quad \text{Конструктивний її аспект—процедура знаходження}$$

відповідного розподілу мас.

Теорема 6.1. Для того, щоб дійсних чисел $\{c_k\}_0^n$, допускала представлення

(Д.3), необхідно і достатньо щоб при будь-якому натуральному n послідовність $\{c_k\}_0^n$ була позитивною відносно системи функцій $\{u_k(t)\}_0^n$.

Теорема 6.2. Для того щоб послідовність чисел $\{c_k\}_0^{2\nu}$ була системою моментів деякого розподілу мас на $[a, b]$ (допускала представлення (Д.4)) необхідно і достатньо щоб квадратичні форми виду $\sum_0^\nu c_{i+j} x_i x_j$ та $\sum_0^{\nu-1} [(a+b)c_{i+j+1} - abs_{i+j} - c_{i+j+2}] x_i x_j$ були невід'ємними.

Теорема 6.3. Для того щоб послідовність чисел $\{c_k\}_0^{2\nu+1}$ була системою моментів деякого розподілу мас на $[a, b]$ необхідно і достатньо щоб квадратичні форми $\sum_0^\nu (c_{i+j+1} - ac_{i+j}) x_i x_j$ та $\sum_0^\nu (bc_{i+j} - c_{i+j+1}) x_i x_j$ були невід'ємними.

Нехай $\sigma(t)$ -кусково-постійна функція з скінченною множиною точок росту

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m, \quad a \leq \xi_1, \xi_m \leq b \quad \text{Тоді представлення (В.4)}$$

та (В.3) набирають вигляду :

$$c_k = \sum_{j=1}^m \rho_j \xi_j^k, \quad (\text{В.5})$$

$$c_k = \sum_{j=1}^m \rho_j u_k(\xi_j). \quad (\text{В.6})$$

$$\text{Нехай } \varepsilon(t) = \begin{cases} 2; a < t < b \\ 1; t = a, t = b \end{cases}.$$

Означення 3. Тоді індексом представлення (Д.5) будемо називати $\sum_1^m \varepsilon(\xi_j)$.

Означення 4. Представлення (Д.5) називається канонічним, якщо його індекс $\leq n+2$ і головним, якщо його індекс $= n+1$.

При будь-якому n можливі лише два типи головних представлень:

1. $n = 2\nu - 1$: нижнє головне, якщо $a < \xi_j < b$;

верхнє головне, якщо маси зосереджені в $\nu - 1$ точках всередині інтервалу $[a, b]$

та на обох кінцях a, b .

2. $n = 2\nu$:

нижнє головне: маси зосереджені в ν точках всередині $[a, b]$ та в кінці a ;

верхнє головне: маси зосереджені в ν точках всередині $[a, b]$ та в кінці b .

Очевидно, що для знаходження розподілу мас $\sigma(t)$ у випадку існування головного представлення достатньо знайти точки зосередження мас.

У випадку степеневі проблеми моментів ця задача має простий розв'язок. Нехай послідовність $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ строго позитивна.

1. $n = 2\nu - 1$

Точки зосередження мас нижнього головного представлення співпадають з коренями многочлена :

$$\det \| c_k c_{k+1} \dots c_{k+\nu-1} t^k \|_{k=0}^{\nu}. \quad (\text{B.7})$$

Точки зосередження мас верхнього головного представлення співпадають з коренями многочлена :

$$(b-t)(t-a) \det \| c_k c_{k+1} \dots c_{k+\nu-2} t^k \|_{k=0}^{\nu-1}. \quad (\text{B.8})$$

2. $n = 2\nu$

Тоді точки зосередження нижнього та верхнього головного представлення співпадають з коренями многочленів :

$$(t-a) \det \| c_{k+1} - ac_k c_{k+2} - ac_{k+1} \dots c_{k+\nu} - ac_{k+\nu-1} t^k \|_{k=0}^{\nu}, \quad (\text{B.9})$$

$$(b-t) \det \| bc_k - c_{k+1} bc_{k+1} - c_{k+2} \dots bc_{k+\nu-1} - c_{k+\nu} t^k \|_{k=0}^{\nu}. \quad (\text{B.10})$$

Маючи точки зосередження мас, величини стрибків ρ_j можна знайти як розв'язки відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Додаток В2 Деякі властивості орбіт дискретних динамічних систем

Нехай R - раціональна функція, тобто $R(x) = P(x)/Q(x)$, $x \in C$, C - множина комплексних чисел, $P(x), Q(x)$ - деякі многочлени.

Означення 1. Позитивною напівтраєкторією точки x_0 будемо називати множину точок виду: $O_R^+(x_0) = \{x_n : x_n = R(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots\}$.

Означення 2. Від'ємною напівтраєкторією точки x_0 будемо називати множину точок виду: $O_R^-(x_0) = \{x \in C : R^k(x) = x_0, k = 0, 1, 2, \dots\}$, де $R^k(x) = R(R(\dots R(x)\dots))$.

Означення 3. Точка x_0 називається періодичною, якщо існує така точка $x_n \in O_R^+(x_0)$, що $x_0 = x_n$.

Означення 4. Якщо x_0 - періодична, то $O_R^+(x_0)$ будемо називати періодичною траєкторією чи циклом.

Означення 5. Найменше натуральне число n , при якому $x_0 = x_n$, $x_n \in O_R^+(x_0)$ називається періодом циклу.

Цикл, очевидно, можна зображати у вигляді $\{x_0, R(x_0), \dots, R^{n-1}(x_0)\}$. У випадку, коли $n=1$ маємо рівність: $R(x_0) = x_0$, тобто x_0 - нерухома точка функції R . Очевидно, що якщо x_0 - періодична точка періода n , то вона є нерухомою точкою функції R^n .

Означення 6. Комплексне число $\lambda = \frac{dR^n(x_0)}{dx}$ будемо називати власним значенням періодичної точки з періодом n .

Означення 7. Періодична точка x_0 називається сильно притягуючою, якщо $\lambda = 0$, притягуючою, якщо $0 < |\lambda| < 1$, нейтральною, якщо $|\lambda| = 1$, відштовхуючою, якщо $|\lambda| > 1$.

Нехай P - множина всіх відштовхуючих точок.

Означення 8. Множиною Жюліа J_R раціональної функції R будемо називати границю множини P .

Означення 9. Басейном притягання $B(x_0)$ точки x_0 будемо називати множину всіх тих точок x , чийі позитивні напівтраєкторії $Or^+(x)$ збігаються до x_0 .

Означення 10. Басейном притягання циклу $\gamma = \{x_0, R(x_0), \dots, R^{n-1}(x_0)\}$ будемо називати множину $B(\gamma) = \bigcup_{i=0}^{n-2} B(R^i(x_0))$.

Теорема 1. Якщо γ - притягуючий цикл функції R , то $B(\gamma) \in F_R = C \setminus J_R$ і $\delta B(\gamma) = J_R$, де $\delta B(\gamma)$ - границя басейну притягання $B(\gamma)$.

Означення 11. Будемо називати рукавом послідовності $Or^+(x_0)$ таку її підпослідовність $x_j, x_{j+m}, x_{j+2m}, x_{j+3m}, \dots$, що

$$\rho(x_{j+(k-1)m}, x_{j+km}) = \min_{x_i \in Or^+(x_0), i > j+(k-1)m} \rho(x_{j+(k-1)m}, x_i).$$

Число m буде визначати кількість рукавів. Якщо $m > 1$, то можемо зобразити $Or^+(x_0)$ як об'єднання рукавів виду

$$Or^+(x_0) = \bigcup_{j=0}^{m-1} \{x_j, x_{j+m}, x_{j+2m}, x_{j+3m}, \dots\}.$$

Означення 12 Деяку множину Ω будемо називати множиною з n -рукавною структурою, якщо існує таке розбиття її на підмножини $\Omega = \bigcup_{i=0}^n \Omega_i$,

$\Omega_i \neq \emptyset, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j, i, j = \overline{0, n}$ для якого виконується умова: $\forall x \in \Omega_i$ та

$$y : \|x - y\| = \min_{z \in \Omega} \|x - z\| \Rightarrow y \in \Omega_i \text{ або } y \in \Omega_0, i = \overline{1, n}$$

Тоді множини $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ будемо називати рукавами, а множину Ω_0 - центром.

Означення 13 Деяку множину $\Omega \subset R^n$, що має m -рукавну структуру з рукавами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$, будемо називати множиною з спіральною структурою типу $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_{n-1}(t))$, де $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ - деяка монотонно спадна по кожному

аргументу неперервна функція, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ - монотонно зростаючі функції, якщо для кожного рукава існують такі початкові значення функцій $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_{n-1}(0)$ що виконується умова:

$$\sum_{j=1}^{|\Omega_i|} \rho(x_j, f(\cdot)) = \min_{g(\cdot) \in F_{[0, \infty]}^{n-1, t}} \sum_{j=1}^{|\Omega_i|} \rho(x_j, g(\cdot)),$$

де $F_{[0, \infty]}^{n, t}$ - клас усіх монотонно -спадних функцій, визначених як суперпозиції деякої неперервної монотонно-спадної функції n аргументів та довільних монотонно-зростаючих функцій $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$:

$F_{[0, \infty]}^{g_1, g_2, \dots, g_n} = \{g(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)), t \in \Psi \subseteq [0, \infty], g(\cdot) \in C_{R^n}, g(\cdot) \downarrow, g_i(\cdot) \uparrow\}$ на будь-якій підмножині Ψ інтервалу $[0, +\infty]$,

$\rho(x_j, f(\cdot))$ - це відстань від точки x_j до кривої, рівняння якої в сферичній системі координат має вигляд: $r = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)), t \in \Psi \subseteq [0, \infty]$.

Відстань може бути визначена як класична відстань від точки до множини.

Додаток Г Основні модулі інформаційної системи аналізу солітонної компоненти



The image shows a 'Database Login' dialog box. The title bar contains the text 'Database Login' and a close button with an 'X' icon. The dialog box has a light gray background and a white border. It contains three input fields: 'Database:' with the value 'ADDCONNECTION3', 'User Name:' with the value 'forecaster007', and 'Password:' with an empty field. At the bottom of the dialog box, there are two buttons: 'OK' and 'Cancel'.

Рис.Г.1. Блок вводу даних. Пароль користувача бази.

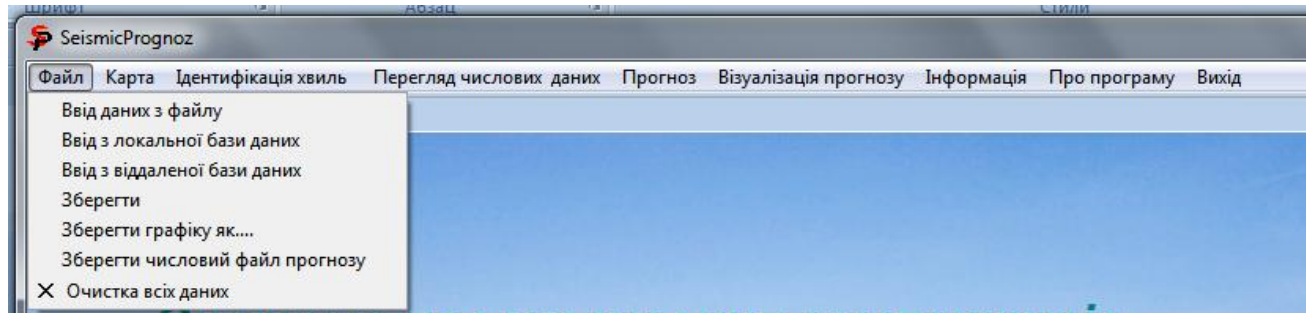


Рис.Г.2. Головне меню програми

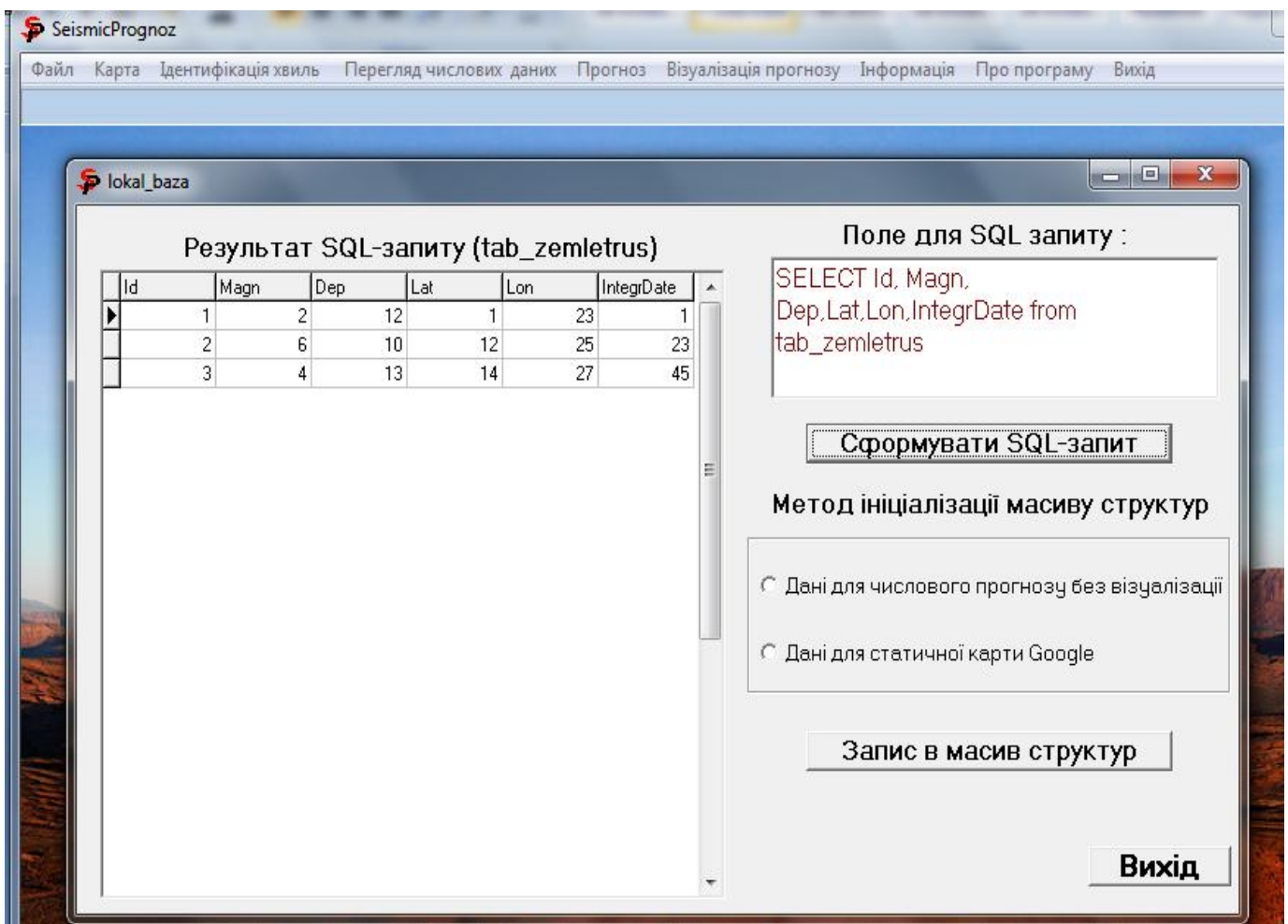


Рис. Г.3. Робота з локальною базою даних

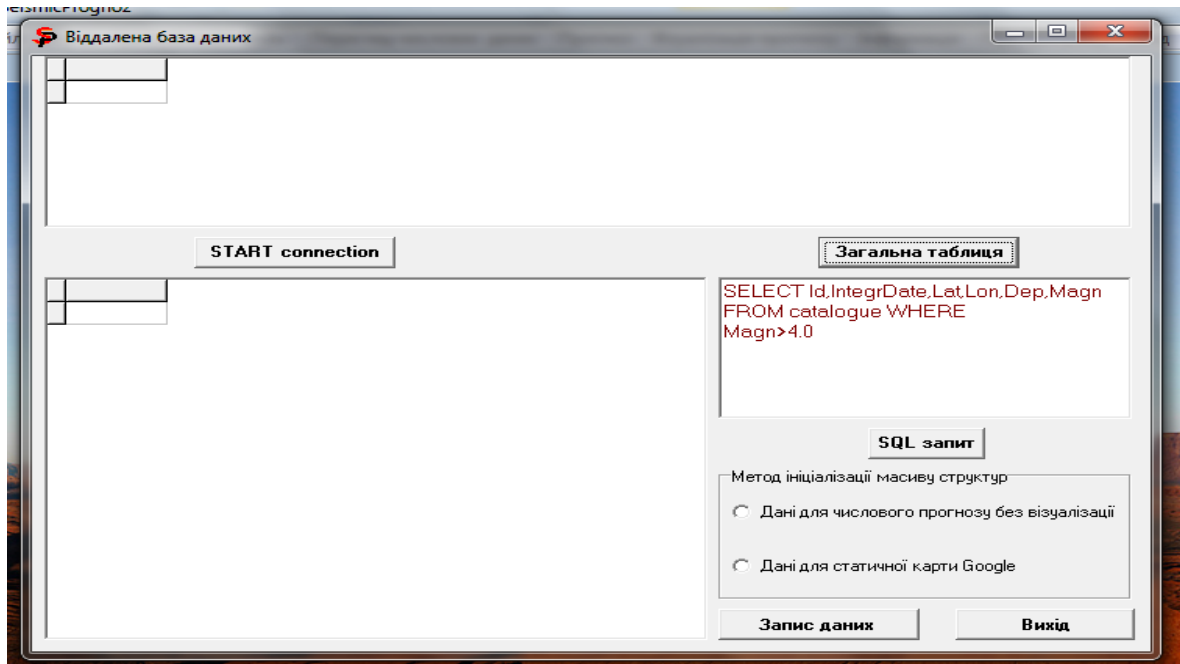


Рис.

Г.4. Модуль роботи з віддаленою базою даних.

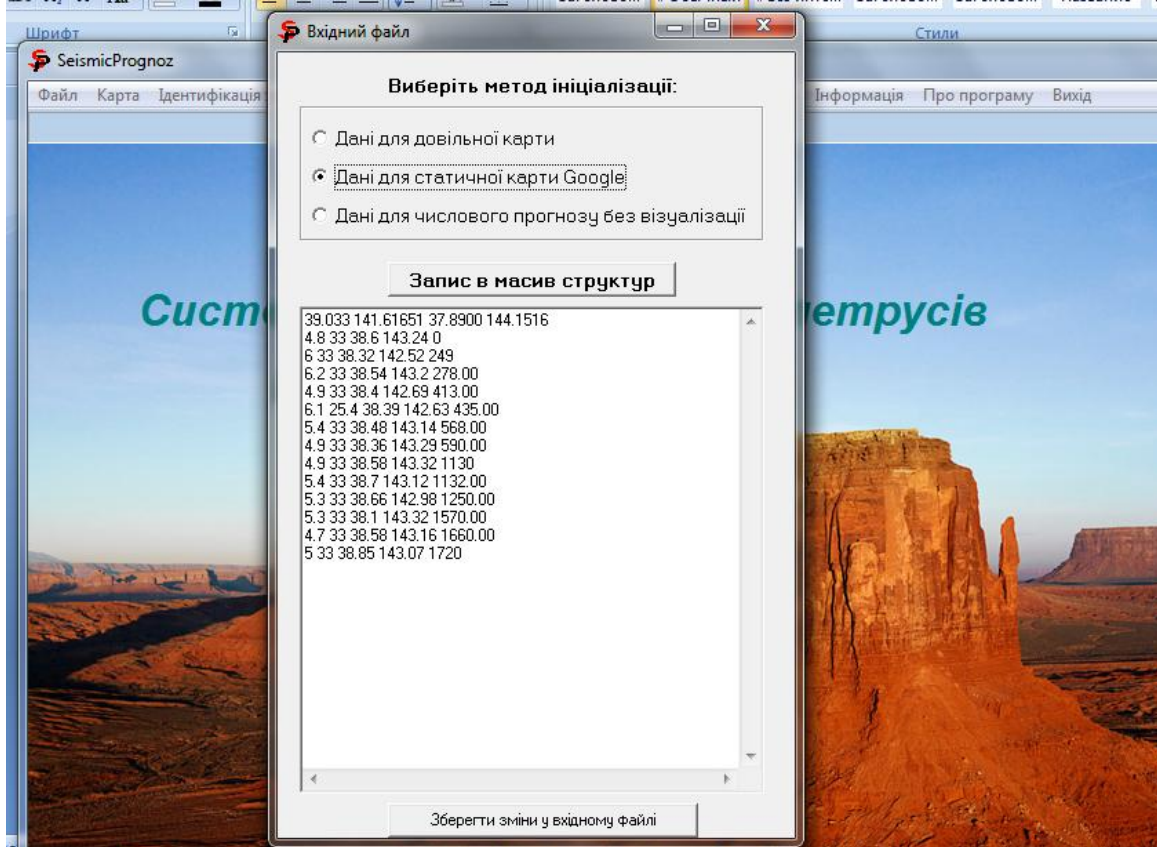


Рис.Г.5. Ввід даних з файлу

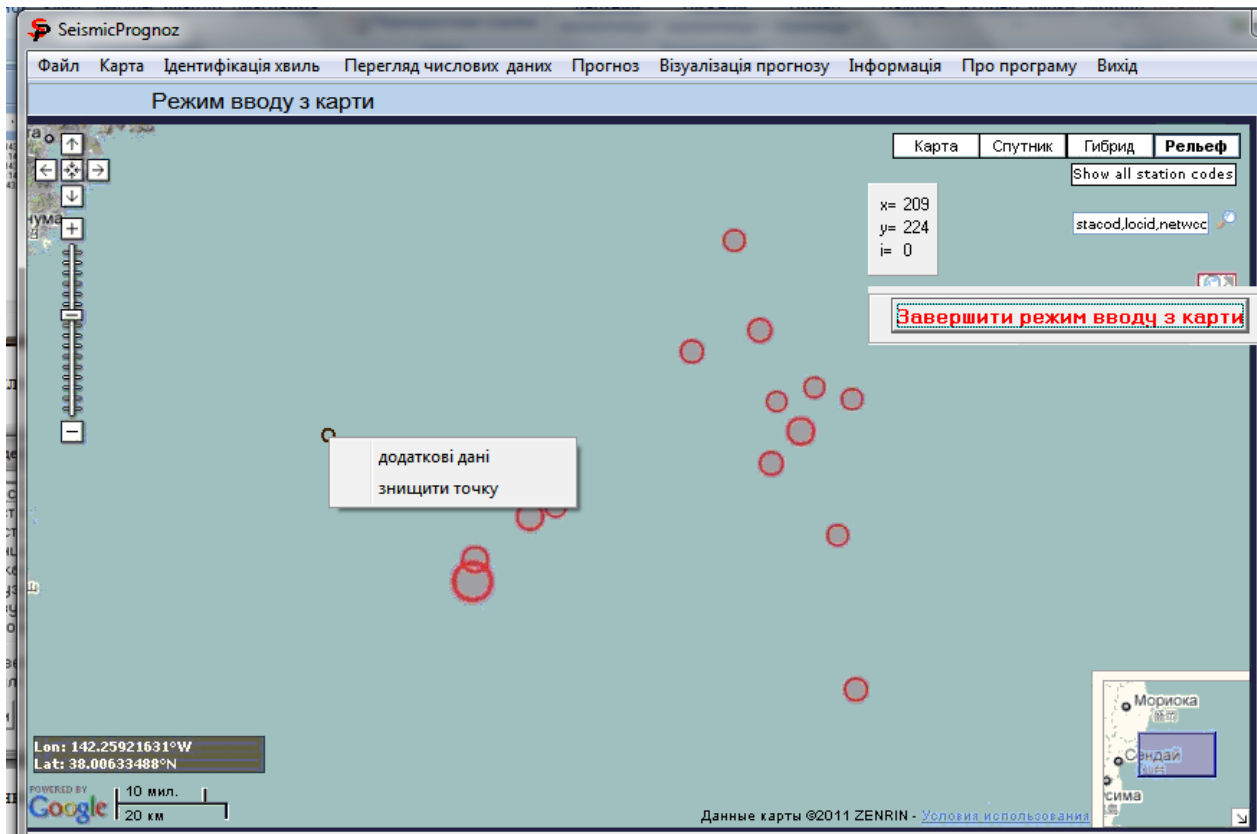


Рис. Г.6. Режим ручного вводу та корекції даних

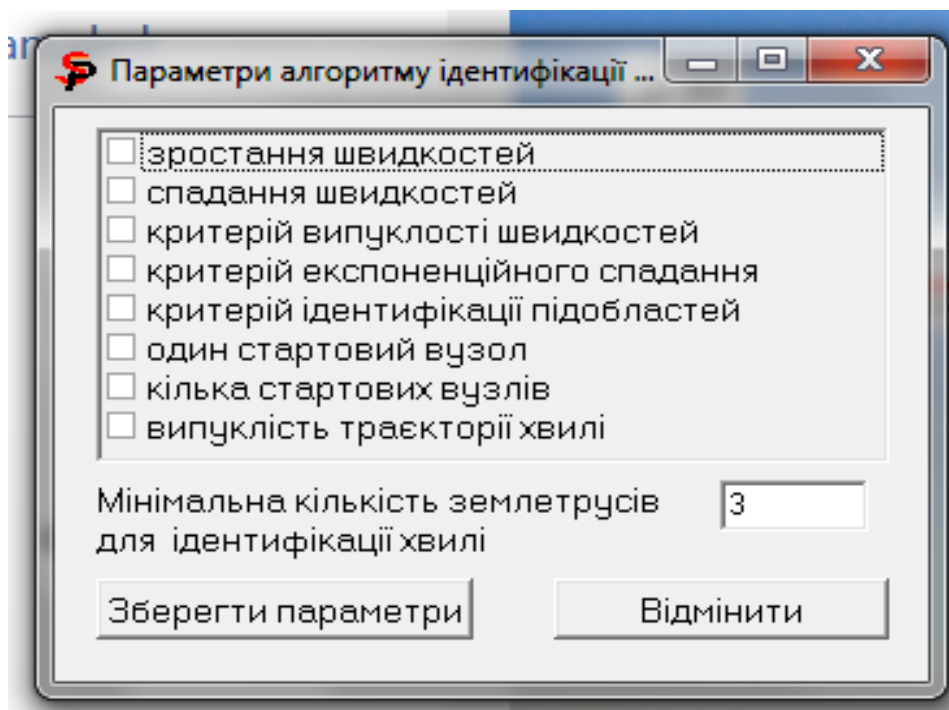


Рис.Г.7. Налаштування параметрів алгоритму ідентифікації відокремлених хвиль

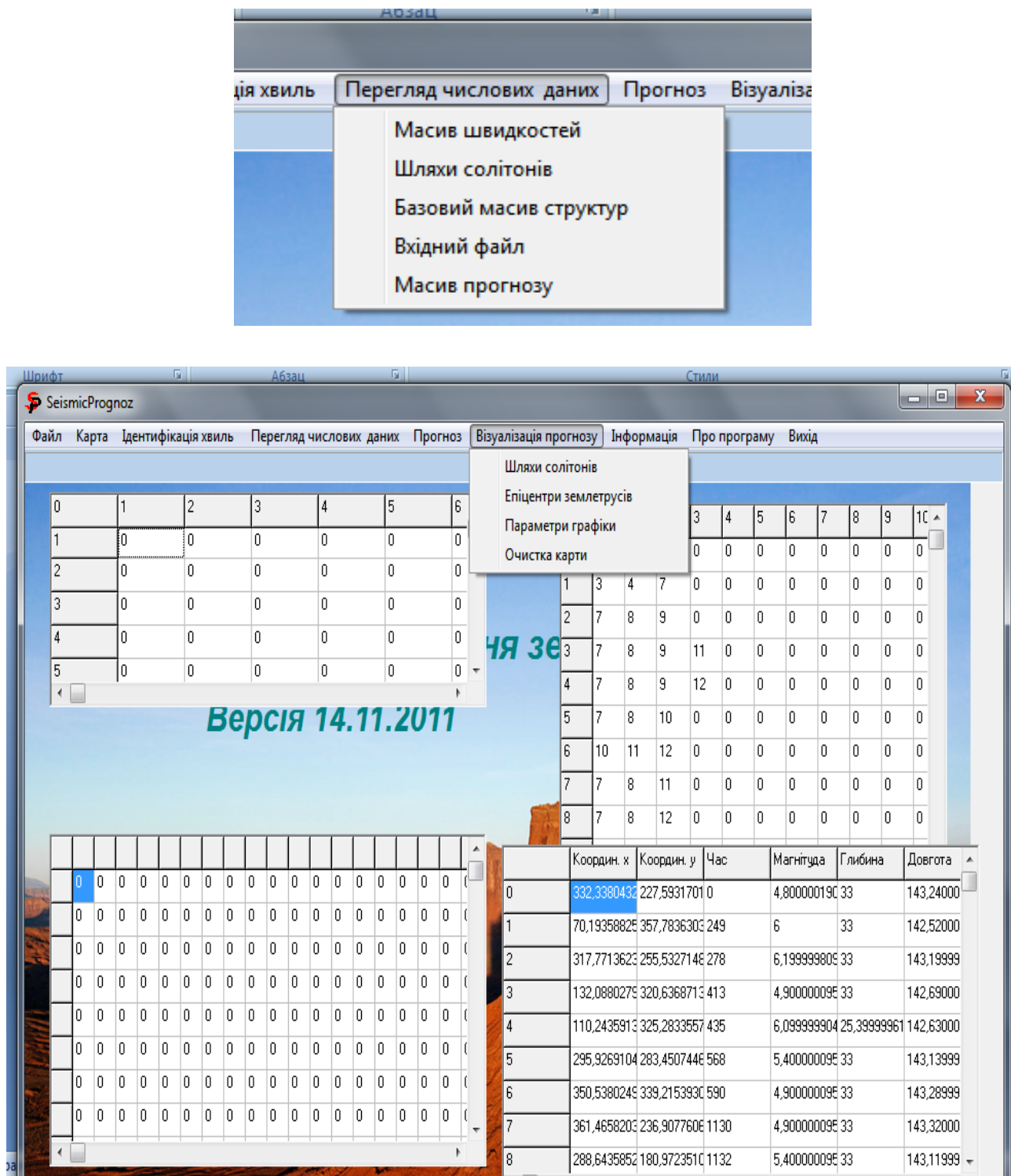


Рис.Г.8. Перегляд числових даних та редагування

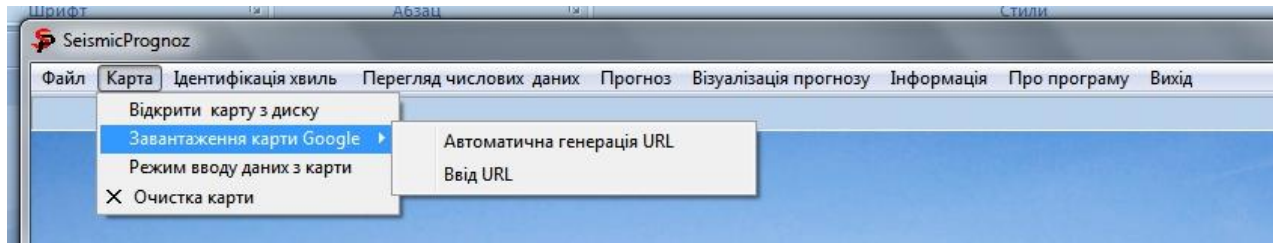


Рис.Г.9. Автоматична генерація URL

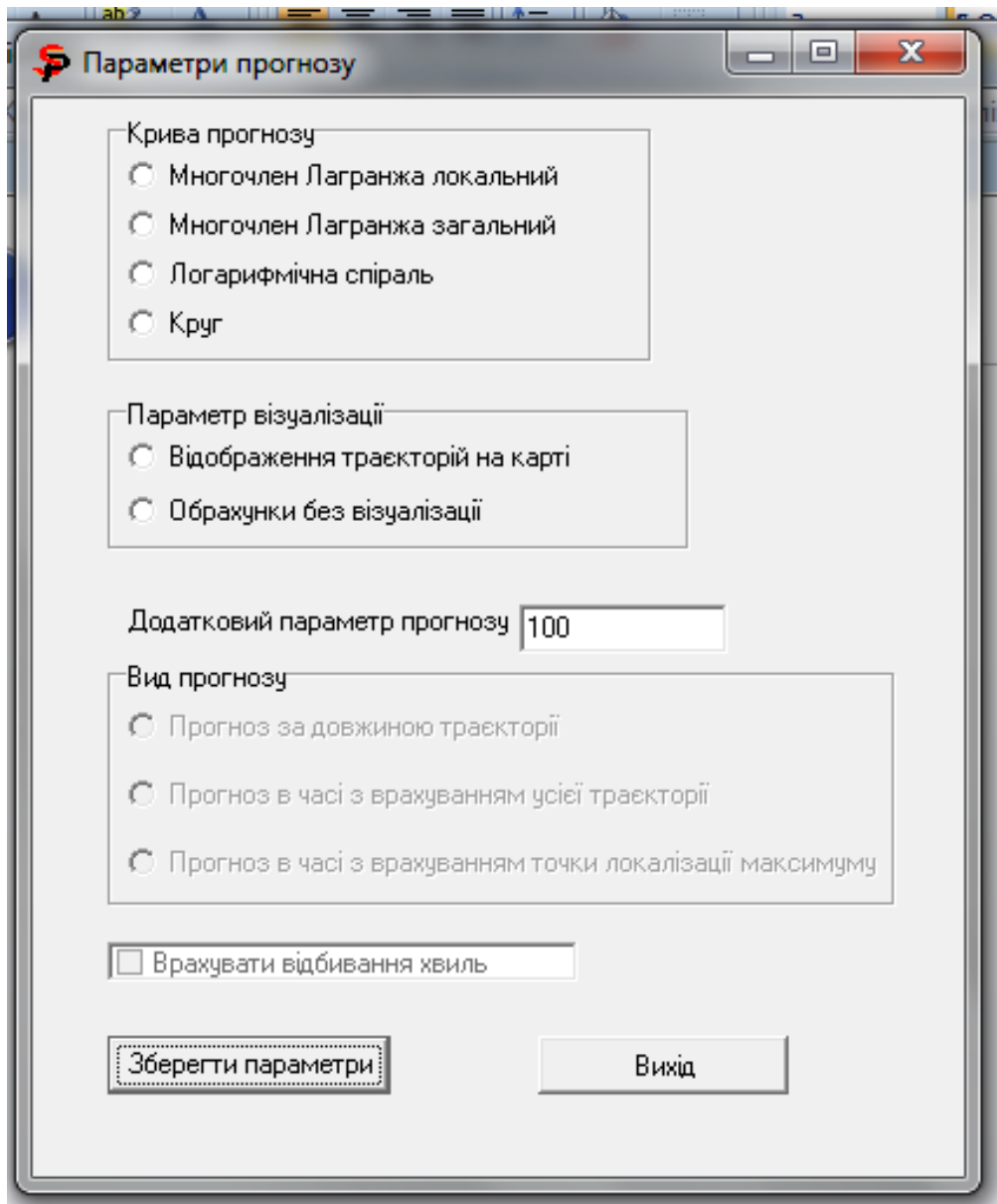


Рис. Г.10. Параметри прогнозу та візуалізації

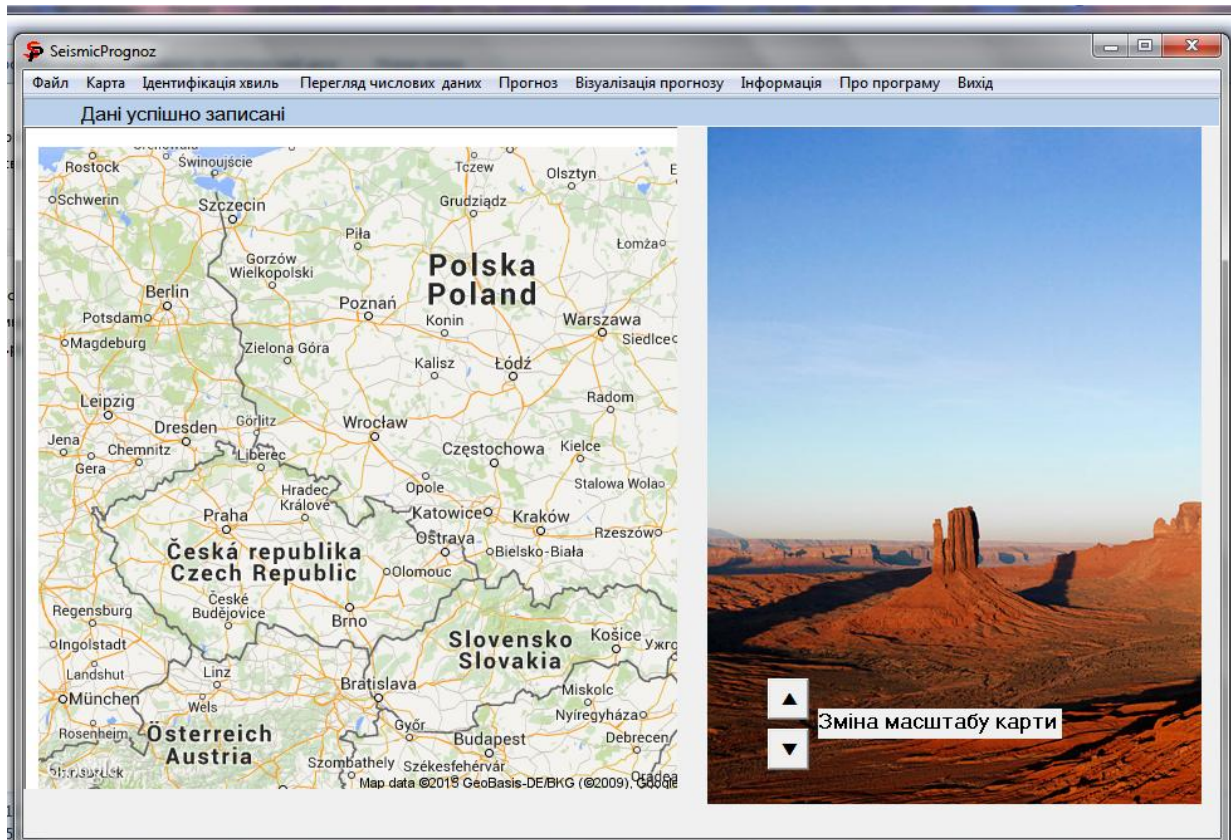


Рис. Г.11. Робота з картами Google: автоматичне завантаження карти

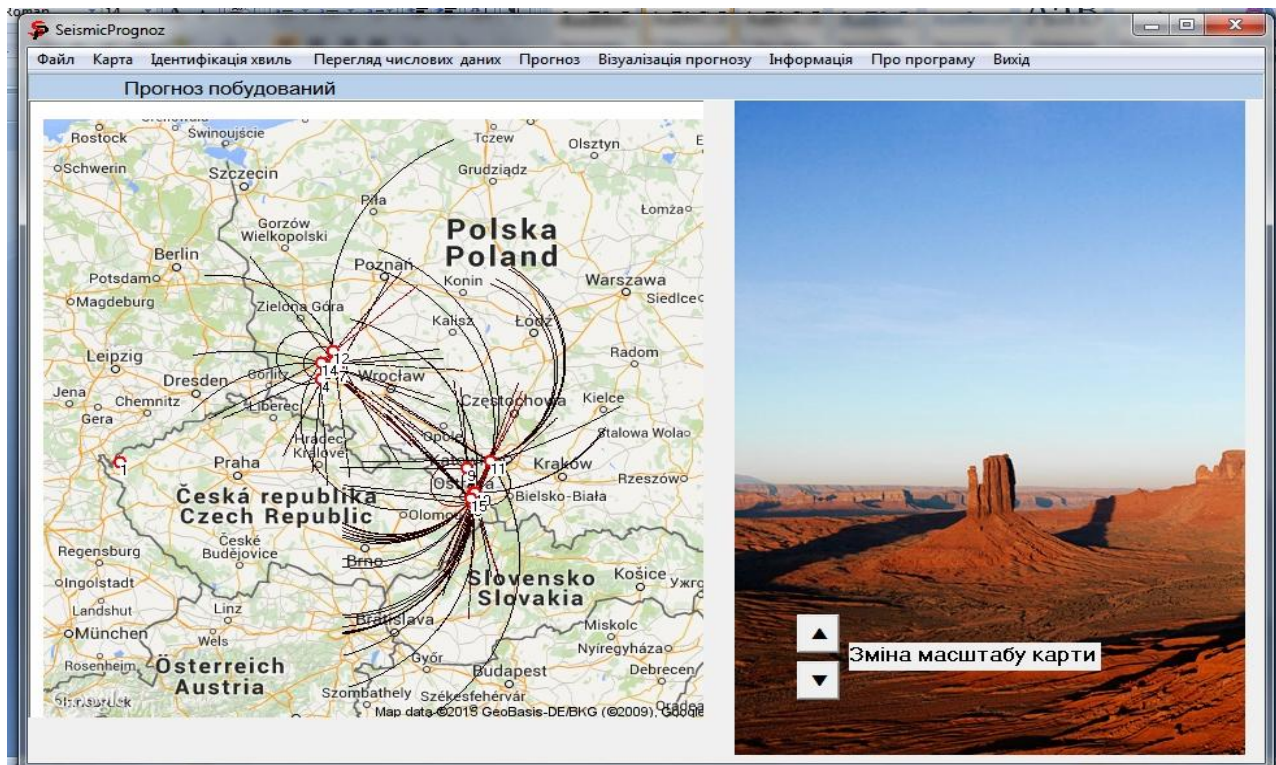


Рис. Г.12. Побудова прогнозних траєкторій



Рис. Г.13. Режим вводу даних з карти

Формування візуального відображення прогностичних траєкторій...

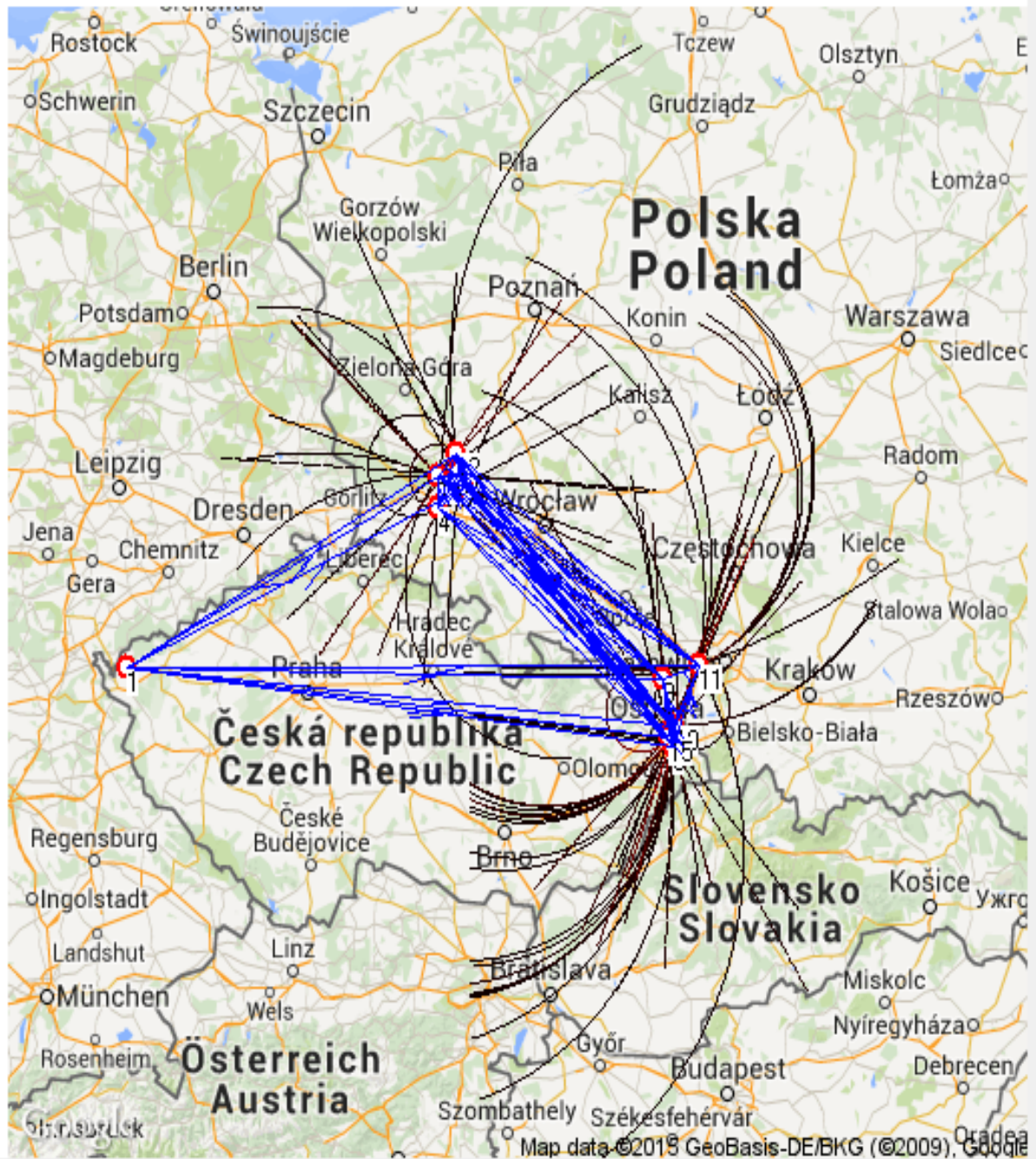


Рис. Г.14. Візуалізація : прогностні шляхи та шляхи відокремлених хвиль

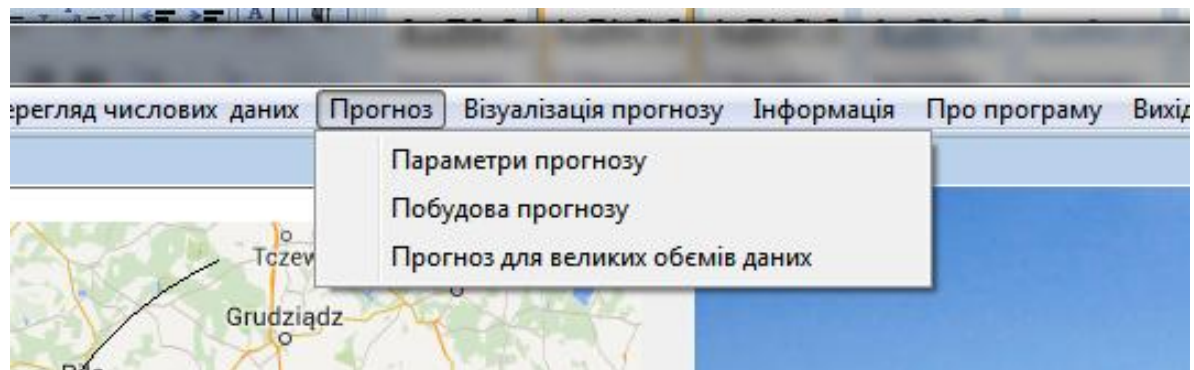


Рис. Г.15. Режими побудови прогнозу в залежності від об'єму даних

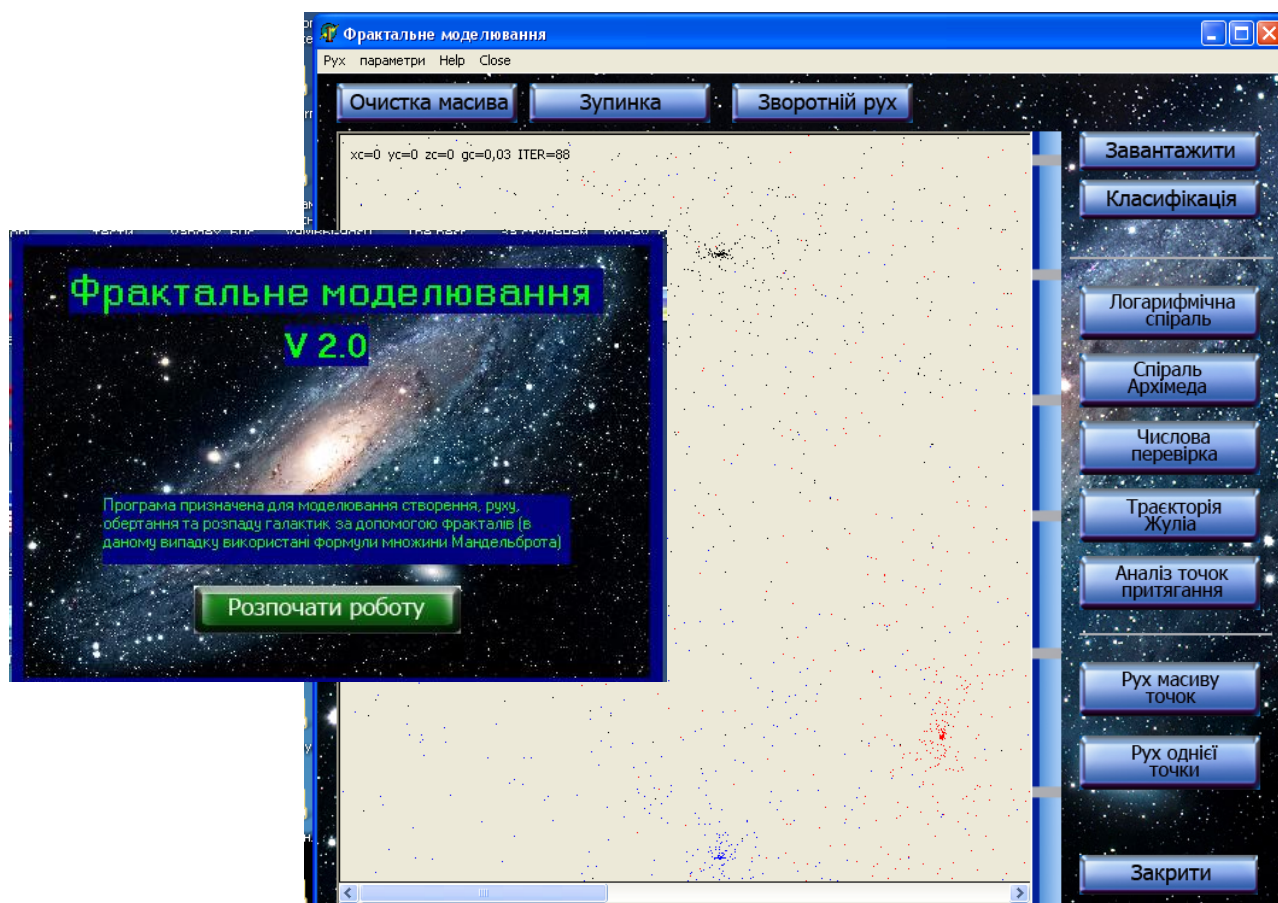


Рис. Г.16. Підпрограма моделювання та дослідження об'єктів спіральної структури, що базується на використанні методу операторних перетворень

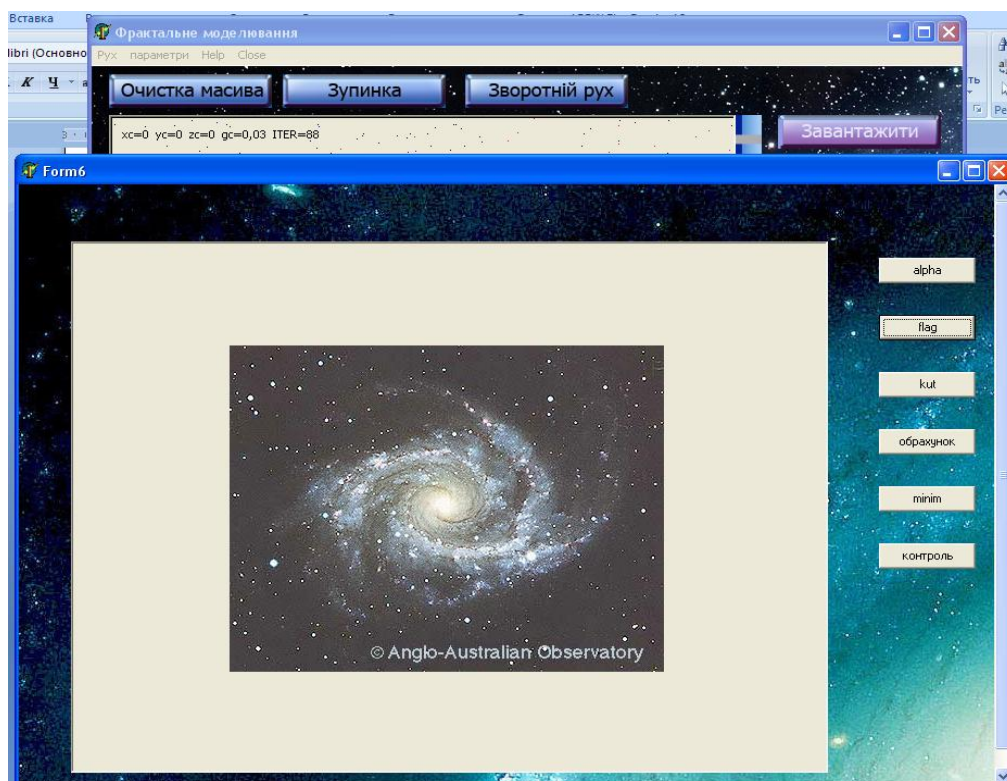


Рис. Г.17. Підсистема вводу даних та аналізу спіральної структури (Галактика NGC2997)

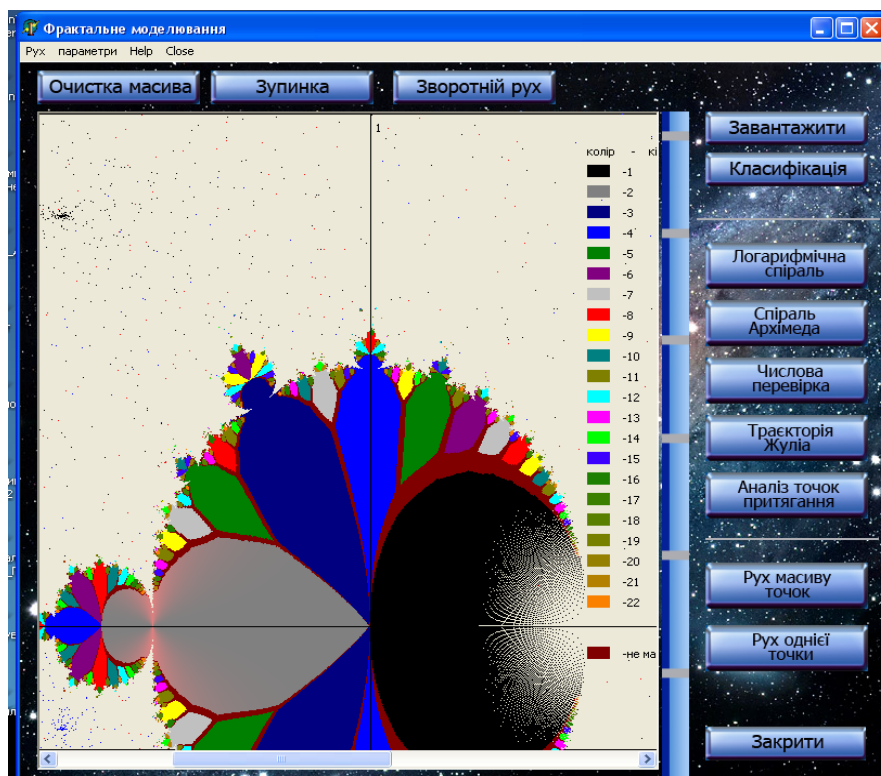


Рис. Г.18. Підсистема аналізу характеру збіжності напівтраєкторій Жуліа